MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. dr. ing. ALEXANDRU SPĂTARU

TEORIA TRANSMISIUNII INFORMAȚIEI

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI

Lucrarea a fost analizată și aprobată de colectivul Catedrei de Electronică Aplicată, de Consiliul Profesoral al Facultății de Electronică și Telecomunicații și de Biroul Senatului Institutului Politehnic București.

Redactor: ing. *Maria Beluri*
Tehnoredactor: *Vergilia Rusu*
Grafician: *V. Wegemann*

PREFAȚĂ

Cursul „Teoria transmisiunii informației" este adresat în principal studenților facultății de Electronică și Telecomunicații, dar poate fi util și altor studenți în preocupările cărora intră probleme de prelucrări și transmisiuni de semnale. De asemenea, cursul este destinat și studenților angrenați în activitatea de cercetare, precum și inginerilor care se pregătesc pentru doctorat.

„Teoria transmisiunii informației" este o disciplină care înglobează într-o formă unitară concepte din teoria codurilor, teoria semnalelor aleatoare, teoria modulației și teoria deciziilor statistice. Importanța tratării unitare a acestor teorii constă în faptul că, în procesele mai complexe de transmisiune a informației, se fac operații de codare, de modulare, cît și de decizii statistice și, ca urmare, optimizarea întregului sistem de transmisiune nu poate fi făcută fără a lua în considerare în mod global toate prelucrările ce se fac asupra semnalului aleator purtător de informație.

Din acest punct de vedere, „Teoria transmisiunii informației" este o disciplină unitară, de profil larg, care folosește metode matematice diversificate în scopul elaborării de procedee care să protejeze informația de efectele dăunătoare ale perturbațiilor, să mărească eficiența procesului de transmisiune și să facă o selecție a informației esențiale în vederea compresiei de date și a recunoașterii de forme.

Teoria transmisiunii informației are un cîmp larg de aplicare și în domeniul biologiei, dat fiind că în toate sistemele biologice au loc procese de transmitere, prelucrare și stocare a informației.

Lucrarea este însoțită de patru anexe întocmite de Anca Spătaru. *Acestea nu reprezintă un material de-sine-stătător, ele au menirea de a reaminti unele lucruri cunoscute, sau de a dezvolta unele aspecte care au fost tratate sumar în lucrare.*

Dat fiind profilul larg al acestei cărți, am simțit nevoia să mă consult cu un număr mare de specialiști din diferitele domenii abordate în lucrare, cu unii colegi și studenți, care au făcut observații și mi-au dat sugestii utile. Tuturor le transmit pe această cale cele mai calde mulțumiri. În mod deosebit, țin să mulțumesc dr. ing. Vasile Buzuloiu, *pentru discuțiile purtate în legătură cu întreaga lucrare și conf. dr. ing.* Adrian Murgan *pentru sugestiile făcute, în special în legătură cu cap. 11 și pentru interesul arătat ca lucrarea să apară în condiții cît mai bune.*

CUPRINS

Cap. 1. **Introducere** 3
1.1. Terminologie 13
1.2. Modelul unui sistem de transmisiune a informației 14
1.3. Sarcina unui sistem de transmisiune a informației 15
Cap. 2. **Măsura informației în semnalele discrete** 17
2.1. Măsura informației în cazul discret 17
2.1.1. Specificarea funcției U 19
2.1.2. Unitatea de măsură a informației 19
2.2. Surse discrete 20
2.3. Entropia 23
2.3.1. Proprietățile entropiei 24
2.3.2. Debitul de informație și redundanța sursei 25
2.4. Canale discrete 26
2.4.1. Entropia la intrarea și ieșirea din canal 27
2.4.2. Entropia condiționată 28
2.4.3. Relații între diferite entropii 30
2.4.4. Transinformația 31
2.4.5. Capacitatea canalului discret, redundanță, eficiență 32
Cap. 3. **Măsura informației în semnalele continue** 36
3.1. Transfinformația în canalele continue 36
3.2. Capacitatea canalului continuu 38
3.3. Variația entropiei cu schimbarea coordonatelor 40
Cap. 4. **Codarea surselor pentru canale fără perturbații** 42
4.1. Coduri unic decodabile 42
4.2. Lungimea medie a unui cuvînt de cod 45
4.3. Capacitatea, eficiența și redundanța codului 47
4.4. Coduri absolut optimale 49
4.5. Teorema codării canalelor fără zgomot 50
4.6. Codarea simbol cu simbol 51
4.7. Codarea binară a lui Huffman 52
Cap. 5. **Codarea pentru canale cu perturbații** 57
5.1. Clasificarea codurilor detectoare sau corectoare de erori 57
5.2. Teorema lui Shannon pentru canale cu perturbații 58
5.3. Coduri grup 58
5.3.1. Specificarea cuvintelor cu sens 59
5.3.2. Cuvintele ca elemente ale claselor alăturate 60
5.3.3. Distanța Hamming 62
5.3.3.1. Decizia pe baza distanței minime 62
5.3.3.2. Regiuni de decizie 63
5.3.4. Cuvîntul eroare 64
5.4.3.1. Erori individuale 65
5.4.3.2. Pachete de erori 66

5.3.5. Mecanismul de detecție și de corecție a erorilor 67
5.3.6. Matricea de corecție (control) 68
5.3.7. Codarea codurilor grup cu ajutorul matricei de control **H** 69
5.3.7.1. Relații între coloanele matricei **H** în cazul corecției erorilor 70
5.3.7.2. Relații între coloanele matricei **H** în cazul detecției erorilor 72
5.3.8. Codarea codurilor grup cu ajutorul matricei generatoare **G** 74
5.3.9. Formarea corectorilor 76
5.3.10. Codul Hamming grup corector de o eroare 76
5.3.10.1. Codarea codului Hamming 77
5.3.10.2. Decodarea codului Hamming 78
5.3.11. Coduri iterate 79
5.4. Coduri ciclice 80
5.4.1. Generarea cuvintelor 81
5.4.2. Specificarea cuvintelor cu sens 82
5.4.2.1. Codarea cuvintelor de cod ca elemente în idealul generat de $g(x)$ de grad m 82
5.4.2.2. Codarea cuvintelor de cod ca elemente în spațiul nul al idealului generat de $h(x)$ de grad k 83
5.4.3. Decodarea 84
5.4.4. Realizarea codării și a decodării pentru detecția erorilor prin circuite de multiplicare sau de divizare 86
5.4.4.1. Codarea prin circuite de divizare 86
5.4.4.2. Decodarea prin circuite de divizare 89
5.4.5. Realizarea codării și a decodării pentru corecția erorilor cu registre de deplasare cu reacție 90
5.4.5.1. Registrul de deplasare cu reacție 90
5.4.5.2. Codor cu registru de deplasare cu reacție 94
5.4.5.3. Decodor cu registru de deplasare cu reacție 96
5.4.5.4. Codul Hamming ciclic corector de o eroare 97
5.4.6. Coduri pentru corecția erorilor multiple 101
5.4.6.1. Specificarea cuvintelor de cod prin rădăcinile polinomului generator 102
5.4.6.2. Codul Bose-Chaudhuri-Hocquenghem (B.C.H.) 103
5.4.6.3. Codul Golay 105
5.4.6.4. Sincronizarea codurilor bloc 106
5.5. Coduri convoluționale 106
5.5.1. Structura codurilor convoluționale 106
5.5.2. Codarea codurilor convoluționale cu ajutorul matricei de control **H** 108
5.5.3. Decodarea codurilor convoluționale cu logică majoritară 109
5.6. Procedeul de întrețesere 112
5.7. Detecția globală de erori 112
5.8. Sisteme de criptare 113
5.8.1. Criptare cu cheie aleatoare 113
5.8.2. Criptare cu cheie pseudoaleatoare 114

Cap. 6. **Spațiul semnalelor** 116

6.1. Spații metrice 116
6.2. Spații vectoriale 118
6.3. Spații vectoriale normate 118
6.4. Spații cu produs scalar 119
6.4.1. Produsul scalar în funcție de componente 120
6.4.2. Forma integrală a produsului scalar 120

6.5. Reprezentări în spațiul semnalului și transformări ortogonale 122
6.5.1. Reprezentarea semnalelor în spațiul primar 123
6.5.2. Transformări ortogonale 124
6.5.2.1. Transformata Fourier discretă (T.F.D.) 127
6.5.2.2. Transformata Walsh-Hadamard discretă (T.W.H.D.) 129

Cap. 7. **Semnale aleatoare** 135

7.1. Noțiunea de semnal aleator 135
7.2. Tipuri de semnale aleatoare 136
7.3. Valori medii statistice și valori medii temporate ale semnalelor aleatoare 137
7.3.1. Valori medii statistice (medii pe mulțimi) 137
7.3.2. Valori medii temporale 137
7.4. Semnale staționare 139
7.5. Clasificarea semnalelor aleatoare 140
7.5.1. Semnalul aleator pur 141
7.5.2. Procese Markov simple (de ordinul întîi) 141
7.5.3. Procese ergodice 142
7.6. Continuitatea semnalelor aleatoare 143
7.6.1. Diferențierea semnalelor aleatoare 144
7.6.2. Integrarea semnalelor aleatoare 144
7.7. Funcții de distribuție a variabilelor aleatoare 144
7.7.1. Distribuția uniformă 145
7.7.2. Distribuția normală 145
7.7.3. Distribuția Rayleigh 147
7.8. Funcții de variabile aleatoare 147
7.8.1. Funcții de o singură variabilă aleatoare 147
7.8.2. Funcții de două variabile aleatoare 148
7.8.2.1. Transformarea din coordonate carteziene în coordonate polare 149
7.8.2.2. Distribuția sumei unor fazori cu amplitudine și cu fază aleatoare 150
7.9. Valori medii ale funcțiilor de variabile aleatoare 151
7.9.1. Valoarea medie a unei sume de variabile aleatoare 151
7.9.2. Valoarea medie a unui produs de variabile aleatoare 152
7.9.3. Coeficientul de corelație 153
7.10. Densitatea spectrală de putere a semnalelor aleatoare 154
7.10.1. Teorema Wiener Hincin 155
7.10.2. Densitatea spectrală de putere de interacțiune 158
7.10.3. Densitatea spectrală de energie și densitatea spectrală de energie de interacțiune 158
7.10.4. Densitatea spectrală de putere a derivatei și integralei semnalului 159
7.11. Proprietăți ale funcției de autocorelație 160
7.11.1. Funcția de autocorelație a unei sume de semnale independente 162
7.12. Dezvoltarea în serie cu coeficienți necorelați (Karhunen-Loève) 163
7.13. Semnale de bandă ingustă 165
7.14. Semnale de bandă largă 167
7.15. Valoarea de vîrf a semnalelor aleatoare 168
7.16. Semnalul telefonic 169
7.17. Semnalul de televiziune 170
7.18. Prelucrări liniare ale semnalelor aleatoare 171
7.18.1. Trecerea semnalelor aleatoare prin sisteme liniare 171
7.18.1.1. Trecerea zgomotului alb prin sisteme liniare 172
7.18.1.2. Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul ideal trece-jos 173

7.18.1.3. Trecerea semnalelor aleatoare prin filtru ideal trece-bandă 175
7.18.1.4. Determinarea funcției de pondere a unui sistem liniar prin metoda de corelație 177
7.18.2. Bandă echivalentă de zgomot 179
7.18.3. Medierea semnalelor aleatoare 179
7.18.4. Filtrul adaptat la forma semnalului 181
7.18.5. Maximizarea raportului semnal/zgomot prin filtrare liniară 185
7.18.6. Funcția de coerență 186
7.18.7. Kepstru 187
7.19. Perturbații 188
7.19.1. Clasificarea perturbațiilor 188
7.19.2. Clasificarea perturbațiilor aditive 189
7.19.3. Zgomotul de impulsuri și zgomotul de fluctuații 191
7.19.3.1. Reprezentarea zgomotului de impulsuri 192
7.19.3.2. Reprezentarea zgomotului de fluctuații 193
7.19.3.3. Zgomotul de agitație termică 195
7.19.3.4. Factorul de zgomot 197
7.20. Procese aleatoare discrete 199
7.20.1. Semnalul aleator binar 200
7.20.1.1. Densitatea spectrală de putere 200
7.20.1.2. Funcția de autocorelație 202
7.20.2. Semnale binare pseudoaleatoare 204

Cap. 8. **Semnale aleatoare eșantionate** 206
8.1. Eșantionarea semnalelor aleatoare 207
8.2. Eșantionarea semnalelor de durată finită 209
8.3. Inversarea spectrului 210
8.4. Reconstituirea semnalului eșantionat 211
8.4.1. Interpolare de ordin zero 212
8.4.2. Interpolare polinomială 213
8.4.2.1. Formula de interpolare a lui Lagrange 214
8.4.2.2. Filtre de reconstrucție 215
8.5. Secvențe de date 216
8.5.1. Reprezentarea secvențelor de date în domeniul frecvenței discrete 217
8.5.2. Reprezentarea secvențelor de date în domeniul frecvenței continue 218
8.5.3. Convoluția secvențelor de date 221
8.5.4. Corelația secvențelor de date și spectrul de putere al semnalului 223
8.5.5. Densitatea spectrală de putere a semnalului 225
8.5.6. Caracteristici statistice ale secvențelor de date 226
8.5.7. Estimarea unor caracteristici statistice ale secvențelor de date. Tehnici de analiză spectrală 228
8.5.7.1. Estimarea valorilor medii 228
8.5.7.2. Histograma 229
8.5.7.3. Periodograma 229
8.5.8. Trecerea secvențelor de date prin sisteme liniare, invariante în timp 230

Cap. 9. **Detecția semnalelor** 234
9.1. Modelul unui sistem de transmisiune cu detecția semnalelor 234
9.2. Observarea în momente de timp discrete a unor variabile aleatoare 236
9.2.1. Criterii de decizie 237
9.2.2. Statistică suficientă 241
9.2.3. Detecția unui semnal cunoscut 243
9.2.4. Detecția a două semnale 245

9.3. Observarea continuă a unor semnale aleatoare 247
9.3.1. Detecția unui semnal cunoscut 247
9.3.1.1. Receptor cu corelator 251
9.3.1.2. Receptor cu filtru adaptat 251
9.4. Detecția binară ipoteză compusă 251
9.5. Detecția secvențială 254

Cap. 10. **Estimarea parametrilor** 256
10.1. Modelul unui sistem de transmisiune cu estimarea parametrilor 256
10.2. Observarea în momente de timp discrete a unor variabile aleatoare 257
10.2.1. Estimarea unui parametru aleator 257
10.2.1.1. Estimarea pe baza erorii medii pătratice minime (E.M.P.M.) 258
10.2.1.2. Estimarea pe baza densității de probabilitate aposteriori maxime (M.A.P.) 259
10.2.1.3. Estimarea amplitudinii unui semnal constant în timp 260
10.2.1.4. Estimarea unui perimetru determinist necunoscut 261
10.3. Observarea continuă a unor semnale aleatoare 263
10.3.1. Estimarea liniară 264
10.3.1.1. Cazul cînd parametrul este o variabilă aleatoare 264
10.3.1.2. Cazul cînd parametrul este determinist necunoscut 266

Cap. 11. **Estimarea formei semnalului** 268
11.1. Filtrarea optimală a semnalelor continue — Ecuația Wiener-Hopf 268
11.2. Filtrare optimală Wiener pentru secvențe de date 271
11.3. Filtre Kalman-Bucy 275
11.3.1. Sisteme dinamice generatoare de semnale aleatoare 275
11.3.2. Filtre optimale Kalman-Bucy 281

Cap. 12. **Transmisiuni în bandă de bază** 283
12.1. Canalul de transmisiune 283
12.1.1. Transmisiunea impulsurilor prin canale dispersive 284
12.1.1.1. Teorema lui Nyquist 284
12.1.1.2. Transmisiuni cu impulsuri de tip „cosinus ridicat" 287
12.1.1.3. Tehnici cu răspuns parțial 290
12.1.2. Măsurarea efectului perturbațiilor din canalele reale 292
12.2. Transmisiuni analogice 293
12.1.2. Transmisiuni multiple cu diviziune a căilor în timp 293
12.2.2. Modulația impulsurilor în amplitudine (M.I.A.) 294
12.2.3. Modulația impulsurilor în poziție (M.I.P.) 295
12.2.4. Modulația impulsurilor în interval (M.I.I.) 299
12.3. Transmisiuni numerice 300
12.3.1. Modulația în cod (M.I.C.) 300
12.3.1.1. Cuantizarea uniformă 301
12.3.1.2. Cuantizarea neuniformă 304
12.3.1.3. Raportul semnal/perturbație datorat erorilor numerice 304
12.3.1.4. Raportul semnal/zgomot total 306
12.3.1.5. Lărgimea de bandă a semnalului M.I.C. 307
12.3.1.6. Tipuri de semnale utilizate în transmisiunile numerice 307
12.3.2. Modulația diferențială a impulsurilor în cod (M.D.I.C.) 308
12.3.3. Modulația delta (M.Dî) 312
12.3.4. Transmisiuni cu spectru distribuit (T.S.D.) 314

12.3.5. Metode de sincronizare 317
12.3.5.1. Sincronizare de bit 318
12.3.5.2. Sincronizare de grup 319
12.3.5.3. Bruiajul și debruiajul datelor 320

Cap. 13. **Transmisiuni cu semnal purtător sinusoidal** 321

13.1. Modulația liniară 321
13.1.1. *Definirea unui operator de modulație în domeniul timp* 321
13.1.2. Definirea unui operator de modulație în domeniul frecvență 321
13.1.3. Reprezentarea semnalelor modulate liniar în domeniul frecvență 323
13.1.3.1. Spectrul semnalului (M.A.) 323
13.1.3.2. Spectrul semnalului (MA-PS) 324
13.1.3.3. Spectrul semnalului (MA-BLU) 324
13.1.4. Reprezentarea semnalelor modulate liniar în domeniul timp 325
13.1.4.1. Modulația în amplitudine (MA) 326
13.1.4.2. Modulația în amplitudine cu purtătoare suprimată (MA-PS) 327
13.1.4.3. Modulația în amplitudine cu bandă laterală unică (MA-BLU) 328
13.1.5. Demodulația semnalelor modulate liniar 331
13.1.5.1. Demodulația de înfășurătoare 331
13.1.5.2. Demodulația de produs 332
13.1.6. Perturbații în sistemele de modulație liniară 337
13.1.6.1. Interferențe în sistemele cu modulație liniară 337
13.1.6.2. Zgomote în sistemele cu modulație liniară 339
13.1.6.3. Distorsiuni în sisteme cu modulație liniară 341

13.2. Modulația în unghi (exponențială M.E.) 344
13.2.1. Modulația în unghi cu mesaj sinusoidal 344
13.2.2. Modulația în unghi cu un mesaj format dintr-o sumă de sinusoide 346
13.2.3. Modulația în frecvență cu mesaje continue 347
13.2.3.1. Distorsiuni în sistemele cu M.F. 348
13.2.3.2. Perturbații în sistemele cu M.F. 350
13.2.3.3. Metode de demodulare care reduc pragul în M.F. 353
13.2.4. M.F. utilizată în transmisiuni de date 355
13.2.4.1. Demodularea semnalelor M.F. cu secvență de date 357
13.2.5. Modulația în unghi polivalentă pentru transmisiuni de date 359
13.2.5.1. M.F. polivalentă 360
13.2.5.2. M.Φ. polivalentă 361
13.2.5.3. Operația de bruiaj și debruiaj 366

13.3. Recuperarea informației privind frecvența și faza purtătoarei 366

Cap. 14. **Compresie de date** 368

14.1. Tipuri de sisteme de compresie 368
14.1.1. Transformări care conservă entropia (C.E.) 368
14.1.2. Transformări care reduc entropia (R.E.) 369

14.2. Modelul unui sistem cu compresie de date 369

14.3. Funcția „rata distorsiunii" 370

14.4. Compresia prin codare cu pas variabil 371

14.5. Compresii de date prin transformări ortogonale 373
14.5.1. Compresie de date cu ajutorul transformatei Karhunen-Loève (K-L) 376
14.5.2. Compresie de date cu ajutorul transformatei Walsh-Hadamard (W-H) 377

Cap. 15. Recunoașterea formelor 379
15.1. Recunoașterea de forme bazată pe teoria deciziilor 379
15.1.1. Selecția trăsăturilor 380
15.1.2. Clasificarea trăsăturilor 380
15.1.2.1. Tehnici de clasificare parametrice 380
15.1.2.2. Tehnici de clasificare neparametrice 383
15.2. Recunoașterea de forme pe baze sintactice 388
Anexa I. Elemente de teoria probabilităților 391
Anexa II. Structuri algebrice și elemente de calcul în cîmpuri finite 407
Anexa III. Semnale deterministe 429
Anexa IV. Matrice 439
Bibliografie 445
Index alfabetic 459

CAPITOLUL 1

INTRODUCERE

Acest curs presupune cunoscută materia predată la cursurile precedente și în mod special la cursul de Matematici speciale și la cursul de Semnale, circuite, sisteme.

În tratarea ce urmează se presupune că atît semnalul cît și perturbațiile au o natură aleatoare și în consecință sînt descrise de legi probabilistice. Numai caracterul aleator al semnalelor le face pe acestea să transmită informații.

1.1. Terminologie

Pentru a se evita eventualele neînțelegeri ce ar putea rezulta din utilizarea unor termeni care sînt folosiți în literatură cu mai multe accepțiuni este necesar să se facă unele precizări asupra sensului în care acești termeni sînt utilizați în prezenta lucrare.

Informație. Pentru a introduce noțiunea de informație, se presupune că într-o situație oarecare pot avea loc N evenimente diferite, egal probabile, probabilitatea unui eveniment fiind $p = \frac{1}{N}$. Prin *realizarea unui eveniment din cele N posibile se obține informație*. Aceasta este cu atît mai mare cu cît evenimentul realizat este mai imprevizibil, respectiv cu cît probabilitatea lui este mai mică. Prin definiție informația obținută în acest caz este:

$$i = + \log \frac{1}{p} = -\log p = \log N,$$

unde s-a luat funcția logaritm pentru a asigura informației proprietatea de aditivitate (cap. 2).

Din cele precedente se vede că informația se obține printr-un mecanism de alegere a unui eveniment din cele N evenimente posibile egal probabile (după cum se va arăta în cap. 2, unde se va defini și măsura informației, restricția ca cele N evenimente posibile să fie egal probabile nu este reținută).

Semnal se numește o *manifestare fizică* (undă electromagnetică, undă sonoră etc.) *capabilă a se propaga printr-un mediu dat.*

Aceasta este cea mai largă accepțiune dată noțiunii de semnal. În general după cum se va vedea, denumirea de semnal este utilizată într-un sens mai restrîns excluzînd acele semnale care dăunează procesului de transmisiune și care se numesc perturbații.

Perturbație se numește un *semnal care modifică semnalul aleator util care transmite informația, micșorînd cantitatea de informație transmisă.*

Mesaj se numește un *semnal ce corespunde unei realizări particulare din ansamblul de idei, imagini, date, care trebuie transmise unui corespondent.* O parte componentă a mesajului se va numi tot mesaj.

În literatură noțiunea de mesaj este utilizată uneori într-un sens mai larg (incluzînd de exemplu texte scrise etc.). În prezenta lucrare se va presupune totdeauna existența unor traductoare care transformă într-un semnal entitatea care trebuie transmisă.

La punctul de destinație un alt traductor face operația inversă, de transformare a semnalului în entitatea originală.

Descrierea structurii și a proprietăților traductoarelor nu intră în obiectul acestei lucrări care se va ocupa numai de problemele ce privesc transmisiunea, începînd de la ieșirea traductoarelor de la emisie, care se numește sursă, la intrarea în traductorul de la recepție care se numește utilizare (corespondent sau observator).

Între sursă și utilizare mesajul suferă, în general, o serie de transformări al căror rezultat se numește semnal (în sens restrîns).

Sursă de informație se numește *mecanismul prin care, din mulțimea mesajelor posibile se alege într-un mod imprevizibil pentru observator un mesaj particular destinat a fi transmis unui corespondent.*

Utilizare (corespondent, observator destinatar) se numește *destinația finală la care trebuie să ajungă mesajul transmis.*

Canal (cale) se numește *totalitatea mijloacelor destinate transmisiunii mesajului,* prin „mijloace" înțelegîndu-se atît aparatura cît și mediul prin care se face transmisiunea și include toate sursele de perturbații.

Modulare (modulație) se numește *transformarea unui mesaj într-un semnal cu scopul principal de a facilita transmisiunea prin mediul dat sau de a realiza transmisiuni multiple prin același mediu.*

Scopul secundar al modulației este de a mări eficiența transmisiunii prin micșorarea efectului perturbațiilor ce intervin în procesul de transmisiune.

Demodulare (demodulație) se numește *transformarea inversă modulării.*

Codare se numește *prelucrarea discretă, efectuată cu scopul principal de a mări eficiența transmisiei* (v. cap. 2). Uneori termenul de codare se utilizează în sens larg, înglobînd și modularea.

Decodare se numește *operația inversă codării.*

1.2. Modelul unui sistem de transmisiune a informației

Cel mai simplu model al unui sistem de transmisiune a informației este prezentat schematic în fig. 1.1.

În acest caz se presupune că mesajul sub forma în care este dat de sursă (traductor) poate fi transmis direct prin canal, fără a suferi transformări.

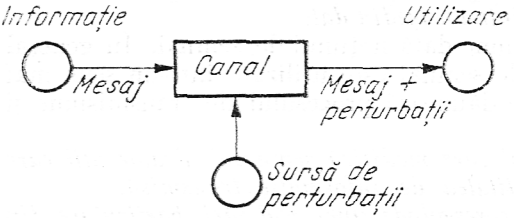


Fig. 1.1. Sistem simplu de transmisiune a informației.

Sursa de perturbație este un element ce apare în mod inevitabil în oricare sistem de transmisiune a informației.

Modelul din fig. 1.1 corespunde în general cazurilor cînd informația trebuie transmisă la distanță mică și erorile pricinuite de zgomote sînt mici.

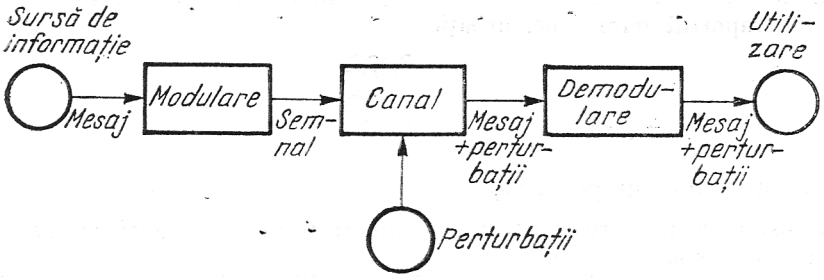


Fig. 1.2. Sistem de transmisiune a informației cu elemente de modulare-demodulare.

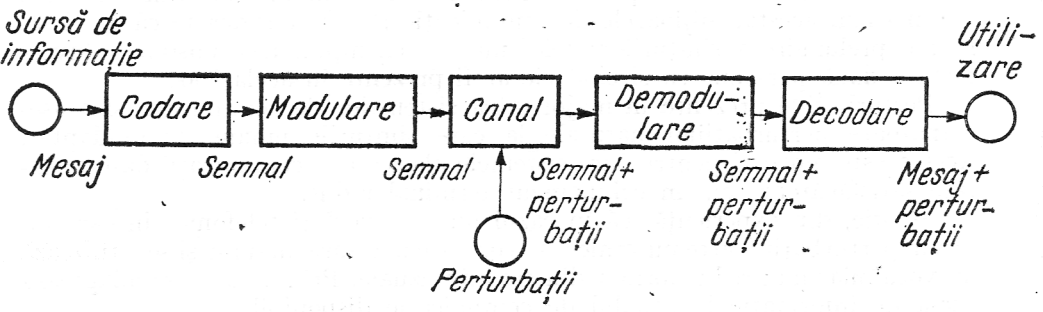


Fig. 1.3. Sistem de transmisiune a informației cu elemente de modulare-demodulare și codare-decodare.

Dacă mesajul nu poate fi transmis ca atare prin mediu (din cauza dificultăților de propagare sau din cauza necesității de a realiza transmisiuni multiple) se introduc elementele de modulare și demodulare așa cum se arată în fig. 1.2.

Marea majoritate a sistemelor de transmisiune a informației utilizate în prezent au structura prezentată în fig. 1.2.

În cazurile în care se caută mărirea eficienței, respectiv a posibilității transmiterii unei cantități cît mai mari de informație în prezența perturbațiilor, se utilizează și elemente de codare și decodare cum se prezintă în fig. 1.3, în care se includ uneori procedee de decizii statistice.

1.3. Sarcina unui sistem de transmisiune a informației

Sarcina unui sistem de transmisiune a informației este de a pune la dispoziția utilizatorului informația generată de sursă cu un grad de deteriorare specificat admis.

În tehnicile de comunicații se obișnuiește să se introducă un **criteriu de fidelitate,** *pentru aprecierea reproducerii semnalului generat de sursă, la corespondent.*

În sistemele de transmisiune analogice criteriul de fidelitate este ales uneori **eroarea pătratică medie**:

$$\varepsilon = \overline{[x(t) - y(t)]^2} \tag{1.1}$$

unde:

$x(t)$ este mesajul transmis;
$y(t)$ — mesajul recepționat

iar medierea se face în raport cu timpul; alteori se alege drept criteriu de fidelitate **raportul semnal/perturbație**

$$\rho = \frac{\widetilde{[x(t)]^2}}{\widetilde{[n(t)]^2}} \tag{1.2}$$

unde:

$n(t)$ este semnalul perturbator.

La sistemele numerice criteriul de fidelitate ales este *probabilitatea recepționării unui simbol eronat.*

Majoritatea sistemelor de comunicații utilizate în prezent se caracterizează prin faptul că la capetele terminale ale canalului sînt ființe umane. În cazul acesta, mijloacele de comunicație pot fi considerate că ar fi de fapt o prelungire a simțurilor: telefonul, de exemplu, face posibilă convorbirea a două persoane ca și cînd ele ar fi prezente în același loc.

Perturbațiile prezente în majoritatea sistemelor de comunicații sînt asemănătoare perturbațiilor naturale la care simțurile umane s-au adaptat. Acesta este motivul pentru care sistemele clasice de comunicații dau rezultate satisfăcătoare cu un echipament terminal redus.

Se știe, din experiență, că în cazul unei convorbiri telefonice în care intervin perturbații foarte puternice, se vorbește mai tare, mai rar și se utilizează un vocabular mai redus format din cuvinte uzuale. Prin aceasta se adaptează sursa de informație la canalul de comunicație disponibil.

Comunicația de la mașină la mașină se dezvoltă în prezent din ce în ce mai mult, pe lîngă mijloacele tradiționale de comunicație. Automatizările complexe ale proceselor de producție, schimbul de date cu calculatoarele fac ca sistemele de comunicație mașină-mașină să se dezvolte vertiginos.

Spre deosebire de comunicația de la om la om, în comunicația de la mașină la mașină nu mai are loc o codare naturală pe care o efectuează creierul în vederea adaptării cu canalul de comunicație. Acest fapt conduce la mărirea complexității echipamentului terminal în vederea obținerii în procesul de transmisiune a fidelității cerute.

Îmbunătățirea calității transmisiunii se poate face și prin îmbunătățirea canalului.

În alegerea metodei de îmbunătățire a calității transmisiunii trebuie să se facă o comparație între prețul echipamentului terminal și cel al canalului.

Tendințele actuale de dezvoltare indică o preferință spre creșterea complexității echipamentului terminal al cărui preț devine din ce în ce mai scăzut datorită utilizării circuitelor integrate pe scară largă și foarte largă, a căror producție de masă se face la un preț scăzut.

Nu același lucru se poate spune despre costul canalelor de transmisiune. Deși în acest domeniu se fac progrese mari, prin faptul că ele nu se pretează la o producție de masă, probabil că prețul lor nu va scădea apreciabil nici în viitor.

Acest fapt explică tendința spre o utilizare mai rațională a canalului de transmisiune prin mărirea complexității echipamentului terminal, astfel ca acesta să poată efectua operațiile necesare măririi eficienței transmisiunii.

CAPITOLUL 2

MĂSURA INFORMAȚIEI ÎN SEMNALELE DISCRETE

Măsura informației este o măsură a nedeterminării asupra unui sistem de evenimente, respectiv o măsură a incertitudinii asupra rezultatului alegerii printr-un mecanism aleator a unui eveniment din mulțimea evenimentelor posibile, distincte.

Această măsură nu se referă la valoarea subiectivă a informației. Ea este o *măsură obiectivă privind incertitudinea asupra mecanismului prin care se realizează un eveniment din mulțimea evenimentelor posibile.*

2.1. Măsura informației în cazul discret

Pentru precizarea ideilor se consideră mulțimea discretă și finită a tuturor realizărilor (evenimentelor) posibile, ale unui anume experiment care se va numi *spațiul eșantioanelor* și se va nota sub forma matriceală:

$$[X] = [x_1 x_2 \dots x_n], \tag{2.0}$$

în care:

$$\bigcup_{i=1}^{n} x_i = E \quad \text{și} \quad x_i \cap x_j = \Phi \quad i \neq j$$

unde E este evenimentul sigur.

Fiecărui element al mulțimii (2.0) îi este asociată o probabilitate dată de matricea:

$$[P_x] = [p(x_1)\ p(x_2) \dots p(x_n)],$$

în care:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1.$$

Măsura incertitudinii asupra realizării unui eveniment x_i, pe care o notăm cu $U(x_i)$ este o funcție $F(p_i)$ de probabilitatea apriori $p_i = p(x_i)$ de realizare a acestui eveniment:

$$U(x_i) = F(p_i) \tag{2.1}$$

și reprezintă incertitudinea inițială (apriori) asupra realizării evenimentului x_i.

Cînd evenimentul x_i se realizează, această incertitudine este înlăturată și se poate spune că s-a obținut o informație $i(x_i)$ asupra realizării lui x_i. Aceasta poate fi definită ca:

— informația obținută asupra lui x_i prin realizarea lui x_i; sau ca:

— anularea incertitudinii asupra realizării lui x_i, după ce x_i s-a realizat.

Prin urmare $$i(x_i) \triangleq U(x_i) \tag{2.2}$$

Din relația (2.1) rezultă:

$$i(x_i) \triangleq F(p_i) \tag{2.3}$$

Informația în sensul de mai sus este o măsură a incertitudinii.

Se consideră că în procesul de observare a evenimentelor x_i intervin perturbații. În acest caz, între evenimentele realizate x_i și cele observate y_j nu există întotdeauna o corespondență, uneori evenimentul observat y_j diferă de evenimentul realizat x_i, alteori nu diferă, totul depinde de acțiunea întîmplătoare a perturbațiilor.

Se notează cu:

$$[Y] = [y_1 y_2 \dots y_n]$$

mulțimea evenimentelor observate.

Măsura incertitudinii asupra realizării evenimentului x_i dacă s-a observat evenimentul y_j, respectiv $U(x_i/y_j)$, este o funcție $F[p(x_i/y_j)]$ de probabilitatea lui x_i condiționată de y_j:

$$U(x_i/y_j) = F[p(x_i/y_j)] \tag{2.4}$$

Această funcție reprezintă incertitudinea aposteriori asupra realizării evenimentului x_i dacă s-a realizat y_j, adică după observarea evenimentului y_j, rămîne totuși o incertitudine asupra evenimentului care s-a realizat în realitate. Această incertitudine este introdusă de perturbații (în absența perturbațiilor se poate spune cu probabilitatea unu că observînd evenimentul y_j s-a realizat evenimentul x_i).

Din relațiile (2.2) și (2.4) se poate determina informația obținută asupra realizării lui x_i cînd se observă y_j. Această informație reprezintă scăderea incertitudinii apriori asupra realizării lui x_i din starea inițială, înainte de observarea lui y_j, la starea finală cînd s-a observat y_j și cînd rămîne o incertitudine aposteriori, adică:

$$i(x_i;\ y_j) \triangleq U(x_i) - U(x_i/y_j) \tag{2.5}$$

Deci într-o interpretare echivalentă $i(x_i;\ y_j)$ reprezintă:

— informația obținută asupra realizării lui x_i cînd se observă y_j; sau

— descreșterea incertitudinii asupra lui x_i prin recepționarea lui y_j.

Dacă nu sînt perturbații și se realizează x_i se observă că $y_j = x_i$ iar $U(x_i/y_j) = 0$ fiindcă nu mai este nici un fel de incertitudine aposteriori asupra lui x_i dacă s-a observat $y_j = x_i$. În acest caz relația (2.5) devine:

$$i(x_i;\ x_i) \triangleq U(x_i) \tag{2.6}$$

adică se obține relația (2.2).

Dacă acțiunea perturbațiilor este foarte puternică, astfel încît nu se poate face nici o legătură între y_j recepționat și x_i realizat, x_i și y_j sînt evenimente independente. În această situație are loc relația:

$$U(x_i/y_j) = F[p(x_i/y_j)] = F[p(x_i)] = U(x_i) \tag{2.7}$$

iar relația (2.5) devine:

$$i(x_i;\ y_j) = 0, \tag{2.8}$$

adică prin observarea lui y_j nu se obține nici o informație asupra lui x_i.

În cazul general, ținînd seama de relația (2.4) relația (2.5) poate fi scrisă:

$$i(x_i;\ y_j) = F[p(x_i)] - F[p(x_i/y_j)] \tag{2.9}$$

2.1.1. Specificarea funcției U

Funcția U poate fi aleasă dintr-o clasă foarte largă de funcții, însă din acestea numai puține prezintă interes pentru aplicații.

O condiție esențială pe care trebuie să o îndeplinească funcția este *aditivitatea*, fiindcă în conformitate cu sensul dat informației în aplicații aceasta trebuie să fie aditivă. Dacă se consideră că evenimentul x_i este format din două evenimente independente x_{i1} și x_{i2}, respectiv:

$$x_i = x_{i1} \cap x_{i2} \tag{2.10}$$

postulînd că informația este aditivă se obține:

$$i(x_i) = i(x_{i1}) + i(x_{i2}) \tag{2.11}$$

sau

$$\mathrm{U}(x_i) = \mathrm{U}(x_{i1}) + \mathrm{U}(x_{i2}) \tag{2.12}$$

Rezultă:

$$F[p(x_i)] = F[p(x_{i1})] + F[p(x_{i2})] \tag{2.13}$$

sau fiindcă evenimentele x_{i1} și x_{i2} sînt independente:

$$F[p(x_{i1}) \cdot p(x_{i2})] = F[p(x_{i1})] + F[p(x_{i2})] \tag{2.14}$$

Această ecuație funcțională are soluția:

$$E(p) = -\lambda \log p \tag{2.15}$$

unde λ este o constantă pozitivă.
Introducînd relația (2.15) în relația (2.3) se obține:

$$i(x_i) = -\lambda \log p(x_i) \tag{2.16}$$

Dacă se introduce relația (2.15) în relația (2.9), în care se ține seama și de efectele zgomotelor, se obține:

$$i(x_i; y_i) = -\lambda \log p(x_i) + \lambda \log p(x_i/y_j) \tag{2.17}$$

sau:

$$i(x_i; y_j) = \lambda \log \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} \tag{2.18}$$

Informația dată de relația (2.16) se mai numește *informație proprie* asociată cu evenimentul (starea) x_i, iar informația dată de relația (2.18) se numește *informație mutuală* asociată cu x_i și y_j (obținută prin realizarea evenimentului x_i și recepționarea, observarea evenimentului y_j).

2.1.2. Unitatea de măsură a informației

După cum s-a văzut, informația este o măsură a incertitudinii, în procesul alegerii la întîmplare dintr-un număr de evenimente posibile. Cea mai simplă alegere este alegerea între două evenimente. Din această cauză s-a convenit să se aleagă ca unitate de informație, informația ce se obține prin alegerea, la întîmplare, a unui eveniment din două evenimente egal probabile.

În acest caz avem evenimentele:

$$[X] = [x_1 \quad x_2]$$

$$[P] = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right]$$

Ținînd seama de relația (2.16) se obține:

$$i(x_1) = i(x_2) = -\lambda \log \frac{1}{2} = 1 \tag{2.19}$$

Dacă se alege logaritmul în baza doi constanta devine egală cu unitatea:

$$i(x_1) = i(x_2) = \log_2 2 = 1 \text{ bit.} \tag{2.20}$$

Unitatea astfel definită se numește *bit*. În acest caz relația (2.16) devine:

$$i(x_i) = -\log p(x_i) \tag{2.21}$$

iar relația (2.18) devine

$$i(x_i;\ y_j) = \log \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} \tag{2.22}$$

În unele cazuri este mai comod să se lucreze cu logaritmi în baza e (logaritmi naturali) sau cu logaritmi în baza zece. În aceste cazuri unitățile vor fi altele și anume:

$$-\ln \frac{1}{e} = \ln e = 1 \text{ unitate naturală} = 1 \textit{ nit} \text{ (se alege 1 din e)}$$

$$-\ln_{10} \frac{1}{10} = \log 10 = 1 \text{ unitate zecimală} = 1 \textit{ dit} \text{ (se alege 1 din 10)}$$

Relațiile între cele trei unități sînt:

$$1 \text{ nit} = \log_2 e = \frac{1}{\ln 2} = 1{,}44 \text{ bit}$$

$$1 \text{ dit} = \log_2 10 = \frac{1}{\log_{10} 2} = 3{,}32 \text{ bit} \tag{2.23}$$

În cele ce urmează, dacă nu se specifică contrariul, se consideră că logaritmii sînt luați în baza doi, respectiv unitatea de informație adoptată este bitul.

2.2. Surse discrete

Sursele care debitează mesaje în formă discretă (de ex. succesiune de impulsuri) se numesc *surse discrete*. Astfel, de exemplu, dacă se transmite un text prin telegraf, fiecărei litere îi corespunde o succesiune de impulsuri. Dacă se transmite un mesaj eșantionat și cuantizat se pot transmite impulsuri de amplitudini diferite etc.

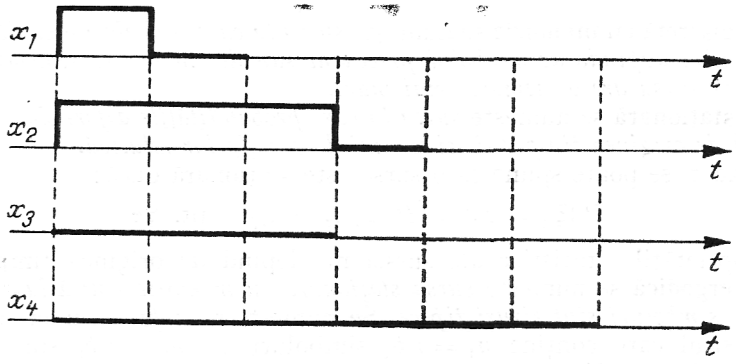


Fig. 2.1. Simbolurile utilizate în codul Morse.

În legătură cu sursele discrete respectiv cu sistemele cifrice de comunicație se utilizează următoarea terminologie:

Sursă discretă de informație este un șir de variabile aleatoare discrete $\xi_{t1}, \xi_{t2} \dots \xi_{tk}$.

Simbol sau literă se numește *elementul fundamental ireductibil care conține o informație*, respectiv o realizare particulară a sursei de informație. Astfel, în cazul codului Morse se utilizează patru simboluri (fig. 2.1).

Simbolul x_1 (punct) este format dintr-un impuls de durată τ și un interval liber egal cu τ. Simbolul x_2 (linie) este format dintr-un impuls de durată 3τ și un interval liber egal cu τ. Simbolul x_3 (spațiul între litere al textului transmis) este format din trei intervale libere, iar simbolul x_4 (spațiul între cuvinte) este format din șase intervale libere.

În cazul unui mesaj eșantionat și cuantizat în n nivele (fig. 2.2) sînt $n + 1$ simboluri.

Simbolul x_0 reprezintă nivel zero, simbolul x_1 este un impuls a cărui amplitudine este egală cu o cuantă, simbolul x_k are amplitudinea egală cu k cuante etc.

Alfabet se numește *totalitatea simbolurilor* (literelor).

În cazul codului Morse alfabetul este format din patru litere, iar în cazul mesajului cuantizat în n nivele alfabetul este format din $n + 1$ litere.

Cuvînt se numește *succesiunea finită de simboluri* (în particular cuvîntul poate conține și o singură literă).

Limbă se numește *totalitatea cuvintelor formate cu un anumit alfabet.*

Codare sau cifrare (în înțeles restrîns) se numește *stabilirea unei corespondențe între o limbă și o altă limbă*, adică între cuvintele formate cu un alfabet și cuvintele formate cu un alt alfabet.

Decodare sau descifrare se numește *operația inversă codării.*

Sursă discretă fără memorie se numește *sursa la care probabilitatea de apariție a unui simbol nu depinde de simbolurile precedente*

$$p(x_i/x_{i-1}, x_{i-2}, \dots) = p(x_i)$$

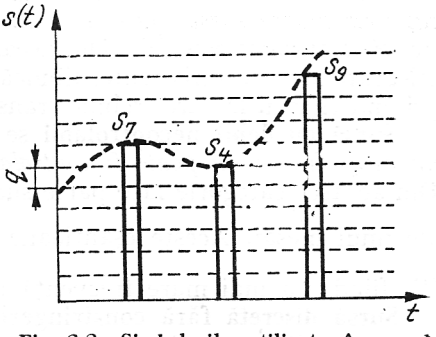


Fig. 2.2. Simbolurile utilizate în cazul unui mesaj eșantionat și cuantizat.

Sursă discretă cu memorie se numește *sursa la care probabilitatea de apariție a unui simbol depinde de simbolul precedent sau de un șir de simboluri anterioare, dacă sursa are o memorie mai mare.*

Sursă staționară se numește *sursa la care probabilitățile diferitelor simboluri nu depind de originea timpului, ci numai de poziția lor relativă.*

Mai exact, se poate spune că o sursă este staționară dacă:

$$P\{\xi_{t_k} = x_i\} = P\{\xi_{t_k+\tau} = x_i\} \quad \text{pt. } \forall\tau$$

adică proprietățile statistice ale sursei nu depind de originea timpului.

Sursă ergodică se numește *sursa staționară cu memorie finită la care toate șirurile de simboluri sînt șiruri tipice.* Se numește *șir tipic* al unei surse fără memorie șirul care conține $n_1 = np_1$ simboluri x_1, $n_2 = np_2$ simboluri x_2 ș.a.m.d., unde $n = \Sigma n_i$ este un număr foarte mare ce tinde spre infinit, iar p_i este probabilitatea de apariție a simbolului x_i. Mulțimea șirurilor tipice are o probabilitate diferită de zero și diferită de 1, tinzînd către 1 pe măsură ce n crește.

Mulțimea șirurilor netipice, adică acelea care au o altă compoziție decît $n_1 = np_1$, simboluri x_1, $n_2 = np_2$ simboluri x_2 ș.a.m.d., are o probabilitate ce tinde spre zero cînd n crește spre infinit.

Cu alte cuvinte, se poate spune că frecvențele diferitelor simboluri obținute din șiruri particulare vor tinde în probabilitate către o limită definită $p_1, p_2, \ldots, p_k$ independentă de șirul particular la care s-a făcut evaluarea, atunci cînd lungimea șirului tinde spre infinit. Limita în probabilitate trebuie interpretată în sensul că există șiruri pentru care afirmația de mai sus este falsă, însă probabilitatea acestui set de șiruri tinde spre zero.

La aceleași valori ale probabilităților simbolurilor se ajunge dacă se consideră o mulțime de n surse identice și la un moment dat se numără sursele care dau simbolul x_1 (în număr de n_1), cele care dau simbolul x_2 (în număr de n_2) ș.a.m.d. Frecvențele $\frac{n_1}{n}$, $\frac{n_2}{n}$, ... cînd $n \to \infty$ tind spre probabilitățile $p_1, p_2 \ldots$

Din cele de mai sus rezultă că ergodicitatea presupune identificarea valorilor medii de-a lungul unei secvențe realizate de o singură sursă, de-a lungul axei timpului, cu valorile medii obținute asupra ansamblului secvențelor de la cele n surse, la un moment dat.

În mod asemănător pot fi formate șiruri tipice și în cazul surselor cu memorie finită, luîndu-se în considerare grupurile de simboluri peste care se extinde memoria sursei.

Sursă cu debit controlabil se numește *sursa care generează mesaje la o indicație exterioară sursei, fără a exista constrîngeri interne privind timpul la care trebuie transmise mesajele.* Din această categorie face parte sursa unui sistem telegrafic de transmis texte, fiindcă în acest caz nu există nici o constrîngere privind timpul la care trebuie transmise literele succesive.

Sursă cu debit necontrolabil se numește *sursa care generează mesaje cu un debit fix ce nu poate fi controlat,* el fiind o proprietate internă a sursei. Din această categorie face parte sursa care generează eșantioanele cuantizate ale unui mesaj. Aceste eșantioane se succed la intervale fixe egale cu $\frac{1}{2W}$ (W fiind cea mai mare frecvență din spectrul mesajului).

Sursă discretă fără constrîngeri se numește *sursa staționară care nu are memorie,* adică sursa la care după un simbol poate să urmeze cu aceeași probabilitate orice simbol.

Sursă discretă cu constrîngeri fixe se numește *sursa la care unele simboluri nu pot fi utilizate decît în anumite condiții bine determinate.* Astfel, în codul Morse un punct sau o linie pot fi utilizate în orice poziție a șirului, însă intervalul între litere sau intervalul între cuvinte nu poate fi utilizat decît după un punct sau o linie (fig. 2.3).

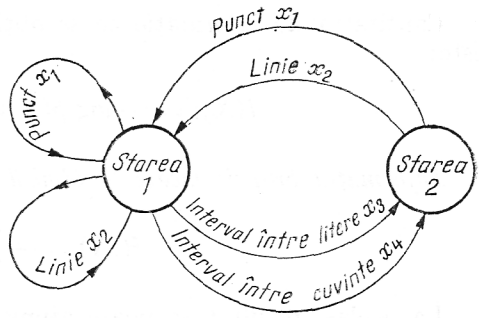


Fig. 2.3. Stările corespunzătoare codului Morse.

Constrîngerile fixe pot fi specificate definind un număr de stări pe care le poate avea sursa. Astfel, sursa care generează simbolurile codului Morse poate avea două stări. În starea 1 poate fi generat orice simbol; în starea 2 poate genera numai punct sau linie. Sursa va fi în starea 1 dacă ultimul simbol generat este punct sau linie. Sursa va fi în starea 2 dacă ultimul simbol generat este interval între litere sau interval între cuvinte.

După cum se vede din exemplul precedent, constrîngerile fixe specifică ce succesiuni sînt permise și ce succesiuni sînt interzise.

Sursa discretă cu constrîngeri probabilistice este o *sursă cu memorie.* Și în acest caz constrîngerile pot fi specificate prin stări. Într-o anumită stare sursa poate genera orice simbol cu o anumită probabilitate, care depinde de simbolurile generate precedent. În general se poate afirma că starea este o expresie a trecutului unui șir de simboluri și că acest trecut influențează prezentul și viitorul, modificînd probabilitățile simbolurilor.

2.3. Entropia

Se consideră o sursă staționară ergodică, fără memorie care are alfabetul:

$$[X] = [x_1 x_2 \dots x_n]$$

cu setul de probabilități:

$$[P_X] = [p_1 p_2 \dots p_n]$$

și care generează șirul tipic de lungime N:

$$[X_n] = [x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_N}] \quad \text{unde} \quad i_j = \overline{1, n}$$

Toate șirurile tipice au aceeași probabilitate:

$$p(X_n) = p_1^{N_1} p_2^{N_2} \dots p_n^{N_n} \tag{2.24}$$

unde $N_1, N_2, \dots, N_n$ reprezintă numărul de simboluri $x_1, x_2, \dots, x_n$ din șirul X_n

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = N \tag{2.25}$$

Pentru un N foarte mare se poate scrie:

$$N_i = N p_i \tag{2.26}$$

respectiv

$$p(X_n) = \left(p_1^{p_1} p_2^{p_2} \dots p_n^{p_n}\right)^N \tag{2.27}$$

Cantitatea de informație ce se obține cînd se realizează un șir tipic X_n este:

$$I(X_n) = -\log p(X_n) = -N\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \tag{2.28}$$

Informația proprie medie pe simbol se numește **entropie** și este egală cu:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \tag{2.29}$$

La același rezultat se poate ajunge pornind de la informația proprie a unui simbol (2.21):

$$i(x_i) = -\log p_i \tag{2.30}$$

și mediind pe toate simbolurile:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} i(x_i)\, p_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \tag{2.31}$$

Din cele precedente rezultă că *entropia $H(X)$ este egală cu incertitudinea medie apriori asupra evenimentelor $[X]$.*

- **Proprietățile entropiei**

Entropia are următoarele proprietăți:

1. *Continuitatea.* Entropia $H(X) = H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ este o funcție continuă în raport cu fiecare variabilă p_i în intervalul semiînchis $(0, 1]$ fiindcă este suma unor funcții continue (funcția logaritm).

2. *Simetria.* Entropia definită de relația (2.29) este evident o funcție simetrică în raport cu toate variabilele p_i.

3. *Aditivitatea.* Din modul în care a fost definită informația proprie rezultă că entropia este o funcție aditivă.

4. *Entropia $H(X)$ are valoarea maximă pentru $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$.*

Valoarea maximă a funcției:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \tag{2.32}$$

între variabilele căreia există legătura:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i - 1 = 0 \tag{2.33}$$

este aceeași cu valoarea maximă a funcției:

$$\Phi = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right) \tag{2.34}$$

unde λ este o constantă (multiplicatorul lui Lagrange), iar variabilele p_i sînt considerate independente.

Valorile p_i pentru care Φ este maxim se determină din condițiile:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = 0, \quad \text{pentru } i = \overline{1, n} \tag{2.35}$$

adică:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = -\log p_i - \log e + \lambda = 0 \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} = -\log p_j - \log e + \lambda = 0$$

de unde rezultă:

$$\log p_j = \log p_i \tag{2.37}$$

respectiv:

$$p_j = p_i$$

Deoarece indicele j ia toate valorile, rezultă că valoarea maximă a lui $H(X)$ are loc pentru

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n \tag{2.38}$$

Acest lucru rezultă și în mod intuitiv deoarece incertitudinea medie este cea mai mare dacă stările sistemului sînt egal probabile, în acest caz fiind cel mai greu de prezis care stare se va realiza.

Pentru exemplificare se consideră cazul particular cînd există numai două stări:

$$H(X) = H(p_1, p_2) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 \tag{2.39}$$

iar:

$$p_2 = 1 - p_1 \tag{2.40}$$

În fig. 2.4 este reprezentat $H(p_1, 1 - p_1)$ în funcție de p_1.

Dacă $p_1 = 0$ rezultă că $p_2 = 1$ deci $H(X) = 0$ deoarece se anulează ambii termeni. În acest caz incertitudinea apriori este nulă fiindcă se știe cu siguranță (probabilitatea unu) că se va realiza evenimentul x_2, în consecință informația este nulă. Același lucru se întîmplă dacă $p_2 = 0$, respectiv $p_1 = 1$. Incertitudinea este maximă, deci și informația este maximă cînd $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. În acest caz se obține unitatea de informație 1 bit.

- **Debitul de informație și redundanța sursei**

În unele cazuri este util ca noțiunea de informație să fie legată și de timp. În acest caz se definește **debitul de informație** (sau *viteza de informare*) al unei surse ca *produsul între entropia sursei* (valoarea medie a informației proprii pe simbol) *și numărul mediu de simboluri într-o secundă.*

Dacă durata medie a unui simbol este $\bar{\tau}$, debitul de informație al sursei este:

$$H_t(X) = \frac{H(X)}{\bar{\tau}} \tag{2.41}$$

și se exprimă în biți pe secundă.

Considerînd $\bar{\tau} = 1$, $H_t(X)$ și $H(X)$ devin numeric egale.

Pentru a indica cît de mult se îndepărtează entropia unei surse de valoarea ei maximă posibilă (cînd probabilitățile simbolurilor sînt egale între ele) se definește

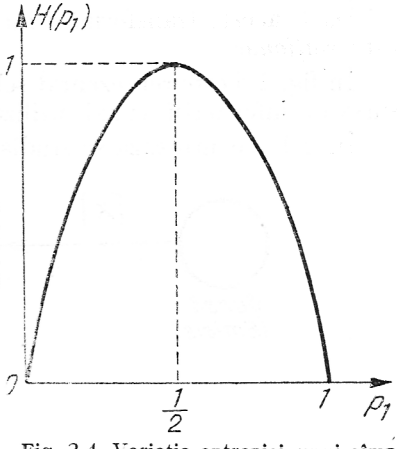


Fig. 2.4. Variația entropiei unui cîmp cu două evenimente.

redundanța ca fiind *diferența între valoarea maximă posibilă a entropiei sursei și valoarea ei reală:*

$$R_s = H_{Max}(X) - H(X) \tag{2.42}$$

Redundanța raportată la entropia maximă se numește **redundanță relativă:**

$$\rho_s = 1 - \frac{H(X)}{H_{Max}(X)} \tag{2.43}$$

unde:

$$H_{Max}(X) = \log n$$

n fiind numărul literelor din alfabetul sursei.

2.4. Canale discrete

Între sursa de informație și utilizare (observator) există un mediu prin care trebuie transmise informațiile.

Mediul, împreună cu aparatura necesară transmiterii, se numește *canal.* În această definiție sînt cuprinse și mediile cu memorie utilizate în calculatoare.

Canalul stabilește o transformare de la spațiul simbolurilor utilizate la la intrare, la spațiul simbolurilor la ieșire din canal.

Canalul se numește **discret** dacă *spațiul de la intrare și cel de la ieșire sînt discrete.*

Canalul se numește **continuu** dacă *spațiile de intrare și de ieșire sînt continue.* Dacă *unul din spații este continuu și celălalt discret,* **canalul** se numește **continuu-discret** (sau discret-continuu).

Dacă *transmiterea prin canal se face tot timpul* **canalul** se numește **continuu în timp.** Dacă *transmisiunea se face la momente de timp discrete* **canalul** se numește **discret în timp.**

Dacă transformarea de la simbolul x la intrare la simbolul y la ieșire nu depinde de transformările anterioare canalul nu are memorie.

Dacă aceste transformări nu depind de alegerea originei timpului, *canalul* este *staționar.*

În fig. 2.5 este reprezentat schematic un sistem de transmisiune format din sursa de informații, canal, utilizare și o sursă de perturbații.

În cele ce urmează se studiază canale discrete, staționare, fără memorie.

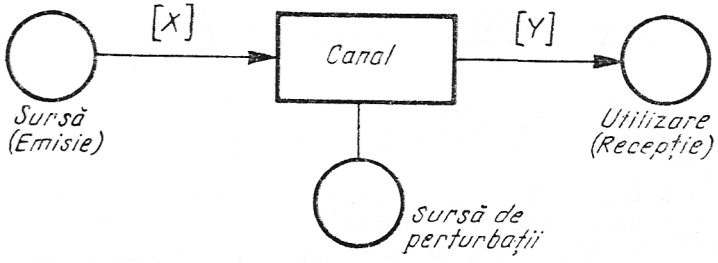


Fig. 2.5. Reprezentarea schematică a unui sistem de transmisiune.

2.4.1. Entropia la intrarea și ieșirea din canal

Se notează cu $[X]$ mulțimea tuturor simbolurilor pe care canalul poate să le transmită (adică pe care poate să le formeze aparatura acestuia).

Astfel, în cazul unui canal telegrafic cu cod Morse aparatura este destinată să transmită patru simboluri: x_1 (punct), x_2 (linie), x_3 (interval între litere) și x_4 (interval între cuvinte).

Presupunînd că sînt n simboluri, spațiul simbolurilor (alfabetul) la intrare în canal este:

$$[X] = [x_1 x_2, \ldots x_n] \tag{2.44}$$

Se presupune că fiecare simbol x_i este utilizat cu probabilitatea p_i:

$$[P_x] = [p(x_1)\, p(x_2) \ldots p(x_n)] \tag{2.45}$$

Probabilitățile $[P_x]$ nu sînt o proprietate a canalului, de ele depinde însă informația transmisă prin canal.

Valorile optime ale acestor probabilități și criteriile care definesc optimul vor fi studiate în cele ce urmează.

Mulțimea tuturor simbolurilor la ieșirea din canal este:

$$[Y] = [y_1 y_2 \ldots y_m] \tag{2.46}$$

probabilitățile simbolurilor fiind:

$$[p_y] = [p(y_1)\, p(y_2) \ldots p(y_m)] \tag{2.47}$$

Datorită efectului perturbațiilor, spațiul $[Y]$ poate să difere de spațiul $[X]$, precum și probabilitățile $[P_y]$ pot să fie diferite de probabilitățile de la intrare $[P_x]$.

Ținînd seama atît de spațiul de la intrare în canal $[X]$ cît și de spațiul de la ieșire din canal $[Y]$ se poate defini un spațiu produs $[X \cdot Y]$:

$$[X \cdot Y] = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_m \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

unde prin produsul x_iy_j s-a notat $x_i \cap y_j$, adică realizarea atît a evenimentului x_i cît și a evenimentului y_j.

Nu se face nici o ipoteză asupra independenței sau dependenței evenimentelor x_i și y_j.

Se presupune că matricei (2.48) îi corespunde matricea de probabilități:

$$[P(X, Y)] = \begin{bmatrix} p(x_1, y_1)\, p(x_1, y_2) \ldots p(x_1, y_m) \\ p(x_2, y_1)\, p(x_2, y_2) \ldots p(x_2, y_m) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ p(x_n, y_1)\, p(x_n, y_2) \ldots p(x_n, y_m) \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Din această matrice pot fi deduse probabilitățile:

$$p(x_i) = P\{x_iy_1 \cup x_iy_2 \cup \ldots \cup x_iy_m\}$$

de unde:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_iy_j) \tag{2.50}$$

sau:

$$p(y_j) = P\{x_1 y_j \cup \ldots \cup x_n y_j\}$$

de unde:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i y_j) \tag{2.51}$$

Din cele precedente se vede că în cazul canalelor discrete pot fi definite trei cîmpuri de evenimente:

— la intrarea în canal, prin relațiile (2.44) și (2.45);
— la ieșirea din canal, prin relațiile (2.46) și (2.47);
— cîmpul reunit intrare-ieșire, prin relațiile (2.48) și (2.49).

Fiecăruia dintre aceste cîmpuri îi corespunde o entropie și anume:

$H(X)$ este *entropia cîmpului de evenimente de la intrare*;
$H(Y)$ — *entropia cîmpului de evenimente de la ieșire*;
$H(X, Y)$ — *entropia cîmpului reunit intrare-ieșire.*

Expresiile acestor entropii sînt:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log p(x_i) \tag{2.52}$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j) \log p(y_j) \tag{2.53}$$

și

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(x_i y_j) \tag{2.54}$$

unde $H(X, Y)$ este entropia reunită, $H(X)$ este entropia lui X și $H(Y)$ este entropia lui Y.

2.4.2. Entropia condiționată

Dacă cîmpul de evenimente la ieșire din canal este cunoscut, datorită efectelor perturbațiilor rămîne totuși o oarecare incertitudine asupra cîmpului la intrare. *Valoarea medie a acestei incertitudini* se numește **entropia cîmpului X condiționată de cîmpul Y** și se notează cu $H(X/Y)$, ea *reprezintă o incertitudine reziduală medie.*

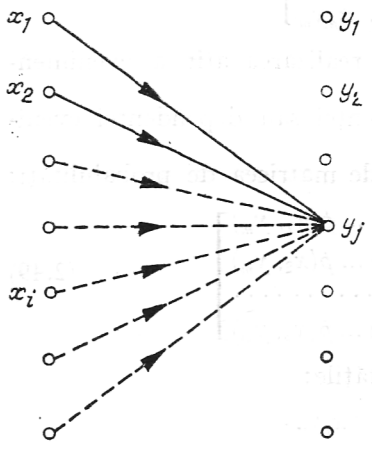


Fig. 2.6. Echivocul asupra simbolului de la intrare cînd se recepționează simbolul y_j.

Pentru determinarea entropiei condiționate $H(X/Y)$ se consideră următoarele: dacă la ieșirea din canal apare simbolul y_j, există o incertitudine asupra simbolului transmis la intrarea în canal. Acesta poate să fie x_1 sau x_2 sau oricare din simbolurile de la intrare (fig. 2.6).

Incertitudinea asupra realizării evenimentului x_i dacă s-a realizat y_j conform relațiilor (2.4) și (2.15) este:

$$U(x_i/y_j) = -\log p(x_i/y_j) \tag{2.55}$$

Valoarea medie a acestei incertitudini, respectiv entropia asociată cu recepționarea simbolului y_j este:

$$H(X/y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j)\, U\,(x_i/y_j) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j) \log p(x_i/y_j) \qquad (2.56)$$

Valoarea medie a acestei entropii pentru toate valorile posibile ale lui y_j este:

$$H(X/Y) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j)\, H(X/y_j) \qquad (2.57)$$

sau introducînd relația (2.56) în relația (2.57) se obține:

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(y_j)\, p(x_i/y_j) \log p(x_i/y_j), \qquad (2.58)$$

sau

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(x_i/y_j) \qquad (2.59)$$

Entropia $H(X/Y)$ se numește **echivocație** fiindcă este o *măsură a echivocului ce există asupra cîmpului de la intrare cînd se cunoaște cîmpul la ieșire.*

În mod analog se poate determina entropia cîmpului la ieșire dacă se cunoaște cîmpul la intrare:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(y_j/x_i) \qquad (2.60)$$

Entropia $H(Y/X)$ se numește **eroare medie** fiindcă este o *măsură a incertitudinii* (deci a erorii) *cîmpului de la ieșire cînd se cunoaște cîmpul de la intrare* (fig. 2.7).

Dacă canalul nu are perturbații, prin recepționarea simbolului y_j există certitudinea asupra simbolului transmis, să presupunem x_i. În acest caz $p(x_i/y_j) = 1$ și în consecință $H(X/Y) = 0$.

Deci în absența perturbațiilor are loc relația:

$$H(X/Y) = H(Y/X) = 0 \qquad (2.61)$$

Dacă canalul are perturbații foarte puternice încît cîmpul de la intrare este independent de cîmpul de la ieșire, adică $p(x_i/y_j) = p(x_i)$ și $p(y_j/x_i) = p(y_j)$ atunci din relațiile (2.59) și (2.60) se obține:

$$H(X/Y) = H(X) \qquad (2.62)$$

și

$$H(Y/X) = H(Y) \qquad (2.63)$$

Pentru determinarea entropiilor condiționate este necesar să se cunoască probabilitățile condiționate:

$$[P(X/Y)] = \begin{bmatrix} p(x_1/y_1)\, p(x_2/y_1) & \dots & p(x_n/y_1) \\ p(x_1/y_2)\, p(x_2/y_2) & \dots & p(x_n/y_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ p(x_1/y_m)\, p(x_2/y_m) & \dots & p(x_n/y_m) \end{bmatrix} \qquad (2.64)$$

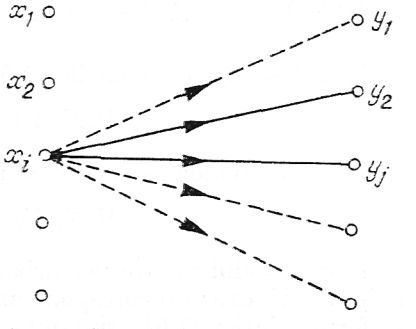


Fig. 2.7. Incertitudinea asupra cîmpului de la ieșire cînd se cunoaște cîmpul de la intrare.

și:

$$[P(Y/X)] = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1)\, p(y_2/x_1) \ldots p(y_m/x_1) \\ p(y_1/x_2)\, p(y_2/x_2) \ldots p(y_m/x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p(y_1/x_n)\, p(y_2/x_n) \ldots p(y_m/x_n) \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

care se pot calcula din matricea $P(X, Y)$ dată de relația (2.49).

2.4.3. Relații între diferite entropii

După cum s-a văzut, în legătură cu canalul au fost definite cinci matrice de probabilități:

$P(X)$ este matricea probabilităților alfabetului la intrare;
$P(Y)$ — matricea probabilităților alfabetului la ieșire;
$P(X, Y)$ — matricea probabilităților alfabetelor reunite intrare-ieșire;
$P(X/Y)$ — matricea probabilităților condiționate (intrare de ieșire);
$P(Y/X)$ — matricea probabilităților condiționate (ieșire de intrare).

Acestor matrice de probabilități le corespund cinci entropii și anume:

$H(X)$ este entropia alfabetului la intrarea în canal;
$H(Y)$ — entropia alfabetului la ieșirea din canal;
$H(X, Y)$ — entropia alfabetelor de la intrare și de la ieșire reunite;
$H(X/Y)$ — echivocația;
$H(Y/X)$ — eroarea medie.

Pentru a găsi relațiile între aceste entropii, se scrie relația (2.54) de definiție a entropiei cîmpurilor reunite:

$$H(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) \tag{2.66}$$

sau:

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(y_j/x_i) \tag{2.67}$$

sau:

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^{n} \log p(x_i) \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_i) \log p(y_j/x_i) \tag{2.68}$$

Ținînd seama de relațiile (2.50), (2.52) și (2.60) se obține:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y/X) \tag{2.69}$$

În mod analog se poate obține:

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X/Y) \tag{2.70}$$

Dacă canalul nu are perturbații, între alfabetul de intrare $[X]$ și alfabetul de ieșire $[Y]$ există o corespondență biunivocă iar eroarea medie și echivocația conform relației (2.61) sînt nule. În acest caz:

$$H(X, Y) = H(X) = H(Y). \tag{2.71}$$

Dacă canalul are perturbații foarte puternice conform relațiilor (2.62) și (2.63) se obține:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) \tag{2.72}$$

Relația (2.71) arată că în cazul canalelor fără zgomot incertitudinea asupra întregului sistem intrare-ieșire are o valoare mică dată de incertitudinea cîmpului de la intrare respectiv de la ieșire.

În cazul canalelor cu perturbații puternice, incertitudinea asupra întregului sistem crește pînă la valoarea dată de relația (2.72) cînd cîmpul de la ieșire devine independent de cîmpul de la intrare.

Între entropia $H(X)$ și entropia condiționată $H(X/Y)$ există următoarea relație:

$$H(X) \geqslant H(X/Y) \tag{2.73}$$

care rezultă din faptul că incertitudinea medie aposteriori este mai mică cel mult egală cu incertitudinea apriori.

Pentru aceleași motive:

$$H(Y) \geqslant H(Y/X) \tag{2.74}$$

Egalitatea are loc numai dacă X și Y sînt independente.

2.4.4. Transinformația

După cum s-a văzut informația obținută asupra evenimentului x_i cînd la ieșirea din canal se observă evenimentul y_j este conform relației (2.22):

$$i(x_i, y_j) = \log \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} \tag{2.75}$$

Aceasta este informația mutuală ce se obține asupra evenimentului x_i cînd se recepționează y_j.

În absența perturbațiilor recepționînd simbolul y_j se poate afirma cu certitudine că a fost transmis simbolul x_i deci:

$$p(x_i/y_j) = 1$$

iar relația (2.75) devine:

$$i(x_i; y_j) = -\log p(x_i)$$

adică informația mutuală este egală în cazul acesta cu informația proprie.

În cazul general din cauza zgomotelor $p(x_i/y_j) < 1$ și în consecință informația mutuală este mai mică decît informația proprie și este dată de expresiile:

$$i(x_i; y_j) = \log \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} = \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) \cdot p(y_j)} = \log \frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)} \tag{2.76}$$

Valoarea medie a informației mutuale se obține considerînd toate perechile posibile de simboluri intrare-ieșire $(x_i; y_j)$ împreună cu probabilitățile lor $p(x_i, y_j)$

$$I(X; Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} i(x_i; y_j)\, p(x_i, y_j) \tag{2.77}$$

Înlocuind relația (2.76) în relația (2.77) se obține:

$$I(X;\ Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i,\ y_j) \log \frac{p(x_i,\ y_j)}{p(x_i) \cdot p(y_j)} \tag{2.78}$$

sau

$$I(X;\ Y) = -\sum_{i=1}^{n} \log p(x_i) \sum_{j=1}^{m} p(x_i,\ y_j) - \sum_{j=1}^{m} \log p(y_j) \sum_{i=1}^{n} p(x_i,\ y_j) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i,\ y_j) \log p(x_i,\ y_j) \tag{2.79}$$

de unde:

$$I(X;\ Y) = H(X) + H(Y) - H(X,\ Y) \tag{2.80}$$

Ținînd seama de relația (2.69) și de relația (2.70) se obține:

$$I(X;\ Y) = H(X) - H(X/Y) \tag{2.81}$$

și

$$I(X;\ Y) = H(Y) - H(Y/X) \tag{2.82}$$

$I(X;\ Y)$ este valoarea medie a informației mutuale, adică a *informației ce se obține asupra alfabetului de la intrare prin recepționarea* (cunoașterea) *alfabetului de la ieșire* Y, cu alte cuvinte a informației transmise prin canal. Din această cauză ea se numește **transinformație.**

Deși informația mutuală individuală $i(x_i;\ y_j)$ poate deveni negativă valoarea medie $I(X;\ Y)$ este întotdeauna un număr nenegativ după cum rezultă din relațiile de definiție și din relațiile (2.73), (2.74), adică:

$$I(X;\ Y) \geqslant 0 \tag{2.83}$$

Dacă canalul nu are perturbații, după cum s-a văzut în conformitate cu relația (2.61) echivocația $H(X/Y)$ și eroarea medie $H(Y/X)$ sînt nule și relațiile (2.81) și (2.82) devin:

$$I(X;\ Y) = H(X) = H(Y) \tag{2.84}$$

adică transinformația a crescut.

Dacă canalul are perturbații foarte puternice încît cîmpul de la ieșire devine independent de cîmpul X de la intrare conform relațiilor (2.62) și (2.63) echivocația devine egală cu entropia cîmpului de la intrare, iar eroarea medie devine egală cu entropia cîmpului de la ieșire, astfel încît transinformația este nulă.

2.4.5. Capacitatea canalului discret, redundanță, eficiență

Pentru a defini o măsură a eficienței cu care se transmite informația și a găsi limita superioară a acesteia, Shannon a introdus noțiunea de capacitate a canalului.

Capacitatea canalului este definită ca fiind *valoarea maximă a transinformației:*

$$C = \max I(X;\ Y) = \max [H(X) - H(X/Y)] = \\ = \max [H(Y) - H(Y/X)] \tag{2.85}$$

Maximalizarea se face în raport cu setul de probabilități cu care se presupune că sînt utilizate simbolurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale canalului.

Valoarea maximă a transinformației are loc pentru anumite valori bine determinate ale acestor probabilități, care definesc în felul acesta o anumită sursă pe care o numim secundară.

Pentru a transmite prin canal transinformația cu valoarea maximă (capacitatea canalului) este necesar ca sursa primară să fie transformată (prin operația de codare) în sursă secundară specificată de probabilitățile care determină valoarea maximă din relația (2.85).

Această transformare se numește *adaptarea statistică* a sursei la canalul de comunicație.

Capacitatea canalului dată de relația (2.85) se măsoară în biți pe simbol.

Capacitatea canalului poate fi însă raportată și la timp.

În acest caz se definește:

$$C_t = \frac{C}{\bar{\tau}} = \frac{\max I(X;Y)}{\bar{\tau}} \tag{2.86}$$

unde $\bar{\tau}$ este durata medie a unui simbol iar $\frac{I(X;Y)}{\bar{\tau}}$ este transinformația pe unitatea de timp, respectiv debitul de transinformație:

$$I_t(X;Y) = \frac{I(X;Y)}{\bar{\tau}} \tag{2.87}$$

Capacitatea canalului definită de relația (2.86) se măsoară în biți pe secundă.

Dacă se face convenția ca $\bar{\tau} = 1$ atunci:

$$C_t = C \tag{2.88}$$

adică numeric cele două mărimi sînt egale. În unele relații care urmează nu se mai face deosebire între cele două definiții date capacității canalului putînd fi înțeleasă una sau alta după cum convine.

Redundanța canalului, prin analogie cu redundanța sursei, este definită ca fiind *diferența între capacitatea canalului și transinformație* (informația transmisă):

$$R_c = C - I(X;Y) \tag{2.89}$$

Redundanța relativă este egală cu redundanța împărțită la capacitatea canalului:

$$\varrho_c = 1 - \frac{I(X;Y)}{C} \tag{2.90}$$

Eficiența canalului este definită ca fiind *raportul între transinformație și capacitatea canalului:*

$$\eta_c = \frac{I(X;Y)}{C} \tag{2.91}$$

Din relațiile (2.90) și (2.91) rezultă:

$$\eta_c = 1 - \varrho_c \tag{2.92}$$

Din relația (2.85) rezultă:

$$\eta_c \leqslant 1 \tag{2.93}$$

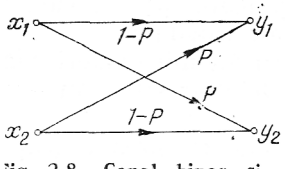


Fig. 2.8. Canal binar simetric.

Eficiența canalului *arată cît de mult se îndepărtează transinformația de valoarea ei maximă.*

● **Capacitatea canalului binar simetric.** Se numește **canal simetric,** *canalul la care probabilitatea de eronare a oricărui simbol este aceeași.* Un canal binar oarecare este caracterizat de matricea numită **matrice de zgomot:**

$$[P] = [P(Y/X)] = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

Canalul binar simetric este reprezentat prin graful din fig. 2.8.
Dacă canalul este simetric avem:

$$\begin{aligned} p(y_1/x_1) &= 1-p \qquad p(y_2/x_1) = p \\ p(y_1/x_2) &= p \qquad\quad p(y_2/x_2) = 1-p \end{aligned} \tag{2.95}$$

și matricea de zgomot devine:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

Capacitatea canalului este dată de relația:

$$C = \max I(X;\, Y) = \max [H(Y) - H(Y/X)] \tag{2.97}$$

Eroarea medie este:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i,\, y_j) \log p(y_j/x_i) \tag{2.98}$$

sau:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i)\, p(y_j/x_i) \log p(y_j/x_i) \tag{2.99}$$

Efectuînd însumările se obține:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\, [p(y_1/x_i) \log p(y_1/x_i) + p(y_2/x_i) \log p(y_2/x_i)]$$

$$\begin{aligned} H(Y/X) = &- p(x_1)\, p(y_1/x_1) \log p(y_1/x_1) - p(x_1)\, p(y_2/x_1) \log p(y_2/x_1) - \\ &- p(x_2)\, p(y_1/x_2) \log p(y_1/x_2) - p(x_2)\, p(y_2/x_2) \log p(y_2/x_2) = \\ = &- p(x_1)(1-p) \log (1-p) - p(x_1)\, p \log p - p(x_2)\, p \log p - \\ &- p(x_2)\, (1-p) \log (1-p) \end{aligned}$$

$$H(Y/X) = -[p(x_1) + p(x_2)] \cdot [p \log p + (1-p) \log (1-p)]$$

$$H(Y/X) = -[p \log p + (1-p) \log (1-p)] \tag{2.100}$$

Se observă că **eroarea medie** $H(Y/X)$ este o mărime constantă care *depinde numai de zgomotul de canal și nu de probabilitățile de utilizare a simbolurilor.* Această proprietate este generală *pentru toate canalele simetrice.*

Ținînd seama de cele precedente capacitatea canalului binar simetric este:

$$C = \max H(Y) + p \log p + (1 - p) \log (1 - p) \tag{2.101}$$

iar $\max H(Y) = 1$ pentru $p(y_1) = p(y_2)$.

Din simetria canalului rezultă că dacă $p(y_1)=p(y_2)$ atunci și $p(x_1)=p(x_2)$.

Deci *valoarea maximă a transinformației se obține cînd simbolurile de la intrare* x_1 *și* x_2 *sînt utilizate cu aceeași probabilitate* și valoarea ei este:

$$C = 1 + p \log p + (1 - p) \log (1 - p) \tag{2.102}$$

În absența perturbațiilor $p = 0$ și $C = 1$.

Dacă perturbațiile sînt foarte puternice, respectiv $p = \frac{1}{2}$, atunci $C = 0$.

Acest lucru se explică prin faptul că un simbol de ieșire, de exemplu y_1, poate proveni cu aceeași probabilitate atît din x_1 cît și din x_2, cu alte cuvinte recepționarea lui nu modifică cunoștințele noastre apriori asupra simbolului aplicat la intrare.

CAPITOLUL 3

MĂSURA INFORMAȚIEI ÎN SEMNALELE CONTINUE

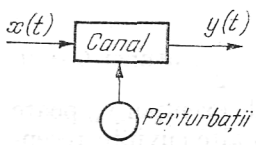


Fig. 3.1. Canal continuu.

Se consideră canalul continuu cu perturbații din fig. 3.1 la intrarea căruia se aplică semnalul $x(t)$ și la ieșire se obține semnalul $y(t)$ care datorită perturbațiilor este diferit de $x(t)$.

Ne propunem în cele ce urmează să determinăm transinformația canalului continuu în cazul în care eșantioanele semnalului $x(t)$ sînt variabile aleatoare independente. Lectura acestui capitol necesită unele cunoștințe expuse în capitolul privind semnalele aleatoare.

În acest caz este suficient să calculăm transinformația pe o pereche de eșantioane intrare-ieșire și valoarea obținută să o înmulțim cu numărul total de eșantioane din intervalul de timp în care se transmite semnalul (se presupune că eșantioanele sînt independente și că proprietățile statistice ale semnalului nu depind de originea timpului).

Pentru a putea folosi rezultatele obținute în cazul discret, considerăm pentru început că eșantioanele sînt cuantizate cu cuante de valoare q.

În acest caz avem de-a face cu semnale discrete pentru care este valabilă relația (2.78). Făcînd pe $q \to 0$ obținem rezultatul dorit pentru cazul continuu.

3.1. Transinformația în canale continue

Notăm cu $n+1$ și $m+1$ numărul maxim de cuante ale eșantionului $x(kT)$ respectiv al eșantionului corespunzător la ieșire $y(KT)$. În acest caz, conform cu (2.78) scrisă sub formă modificată, transinformația va fi:

$$I(X;Y) = \sum_{i=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)\, p(y_j)} \tag{3.1}$$

unde x_i și y_j sînt valorile cuantizate ale eșantioanelor $x_i = iq_x$ și respectiv $y_j = jq_y$, (pentru generalitate s-au ales cuante diferite la intrare și ieșire din canal).

Probabilitățile care intervin în (3.1) sînt:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= P\{\xi = x_i\} \\ p(y_j) &= P\{\eta = y_j\} \\ p(x_i, y_j) &= P\{\xi = x_i;\ \eta = y_j\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

unde cu ξ și η s-au notat variabilele aleatoare (respectiv eșantioanele) la intrare și ieșire.

În cazul în care cuantele tind spre zero variabilele aleatoare ξ și η devin continue și au densitățile de probabilitate care satisfac

$$\begin{aligned} w(x)\,dx &= P\{x < \xi \leqslant x + dx\} \\ w(y)\,dy &= P\{y < \eta \leqslant y + dy\} \\ w(x, y)\,dx\,dy &= P\{x < \xi \leqslant x + dx;\ y < \eta \leqslant y + dy\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Setul de probabilități (3.2) poate fi scris sub forma (considerînd cuantele foarte mici):

$$\begin{aligned} p(x_i) &\cong w(x_i)\, q_x \\ p(y_j) &\cong w(y_j)\, q_y \\ p(x_i, y_j) &\cong w(x_i, y_j)\, q_x q_y \end{aligned} \tag{3.4}$$

Introducînd (3.4) în (3.1) se obține:

$$I(X;\ Y) = \sum_{i=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} w(x_i,\ y_j)\, q_x q_y \log \frac{w(x_i,\ y_j)}{w(x_i)\, w(y_j)} \tag{3.5}$$

Dacă facem: $q_x \to dx$, $q_y \to dy$ atunci variabila discretă x_i tinde spre variabila continuă x, variabila y_j spre y iar sumele se transformă în integrale:

$$I(X;\ Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,\ y) \log \frac{w(x,\ y)}{w(x)\, w(y)}\, dx\, dy \tag{3.6}$$

Relația (3.6) poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{aligned} I(X;\ Y) = &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,\ y) \log w(x,\ y)\, dx\, dy - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} \log w(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,\ y)\, dy - \int_{-\infty}^{+\infty} \log w(y)\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,\ y)\, dx \\ I(X;\ Y) = &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,\ y) \log w(x,\ y)\, dx\, dy - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \log w(x)\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} w(y) \log w(y)\, dy \end{aligned} \tag{3.7}$$

Prin analogie cu relațiile (2.52), (2.53) și (2.54) notăm:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \log w(x)\, dx \tag{3.8}$$

$$H(Y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} w(y) \log w(y)\, dy \tag{3.9}$$

$$H(X;\ Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,\ y) \log w(x,\ y)\, dx\, dy \tag{3.10}$$

În mod analog se pot defini entropiile condiționate:

$$H(X/Y) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) \log w(x/y)\, dx\, dy \tag{3.11}$$

$$H(Y/X) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) \log w(y/x)\, dx\, dy \tag{3.12}$$

Spre deosebire de cazul discret, entropiile $H(X)$ și $H(Y)$ nu mai pot fi interpretate ca fiind valori medii ale informației, deoarece cantitatea de informație într-un semnal continuu este infinită (numărul de stări posibile este infinit) pe cînd integralele (3.8) și (3.9) sînt în general finite.

Definițiile precedente sînt utile fiindcă ne dau posibilitatea să exprimăm transinformația prin relații asemănătoare cu acelea din cazul discret, respectiv relația (3.7) poate fi scrisă

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X; Y) \tag{3.13}$$

Dacă în (3.7) punem $w(x, y) = w(x)\, w(y/x)$ sau $w(x, y) = w(y)\, w(x/y)$ se obține în mod analog cazului discret:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X) \tag{3.14}$$

Transinformația astfel obținută este transinformația pe un eșantion (respectiv pe grad de libertate). Dacă semnalul este format din N eșantioane independente transinformația ar fi

$$I_N(X; Y) = N\, I(X; Y) \tag{3.15}$$

unde: $N = 2WD$ (W este cea mai înaltă frecvență din spectrul semnalului, iar D este durata semnalului).

3.2. Capacitatea canalului continuu

Capacitatea canalului continuu este definită ca fiind *valoarea maximă a transinformației pe unitatea de timp, în funcție de densitatea de probabilitate a semnalului aplicat la intrare*

$$C = \lim_{D\to\infty} \max \frac{1}{D} I_N(X; Y) \tag{3.16}$$

Ținînd seama de (3.15) avem:

$$C = \max_{w(x)} 2W\, I(X; Y) \tag{3.17}$$

unde $I(X; Y)$ este dat de relația (3.14), iar maximizarea se face ținînd seama de constrîngerile introduse de canal, cum ar fi limitarea puterii medii în canal.

Ca și în cazul discret, pentru determinarea capacității canalului este mai comod să se facă apel la entropiile la ieșirea din canal:

$$\max I(X; Y) = \max_{w(y)} [H(Y) - H(Y/X)] \tag{3.18}$$

unde după găsirea lui $w(y)$ care maximizează transinformația trebuie găsită densitatea la intrare $w(x)$ care face ca la ieșire să se obțină acest $w(y)$. Pentru

a evita soluționarea unor ecuații integrale complicate, se vor face unele considerații de ordin general, aproximative, care vor duce la găsirea expresiei capacității canalului continuu.

Presupunînd canalul simetric se poate afirma (ca și la canalul discret) că în cazul perturbațiilor aditive:

$$y(t) = x(t) + n(t) \tag{3.19}$$

unde $n(t)$ este zgomotul din canal și în cazul limitării puterii P_x a semnalului, eroarea medie nu va depinde decît de puterea N a zgomotului. În acest caz, entropia condiționată $H(Y/X)$ nu depinde de $w(x)$, deci:

$$\max I(X; Y) = \max H(Y) - H(Y/X) \tag{3.20}$$

Ținînd seama că semnalul și zgomotul sînt procese independente avem:

$$P_y = P_x + N \tag{3.21}$$

Dacă q_y este cuanta de semnal la ieșirea din canal numărul de nivele de cuantizare este

$$m = \frac{\sqrt{P_y}}{q_y} \tag{3.22}$$

Considerînd că aceste m nivele de semnal sînt egal probabile, $H(Y)$ are valoarea maximă:

$$\max H(Y) = \log m = \log \frac{\sqrt{P_y}}{q_y} \tag{3.23}$$

Pentru o valoare fixă a semnalului la intrare $x(t_0) = x_0$, între $y(t)$ și $n(t)$ se stabilește o corespondență biunivocă, respectiv incertitudinea asupra ieșirii este dată numai de zgomot. Măsura acestei incertitudini este $H(Y/X)$. Numărul de nivele pe care poate să le ia zgomotul cuantizat la ieșire este:

$$K = \frac{\sqrt{N}}{q_y} \tag{3.24}$$

Considerînd aceste nivele ca fiind egal probabile se obține

$$H(Y/X) = \log K = \log \frac{\sqrt{N}}{q_y} \tag{3.25}$$

Înlocuind (3.23) și (3.25) în (3.20) se obține

$$\max I(X; Y) = \log \frac{\sqrt{P_y}}{q_y} - \log \frac{\sqrt{N}}{q_y} = \log \frac{\sqrt{P_y}}{\sqrt{N}} \tag{3.26}$$

Introducînd (3.26) în (3.17) și ținînd seama de (3.21) se obține

$$C = 2W \log \frac{\sqrt{P_x + N}}{\sqrt{N}}$$

sau

$$C = W \log \left(1 + \frac{P_x}{N}\right) \tag{3.27}$$

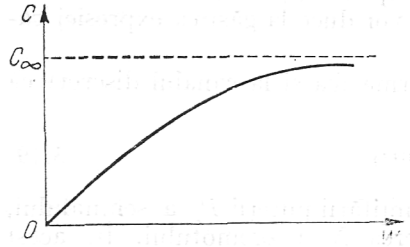


Fig. 3.2. Variația capacității unui canal cu lărgimea de bandă.

Din această relație rezultă: **capacitatea canalului** *crește cu lărgimea de bandă* W *și cu puterea semnalului* P_x *și scade cu puterea zgomotului.* Capacitatea astfel determinată se măsoară în biți pe secundă.

Dacă canalul are zgomot alb cu o densitate spectrală de putere N_0 atunci:

$$N = WN_0 \tag{3.28}$$

și (3.27) devine:

$$C = W \log\left(1 + \frac{P_x}{WN_0}\right) \tag{3.29}$$

Variația capacității canalului în funcție de lărgimea de bandă este dată în fig. 3.2.

Pentru valori mari ale lui W, capacitatea canalului se apropie lent de limita:

$$C_\infty = \lim_{W\to\infty} W \log\left(1 + \frac{P_x}{WN_0}\right) = \frac{P_x}{N_0} \log e \tag{3.30}$$

Din cele precedente rezultă că *creșterea lărgimii de bandă peste o anumită valoare nu mai este rațională deoarece capacitatea canalului crește foarte puțin.*

3.3. Variația entropiei cu schimbarea coordonatelor

Să considerăm semnalul $x(t)$ ca fiind un punct sau un vector $\vec{x}$ într-un spațiu $\vec{X}$. Se dă o transformare biunivocă ψ a spațiului $\vec{X}$ în alt spațiu notat cu $\vec{U}$, respectiv semnalul $x(t) = \vec{x}$ este transformat într-un alt semnal $u(t) = \vec{u}$.

Se cunoaște entropia $H(\vec{X})$ și se pune problema determinării entropiei $H(\vec{u})$.

Transformarea ψ fiind biunivocă se poate afirma că probabilitatea ca punctul $\vec{x}$ (vîrful vectorului $\vec{x}$) să se găsească în domeniul dX este aceeași cu probabilitatea ca punctul $\vec{u}$ să se găsească în domeniul dU care-i corespunde lui dX prin transformarea ψ. Astfel avem:

$$w(\vec{x})\, dX = q(\vec{u})\, dU \tag{3.31}$$

unde $w(x)$ este densitatea de probabilitate multidimensională a semnalului $x(t)$ în spațiul $\vec{X}$, iar $q(\vec{u})$ este densitatea multidimensională a semnalului $u(t)$ în spațiul $\vec{U}$. Din (3.31) rezultă

$$w(\vec{x}) = q(\vec{u}) \left|\frac{dU}{dX}\right| \tag{3.32}$$

unde

$$\left|\frac{dU}{dX}\right| = \left|J\left(\frac{U}{X}\right)\right| \tag{3.33}$$

este jacobianul transformării ψ din spațiul $\vec{X}$ în spațiul $\vec{U}$.

Generalizînd relația (3.8) pentru un număr n de dimensiuni (presupunem că $x(t)$ este limitat atît în frecvență cît și în durată, deci poate fi reprezentat într-un spațiu cu un număr finit de dimensiuni) se obține:

$$H(\vec{X}) = -\int_X w(\vec{x}) \log w(\vec{x})\, dX \tag{3.34}$$

sau ținînd seama de (3.32) se poate scrie:

$$H(\vec{X}) = -\int_X w(\vec{x}) \log \left[q(\vec{u})\, J\left(\frac{U}{X}\right)\right] dX \tag{3.35}$$

sau

$$H(\vec{X}) = -\int_X w(\vec{x}) \log \left| J\left(\frac{U}{X}\right)\right| dX - \int_X w(\vec{x}) \log q(\vec{u})\, dX \tag{3.36}$$

ori

$$\int_X w(\vec{x})\, dX \log q(\vec{u}) = \int_U q(\vec{u})\, dU \log q(\vec{u}) = -H(\vec{U}) \tag{3.37}$$

Din relațiile precedente rezultă:

$$H(\vec{U}) = H(\vec{X}) + \int_X w(\vec{x}) \log \left| J\left(\frac{U}{X}\right)\right| dX \tag{3.38}$$

Din această relație se vede că *în cazul continuu entropia depinde de sistemul de coordonate ales pentru reprezentarea semnalului.*

Pentru transformările ortogonale:

$$J\left(\frac{U}{X}\right) = 1 \tag{3.39}$$

iar

$$H(\vec{U}) = H(\vec{X}) \tag{3.40}$$

Faptul că entropia este un invariant în cazul transformărilor ortogonale, face ca acestea să-și găsească aplicații în domeniul prelucrării semnalelor și în special în domeniul compresiei de date.

CAPITOLUL 4

CODAREA SURSELOR PENTRU CANALE FĂRĂ PERTURBAȚII

În general alfabetul sursei diferă de alfabetul canalului și ca urmare primul obiectiv al codării surselor este acela de a trece de la alfabetul sursei la alfabetul canalului. Mai mult decît atît, dorim ca transinformația să fie maximă, (pentru a atinge eficiența maximă) și în acest scop prin codare trebuie să asigurăm ca sursa secundară — definită ca ieșirea din decodor — să genereze simbolurile cu probabilitățile care asigură acest maxim (capacitatea canalului). Dacă am realizat acest lucru spunem că am făcut adaptarea statistică a sursei la canal.

În cazul canalelor fără perturbații acest obiectiv se atinge cînd sursa secundară este o sursă de entropie maximă:

$$C = \max H(X) = \log D \tag{4.1}$$

unde D este numărul de simboluri din alfabetul canalului (respectiv al codului). Relația (4.1) derivă din relația (2.85) cînd $H(X/Y) = 0$.

Deci **obiectivul codării** surselor este de a *transforma o sursă dată, cu un set de probabilități determinat* pe care o numim *sursă primară, într-o sursă de entropie maximă*. Cu alte cuvinte, *prin codare se caută să se anuleze redundanța sursei*.

Reducerea redundanței se face în scopul măririi eficienței (mărime care va fi definită în cele ce urmează) în cazul ideal al unui canal fără perturbații. Pentru canalele reale, așa cum se va vedea în cap. 5 se introduce o redundanță pentru a asigura o anumită protecție împotriva perturbațiilor. Cu cît perturbațiile sînt mai mari cu atît redundanța introdusă va fi mai mare.

În prezentul capitol se va considera că sursele au debit controlabil și că nu au memorie.

4.1. Coduri unic decodabile

Fie o sursă discretă, fără memorie, furnizînd simboluri dintr-o mulțime $[S]$ numită alfabetul sursei:

$$[S] = [s_1 s_2, \ldots s_N] \tag{4.2}$$

avînd probabilitățile

$$[P] = [p(s_1)\ p(s_2) \ldots p(s_N)] \tag{4.3}$$

Fie $[X]$ alfabetul finit al codului (respectiv al canalului):

$$[X] = [x_1 x_2 \ldots x_D] \tag{4.4}$$

Cu aceste litere se formează un număr N de cuvinte de cod:

$$[C] = [c_1 c_2 \ldots c_N] \tag{4.5}$$

Cuvintele de cod sînt succesiuni finite de litere din alfabetul $[X]$.

Codarea este stabilirea unei corespondențe biunivoce între simbolurile $s_k \in S$ și cuvintele $c_k \in C$.

Totalitatea cuvintelor c_k formează un **cod.**

Cu alfabetul $[X]$ pot fi formate cuvinte cărora să nu le corespundă simboluri din alfabetul sursei. Acestea se numesc cuvinte fără sens.

Cuvintele cărora le corespund simboluri din alfabetul sursei se numesc cuvinte cu sens sau cuvinte de cod.

Prin alegerea convenabilă a cuvintelor de cod se poate ajunge la rezultatul că fiecărei succesiuni de cuvinte de cod să-i corespundă o singură succesiune de litere (cuvinte) ale sursei. În acest caz codul se numește *unic decodabil.*

Dacă un cod unic decodabil nu utilizează semne de demarcare între cuvinte, el se numește *separabil.*

Exemple de coduri unic decodabile sînt date în tabelul 4.1.

TABELUL 4.1

Exemple de coduri unic decodabile

Mesaje s_k	Codul *A*	Codul *B*	Codul *C*	Codul *D*
s_1	00	0	0	0
s_2	01	10	01	10
s_3	10	110	011	110
s_4	11	1110	0111	111

Codul *A* avînd aceeași lungime a cuvintelor este cel mai simplu tip de cod unic decodabil.

Codul *B* este unic decodabil fiindcă are un simbol (0) care indică sfîrșitul fiecărui cuvînt.

Codul *C* este unic decodabil fiindcă are un simbol (0) care indică începutul fiecărui cuvînt.

Codul *D* este unic decodabil pentru motivele ce se vor arăta în cele ce urmează.

● **Coduri instantanee.** Între codurile *B* și *C* din tabelul 4.1 există o diferență importantă: la codul *B*, pe măsură ce se recepționează succesiunea de litere din alfabetul codului, se pot determina cuvintele codului fără referință la literele următoare.

Astfel:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 10 & 110 & 0 & 1110 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_1 & s_4 & s_1 \end{array}$$

adică, dacă succesiunea de litere din alfabetul codului formează un cuvînt din vocabularul codului (căruia îi corespunde un simbol al sursei) acesta este unic fiindcă *prin adăugarea unor litere la un cuvînt de cod nu se poate obține un nou cuvînt.* Un astfel de *cod* se numește *instantaneu.*

Codul *C* nu este instantaneu, fiindcă pentru decodare este necesar ca după recepționarea unui cuvînt din vocabularul codului să se recepționeze și cîteva din literele care urmează pentru a putea decide care cuvînt a fost transmis.

Astfel dacă se recepționează șirul:

0100110001011

prin recepționarea lui „0" nu se poate lua nici o decizie fiindcă în afară de simbolul s_1 ar putea să fie și simbolul s_2 sau s_3 sau s_4 și din această cauză decodarea trebuie să întîrzie pînă se recepționează și literele următoare adică „1" și „0". Abia după apariția lui „0" este sigur că singura interpretare posibilă este 01, adică s_2 și așa mai departe.

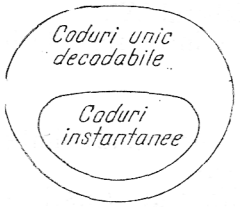


Fig. 4.1. Relația dintre codurile instantanee și codurile unic decodabile.

Din cele precedente rezultă că un cod instantaneu trebuie să fie construit astfel încît nici un cuvînt de cod să nu poată fi obținut din altul mai scurt prin adăugarea de litere din alfabetul codului.

Definiție: Fie $[c_i] = [x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}]$ *un cuvînt din vocabularul unui cod. Șirul de litere* $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, *unde* $k < m$, *se numește prefixul cuvîntului* c_i.

Cu ajutorul acestei definiții se poate afirma:

Condiția necesară și suficientă ca un cod să fie instantaneu este ca nici un cuvînt al codului să nu fie un prefix al unui alt cuvînt de cod.

Codul instantaneu astfel definit se spune că are proprietatea de prefix sau că este ireductibil. Un cod instantaneu este unic decodabil (descifrabil) — reciproca nu este însă întotdeauna adevărată. În fig. 4.1 se ilustrează relația dintre aceste două categorii de coduri.

Codurile binare instantanee pot fi construite cu ușurință după următorul **algoritm**:

1° Mulțimea $[S]$ a mesajelor sursei se împarte în două submulțimi S_0 și S_1 astfel:

$$\underbrace{s_1, s_2, \dots, s_k}_{S_0}, \quad \underbrace{s_{k+1}, \dots, s_N}_{S_1}$$

Se atribuie litera „0" tuturor mesajelor din S_0 și litera „1" tuturor mesajelor din S_1.

2° Se continuă aceeași operație pentru S_0 și S_1 divizîndu-le în S_{00} și S_{01}, respectiv S_{10} și S_{11}. Se atribuie fiecărei mulțimi litera 0 sau 1, astfel că mesajele din S_{00} vor avea la începutul cuvîntului 00 iar cele din S_{01} vor avea 01 ș.a.m.d.

3° Operația de mai sus se continuă pînă cînd în fiecare submulțime rămîne un singur element s_j căruia îi va corespunde un cuvînt de cod.

Operația poate fi reprezentată prin graful din fig. 4.2.

Codul astfel format este *ireductibil* fiindcă un cuvînt oarecare al codului nu poate fi format prin adăugarea uneia sau a mai multor litere (0 sau 1) altui cuvînt sau, altfel spus, *nici un cuvînt al codului nu este prefixul altui cuvînt de cod*. Aceasta, din cauză că numai capetele terminale reprezintă cuvinte de cod, ramificațiile reprezentînd prefixe. Dacă și ramificațiile ar reprezenta cuvinte, atunci evident codul nu ar mai fi ireductibil căci un cuvînt de cod ar fi prefixul altui cuvînt de cod.

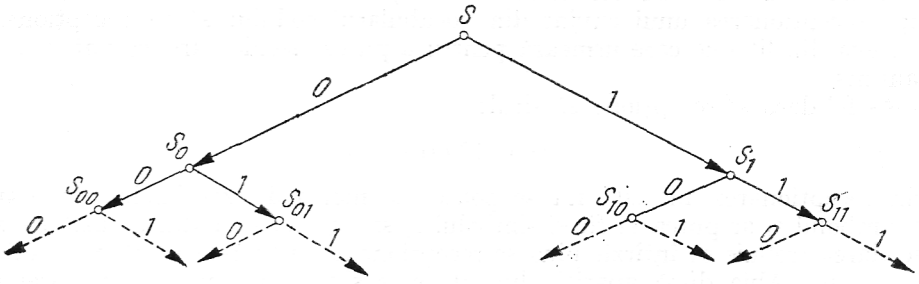


Fig. 4.2. Reprezentarea operației de codare printr-un graf arborescent.

După modul cum se aleg mulțimile S_0 și S_1 și submulțimile respective se obțin diferite coduri. Criteriile de comparație ale acestora și alegerea unei diviziuni optime într-un anumit sens este o problemă ce se va discuta în unul din paragrafele următoare.

4.2. Lungimea medie a unui cuvînt de cod

În general prin codare se urmărește mărirea „eficienței" transmisiunii informației. În cele ce urmează se va defini noțiunea de eficiență. În cazul canalelor fără zgomot se spune că se mărește eficiența referindu-se în general la minimizarea unei anumite *funcții de cost.*

Una din cele mai simple funcții de cost se obține dacă fiecărui cuvînt c_i i se asociază un anumit coeficient de cost t_i. Coeficientul de cost t_i în particular poate să fie durata cuvîntului c_i în conformitate cu faptul că prețul exploatării unui sistem de transmisiune poate fi considerat aproximativ liniar crescător cu timpul.

În acest caz costul mediu pe mesaj devine

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^{N} t_i p(c_i) = \sum_{i=1}^{N} t_i p(s_i) \tag{4.6}$$

Evident, cea mai eficientă transmisie este aceea care minimizează costul mediu $\bar{C}$.

După cum rezultă din relația (4.6) costul mediu în cazul considerat este egal cu durata medie a unui cuvînt de cod.

Dacă toate literele x_i din alfabetul $[X]$ al codului au aceeași durată τ, care, fără a restrînge generalitatea problemei, se poate considera egală cu unitatea ($\tau = 1$), atunci

$$t_i = l_i \tau = l_i$$

adică durata unui cuvînt este egală cu numărul de litere care formează acel cuvînt.

Costul mediu în acest caz devine:

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^{N} p(s_i)\, l_i = \bar{l} \tag{4.7}$$

adică *costul mediu este egal cu lungimea medie a unui cuvînt.*

Mărirea eficienței transmisiunii se poate obține atribuind în mod convenabil fiecărui mesaj s_i dat de sursă un cuvînt de cod c_i în care numărul literelor l_i să fie astfel ales încît *lungimea medie* $\bar{l}$ *a unui cuvînt să fie cît mai mică.*

Eficiența transmisiunii poate fi definită numai dacă se cunoaște marginea inferioară a lui $\bar{l}$. Dacă o asemenea margine inferioară nu există, pe baza celor precedente nu se poate defini eficiența transmisiunii.

● **Limita inferioară a lungimii medii a unui cuvînt de cod.** Fie o sursă caracterizată de mulțimea mesajelor:

$$[S] = [s_1 s_2, \ldots s_N] \tag{4.8}$$

avînd probabilitățile:

$$[P] = [p(s_1)\, p(s_2) \ldots p(s_N)] \tag{4.9}$$

Fie cuvintele codului

$$[C] = [c_1 c_2 \dots c_N] \tag{4.10}$$

care apar cu aceleași probabilități ca și mesajele sursei, adică:

$$[P_C] = [P] = [p_1 p_2 \dots p_N] \tag{4.11}$$

unde

$$p_i = p(s_i)$$

Lungimile cuvintelor de cod sînt:

$$[L] = [l_1 l_2 \dots l_N] \tag{4.12}$$

unde l_i este egal cu numărul de litere din alfabetul codului care compun cuvîntul c_i (presupuse de aceeași durată $\tau = 1$).

Alfabetul codului este:

$$[X] = [x_1 x_2 \dots x_D] \tag{4.13}$$

Entropia sursei este:

$$H(S) = H(C) = -\sum_{i=1}^{N} p(s_i) \log p(s_i) \tag{4.14}$$

unde $H(C)$ este entropia cuvintelor codului $[C]$.

Entropia alfabetului codului $[X]$ este

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{D} p(x_i) \log p(x_i) \tag{4.15}$$

Informația medie pe un cuvînt de cod este dată de produsul dintre numărul mediu de litere $\bar{l}$ și informația medie pe literă $H(X)$, deci:

$$H(S) = H(C) = \bar{l}\, H(X) \tag{4.16}$$

Valoarea maximă a entropiei $H(X)$ se obține atunci cînd probabilitățile $p(x_i)$ sînt egale, adică:

$$p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_D) = \frac{1}{D}$$

Această valoare este $\log D$, deci:

$$H(X) \leqslant \log D \tag{4.17}$$

Ținînd seama de această inegalitate, relația (4.16) devine:

$$H(S) = H(C) = \bar{l}\, H(X) \leqslant \bar{l} \log D, \tag{4.18}$$

de unde:

$$\bar{l} \geqslant \frac{H(S)}{\log D} = \bar{l}_{min} \tag{4.19}$$

Relația (4.19) arată că lungimea medie $\bar{l}$ a unui cuvînt de cod are o margine inferioară egală cu entropia sursei împărțită la valoarea maximă a entropiei alfabetului codului, sau că *informația medie pe o literă din alfabetul codului* $\frac{H(S)}{\bar{l}}$ *nu poate fi mai mare decît valoarea maximă a entropiei alfabetului codului* $\log D$.

$$\frac{H(S)}{\bar{l}} \leqslant \log D \tag{4.20}$$

4.3. Capacitatea, eficiența și redundanța codului

Se numește **capacitatea codului** *valoarea maximă a entropiei alfabetului codului:*

$$C = \max H(X) = \log D \tag{4.21}$$

Ținînd seama de cele precedente se poate defini **eficiența codului** (codării) ca fiind *raportul dintre lungimea medie minimă și lungimea medie a unui cuvînt de cod:*

$$\eta_l = \frac{\bar{l}_{min}}{\bar{l}} \tag{4.22}$$

Așa cum s-a arătat, marginea inferioară a lungimii unui cuvînt de cod este:

$$\bar{l}^{min} = \frac{H(S)}{\log D} = \frac{H(S)}{C} \tag{4.23}$$

iar lungimea medie a unui cuvînt de cod este:

$$\bar{l} = \frac{H(S)}{H(X)} \tag{4.24}$$

Din relațiile (4.22) și (4.23) rezultă:

$$\eta_l = \frac{H(S)}{\bar{l} \log D} \tag{4.25}$$

sau ținînd seama de relația (4.24) se obține:

$$\eta_l = \frac{H(X)}{\log D} \tag{4.26}$$

Se numește **redundanța codului** *mărimea complementară eficienței.* Ea este definită de relația:

$$\rho = 1 - \eta_l = \frac{\bar{l} \log D - H(S)}{\bar{l} \log D} \tag{4.27}$$

sau

$$\rho = \frac{\log D - H(X)}{\log D} \tag{4.28}$$

Exemplu: Se consideră o sursă cu alfabetul:

$$[S] = [s_1 \; s_2 \; s_3 \; s_4]$$

și probabilitățile:

$$[P] = \left[\frac{1}{2} \; \frac{1}{4} \; \frac{1}{8} \; \frac{1}{8}\right]$$

Entropia sursei este:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{4} p(s_i) \log p(s_i) =$$

$$= -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} = \frac{7}{4} \text{ bit/simbol}$$

Se consideră alfabetul codului format din două litere:

$$[X] = [0\ \ 1]$$

Se presupune că se face următoarea codare:

$$s_1 \longrightarrow 00$$
$$s_2 \longrightarrow 01$$
$$s_3 \longrightarrow 10$$
$$s_4 \longrightarrow 11$$

Această codare este ilustrată prin graful din fig. 4.3, *a*. În acest caz se obține lungimea medie a cuvintelor:

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{4} p_i l_i = 2$$

Ținînd seama de relația (4.25) eficiența este:

$$\eta = \frac{\frac{7}{4}}{2 \log 2} = \frac{7}{8} = 0{,}875,$$

iar redundanța:

$$\rho = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Se poate face însă o altă codare și anume:

$$s_1 \longrightarrow 0$$
$$s_2 \longrightarrow 10$$
$$s_3 \longrightarrow 110$$
$$s_4 \longrightarrow 111$$

Această codare este ilustrată prin graful din fig. 4.3, *b*.
În acest caz se obține lungimea medie a cuvintelor:

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{4} p_i l_i = 1{,}75$$

Înlocuind în relația (4.25) se obține eficiența:

$$\eta = \frac{\frac{7}{4}}{1{,}75 \log 2} = 1,$$

iar redundanța

$$\rho = 1 - 1 = 0$$

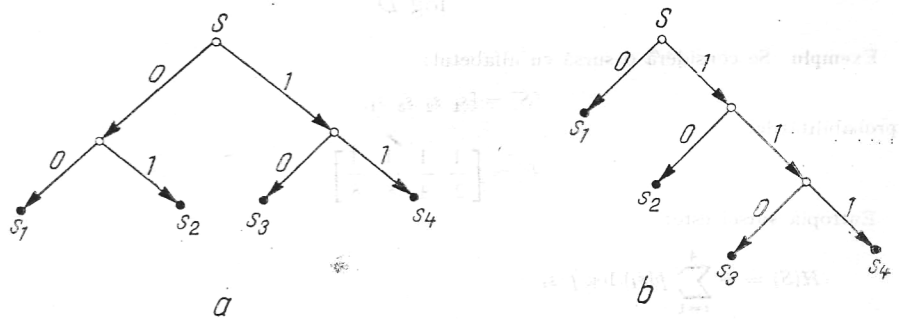


Fig. 4.3. Grafele corespunzătoare la două exemple de codare:
a — cod cu eficiență = 0,875; *b* — cod cu eficiență = 1.

Mărirea eficienței pînă la valoarea maximă, în acest procedeu de codare, s-a realizat prin faptul că s-a alocat cuvîntul de cod de lungimea cea mai mică mesajului cu probabilitatea cea mai mare etc. și în felul acesta s-a mărit entropia alfabetului la valoarea maximă.

4.4. Coduri absolut optimale

Egalitatea din relația (4.19) dă valoarea minimă ce poate fi obținută pentru lungimea medie $\bar{l}$, cu alte cuvinte este relația care dă condiția eficienței maxime:

$$H(C) = \bar{l}_{min} \log D \tag{4.29}$$

Această egalitate poate avea loc numai dacă literele din alfabetul codului sînt utilizate cu probabilități egale:

$$p(x_1) = p(x_2) = , \ldots, = p(x_D) = \frac{1}{D} \tag{4.30}$$

În acest caz $H(X)$ ia valoarea maximă $\log D$ iar eficiența

$$\eta_i = \frac{H(X)}{\log D} = 1 \tag{4.31}$$

Lungimea medie a unui cuvînt de cod $\bar{l}$ va lua valoarea minimă

$$\bar{l}_{min} = \frac{H(S)}{\log D} \tag{4.32}$$

întrucît $H(S)$ este fix (determinat de sursă).

Literele din alfabetul codului fiind considerate independente, rezultă:

$$p(s_i) = p(c_i) = \left(\frac{1}{D}\right)^{l_i} = D^{-l_i} \tag{4.33}$$

sau deoarece

$$\sum_{i=1}^{N} p(s_i) = 1 \tag{4.34}$$

se obține:

$$\sum_{i=1}^{N} D^{-l_i} = 1 \tag{4.36}$$

Această relație ne dă legătura care trebuie să existe între lungimile l_i și numărul de litere D din alfabetul codului în cazul unui cod absolut optimal. *Codurile cu eficiență egală cu unitatea* se mai numesc **coduri absolut optimale.**

Dacă pentru un cod oarecare relația (4.36) este îndeplinită, nu rezultă în mod obligatoriu că acel cod este absolut optimal. Dar în acest caz se poate afirma că cu alfabetul și lungimile date se poate forma un cod absolut optimal.

Relația (4.36) este un caz particular al *teoremei de existență a codurilor ireductibile* exprimată de *inegalitatea lui Mc. Millan* (demonstrația acestei teoreme se dă în [15]):

$$\sum_{i=1}^{N} D^{-l_i} \leqslant 1 \tag{4.37}$$

care este o condiție necesară și suficientă pentru existența codurilor ireductibile.

4.5. Teorema codării canalelor fără zgomot

Prima teoremă a lui Shannon

Dacă probabilitățile mesajelor sursei au anumite valori particulare care satisfac relația (4.33), după cum s-a văzut, eficiența codului este maximă. În acest caz din (4.33) rezultă:

$$l_i = \frac{-\log p(s_i)}{\log D} \tag{4.38}$$

Urmează să se studieze ce se întîmplă cînd mesajele ce trebuie să fie codate au un set arbitrar de probabilități.

În acest caz raportul

$$r_i = \frac{-\log p(s_i)}{\log D} \tag{4.39}$$

nu este în general un număr întreg care să poată fi considerat ca fiind lungimea l_i a cuvîntului de cod c_i.

Lungimea cuvîntului c_i din codul $[C]$ în acest caz poate fi aleasă astfel încît să satisfacă inegalitatea:

$$\frac{-\log p_i}{\log D} \leqslant l_i < \frac{-\log p_i}{\log D} + 1 \tag{4.40}$$

unde s-a notat cu p_i probabilitatea $p(s_i)$, adică l_i este numărul întreg cel mai apropiat, superior raportului r_i dat de relația (4.39).

Urmează să se verifice dacă lungimile cuvintelor date de relația (4.40) satisfac inegalitatea lui McMillan, adică dacă se poate forma cu ele un cod ireductibil. Pentru aceasta, ținînd seama de inegalitatea (4.40) se poate scrie:

$$-\log p_i \leqslant l_i \log D = \log D^{l_i} \tag{4.41}$$

sau

$$D^{-l_i} \leqslant p_i \tag{4.42}$$

de unde:

$$\sum_{i=1}^{N} D^{-l_i} \leqslant 1 \tag{4.43}$$

adică există un cod ireductibil avînd cuvinte de lungimi l_i.

Înmulțind inegalitatea (4.40) cu p_i și însumînd pe toți indicii i se obține:

$$\frac{H(S)}{\log D} \leqslant \bar{l} < \frac{H(S)}{\log D} + 1 \tag{4.44}$$

Această relație este valabilă pentru orice sursă fără memorie. În particular ea este valabilă pentru o sursă fictivă $[S^n]$, unde fiecare simbol este format dintr-o succesiune de n mesaje ale sursei $[S]$. În acest caz entropia sursei $[S^n]$ este:

$$H(S^n) = nH(S) \tag{4.45}$$

fiindcă sursa nu are memorie.

Într-adevăr, după cum s-a văzut în cap. 2, entropia a două cîmpuri de evenimente independente reunite este suma entropiilor corespunzătoare.

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) \tag{4.46}$$

Dacă cîmpul $[X]$ este egal cu cîmpul $[Y]$ și egal cu cîmpul $[S]$ al simbolurilor sursei se obține:

$$H(S, S) = H(S^2) = 2H(S) \tag{4.47}$$

Dacă în loc să se asocieze cîte două simboluri, din mulțimea $[S]$, se asociază cîte n simboluri și se obține relația (4.45).

În felul acesta în loc să se facă codarea simbol cu simbol, ea se face pe grupe de n simboluri. Se notează cu $\bar{l}_n$ lungimea medie a unui cuvînt de cod ce corespunde grupului de n simboluri ale sursei. În cazul acestei codări se poate aplica relația (4.44) care capătă forma:

$$\frac{H(S^n)}{\log D} \leqslant \bar{l}_n < \frac{H(S^n)}{\log D} + 1 \tag{4.48}$$

sau ținînd seama de relația (4.45) se obține:

$$\frac{H(S)}{\log D} \leqslant \frac{\bar{l}_n}{n} < \frac{H(S)}{\log D} + \frac{1}{n} \tag{4.49}$$

Dacă n este foarte mare, la limită se obține:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{l}_n}{n} = \frac{H(S)}{\log D} = \bar{l} \tag{4.50}$$

unde $\bar{l}$ este lungimea medie a unui cuvînt din codul $[C]$.

Relația (4.50) arată că printr-o codare corespunzătoare (codarea grupului de simboluri ale sursei) *informația medie pe o literă din alfabetul codului* $\frac{H(S)}{\bar{l}}$ *poate fi făcută oricît de apropiată de capacitatea codului* $\log D$, respectiv codarea este absolut optimală. Aceasta constituie prima teoremă a lui Shannon sau **teorema codării canalelor fără zgomot.**

4.6. Codarea simbol cu simbol

În practică nu se poate pune însă problema ca n — numărul de simboluri din grup — să tindă spre infinit; n va avea totdeauna o valoare finită și este important să se construiască coduri de eficiență cît mai ridicată pentru un n dat, în cele mai multe cazuri egal cu unitatea. În acest caz, după cum se va vedea, nu se va putea obține totdeauna o codare absolut optimală, se va căuta însă să se realizeze o codare cît mai apropiată de cea absolut optimală. Dacă pentru un $H(S)$ și un n dat se găsește un procedeu de codare care duce la cea mai mare eficiență și dacă eficiența este mai mică decît în cazul codării absolut optimale ($n \to \infty$), codarea este optimală.

Adesea, creșterea eficienței în cazul în care n este mai mare ca 1 nu este importantă, astfel că nu se justifică complicarea operațiilor de codare, preferîndu-se, cazul simplu cînd $n = 1$.

● **Codarea Shannon-Fano.** Se consideră că simbolurile sursei sînt codate în mod individual unul cîte unul.

În cazul particular în care mulțimea $[S] = [s_1 s_2, \ldots s_N]$ a mesajelor sursei poate fi împărțită în două mulțimi S_0 și S_1 de aceeași probabilitate $p(S_0) = p(S_1) = 2^{-1}$, iar mulțimile S_0 și S_1 la rîndul lor pot fi divizate în mulțimi

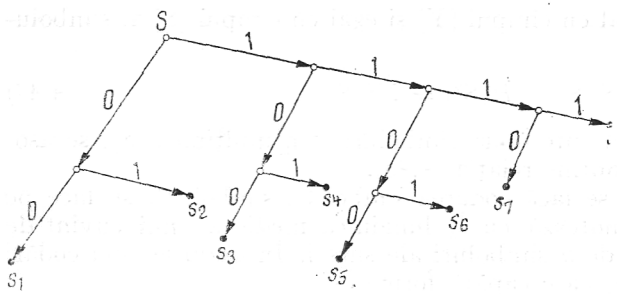


Fig. 4.4. Graful corespunzător procedeului de codare binară Shannon-Fano.

S_{00} și S_{01}, respectiv S_{10} și S_{11} de aceeași probabilitate $p(S_{00}) = p(S_{01}) = p(S_{10}) = p(S_{11}) = 2^{-2}$, continuînd această operație pînă cînd mulțimile respective nu conțin decît un singur element, după cum se vede din graful din fig. 4.4, și tabelul 4.2, codarea este absolut optimală.

TABELUL 4.2

Exemplu de codare binară Shannon-Fano

Mesaje s_k	Probabilități $p(s_k)$					Cuvinte de cod s_k	Lungimea l_k
s_1	0,25	0	0			00	2
s_2	0,25		1			01	2
s_3	0,125		0	0		100	3
s_4	0,125			1		101	3
s_5	0,0625	1	1	0	0	1100	4
s_6	0,0625				1	1101	4
s_7	0,0625			1	0	1110	4
s_8	0,0625				1	1111	4
	$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$						$\bar{l} = 2,75$

$$-H(S) = 2 \cdot 0,25 \log 0,25 + 2 \cdot 0,125 \log 0,125 + 4 \cdot 0,0625 \log 0,0625 = -2,75;$$

$$H(S) = 2,75$$

$$\bar{l} = 4 \cdot 0,25 + 6 \cdot 0,125 + 16 \cdot 0,0625 = 2,75$$

$$\eta = \frac{H(S)}{\bar{l} \log 2} = 1$$

4.7. Codarea binară a lui Huffman

Dacă se face codarea simbolurilor sursei unul cîte unul se pune problema găsirii unei metode de codare care în toate cazurile (pentru orice distribuție a probabilităților) să fie o codare optimală, adică să nu se găsească altă procedură de codare (cu simbolurile sursei luate individual) care să ducă la o eficiență mai mare.

În acest caz cuvintele de cod obținute au lungimea medie cea mai mică în raport cu lungimile ce s-ar obține din alte procedee de codare.

Un procedeu general de codare optimală a fost găsit de Huffman.

Înainte de a arăta acest procedeu de codare se vor anunța două **proprietăți generale ale codurilor optimale.**

1. Pentru o codare optimală este necesar ca *cel mai scurt cuvînt de cod să fie atribuit mesajului (simbolului) cu probabilitatea cea mai mare.* În acest scop se ordonează mesajele în ordinea descrescătoare a probabilităților:

$$\begin{gathered} p(s_1) \geqslant p(s_2) \geqslant , \ldots, \geqslant p(s_N) \\ l_1 \leqslant l_2 \leqslant , \ldots, \leqslant l_N \end{gathered} \tag{4.51}$$

Dacă această ordine nu este respectată (de ex. $l_1 \rightarrow s_2$ și $l_2 \rightarrow s_1$) prin restabilirea ei, lungimea medie $\bar{l}$ a cuvîntului de cod va scădea. În consecință, ordonarea dată de relațiile (4.51) asigură existența unei lungimi medii minime.

2. Pentru o codare optimală este necesar ca *lungimile ultimelor două mesaje să fie egale:*

$$l_{N-1} = l_N \tag{4.52}$$

Să presupunem că lucrul acesta nu ar fi adevărat, respectiv:

$$l_N = l_{N-1} + 1$$

Dat fiind că se iau în considerare numai coduri care au proprietatea de prefix înseamnă că înlăturînd ultima literă din cuvîntul de cod ce corespunde simbolului s_N de lungime $l_N = l_{N-1} + 1$ nu se obține un cuvînt care să fie atribuit altui mesaj decît lui s_N, prin urmare această literă este de prisos, ea mărește lungimea medie $\bar{l}$. În consecință, pentru a avea un cod optimal este necesar ca ultimelor două mesaje să li se atribuie cuvinte de cod de aceeași lungime.

Codarea lui Huffman *este bazată pe ideea de a împărți mulțimea mesajelor* $[S] = [s_1, s_2, \ldots, s_N]$ *în submulțimi* S_0 *și* S_1 *cu probabilități cît mai apropiate, iar mulțimile* S_0 *și* S_1 *la rîndul lor să fie împărțite în mulțimile* S_{00} *și* S_{01}, *respectiv* S_{10} *și* S_{11}, *cu probabilități cît mai apropiate și așa mai departe.* În cazul particular în care probabilitățile mulțimilor divizate sînt egale, codarea este absolut optimală (Shannon-Fano). În general însă probabilitățile mulțimilor divizate în două nu sînt egale și se pune problema ca diviziunea să fie astfel făcută încît aceste probabilități să fie cît mai aproape de egalitate. asigurîndu-se în felul acesta obținerea unui cod optimal.

Gruparea mesajelor $[S]$ *în mulțimi de probabilități cît mai apropiate* se poate face în felul următor:

1. *Se ordonează mulțimea mesajelor* $[S]$ *în ordinea probabilităților descrescătoare:*

$$\begin{gathered} [S] = [R_0] = [s_1 s_2 \ldots s_N] \\ p(s_1) \geqslant p(s_2) \geqslant \ldots, \geqslant p(s_N) \end{gathered} \tag{4.53}$$

2. *Se formează mulțimi de mesaje care să poată fi divizate în două submulțimi de probabilități cît mai apropiate.*

a. Se consideră în primul rînd o mulțime formată numai din două elemente din care se presupune că unul este s_N. În acest caz în mod obligatoriu celălalt element trebuie să fie s_{N-1} fiindcă $p(s_{N-1})$ este probabilitatea cea mai apropiată de probabilitatea $p(s_N)$ a elementului s_N.

Mulțimea formată din s_{N-1} și s_N se notează cu:

$$r_1 = s_{N-1} \cup s_N$$

și i se alocă probabilitatea:

$$p(s_{N-1} \cup s_N) = p(s_{N-1}) + p(s_N) = p(r_1)$$

b. Mulțimea formată din cele două elemente s_{N-1} și s_N se consideră ca un nou mesaj r_1 care se include în mulțimea celorlalte mesaje în ordinea probabilităților necrescătoare:

$$\begin{aligned} &[R_1] = [s_1 s_2 \ldots r_1 \ldots] \\ &p(s_1) \geqslant p(s_2) \geqslant \ldots \geqslant p(r_1) \geqslant, \ldots \end{aligned} \tag{4.54}$$

Ultimele două mesaje din acest șir se grupează ca și în cazul precedent, formînd un nou mesaj r_2 care se include în mulțimea celorlalte mesaje, în ordinea probabilităților necrescătoare, formînd șirul ordonat $[R_2]$. În același mod din șirul ordonat $[R_2]$ se obține șirul ordonat $[R_3]$ și operația se continuă pînă cînd se ajunge la șirul $[R_n]$ format numai din două elemente:

$$[R_n] = [r_n r_{n-1}]$$

c. Din cele precedente rezultă că mulțimea $[S]$ poate fi divizată în două mulțimi r_n și r_{n-1} astfel ca probabilitățile lor $p(r_n)$ și $p(r_{n-1})$ să fie cît mai apropiate, iar r_n și r_{n-1} la rîndul lor pot fi divizate fiecare în cîte două mulțimi de probabilități cît mai apropiate și așa mai departe pînă se ajunge la mulțimi cu un singur element: $s_1, s_2, \ldots, s_N$.

Dacă probabilitățile mulțimilor obținute prin diviziune ar fi egale atunci s-ar putea realiza o codare absolut optimală.

În caz contrar, codarea nu este absolut optimală, ea este optimală și se apropie cu atît mai mult de cea absolut optimală cu cît diferența între probabilitățile mulțimilor divizate este mai mică.

d. Cuvintele de cod corespunzătoare fiecărui mesaj se obțin în felul următor:

— mulțimii r_n i se alocă simbolul 0;

— mulțimii r_{n-1} i se alocă simbolul 1;

— la fiecare diviziune în două se alocă simbolul 0 sau 1 și operația se continuă pînă cînd se ajunge la o mulțime care conține un singur element s_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

e. Din cele precedente se vede că formarea cuvîntului de cod corespunzător mesajului s_k nu este unică, fiindcă la fiecare diviziune în două alocarea simbolului 0 și 1 este arbitrară. Rezultă că se pot forma mai multe coduri care sînt echivalente în sensul că toate sînt optimale, respectiv au aceeași lungime medie.

Exemplu: Se consideră sursa S cu următoarea distribuție:

$$[S] = [s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6]$$

$$[P] = [0{,}3 \quad 0{,}25 \quad 0{,}15 \quad 0{,}15 \quad 0{,}10 \quad 0{,}05]$$

Se aranjează probabilitățile sursei $[S]$ și a surselor restrînse $[R]$ formate prin reunirea ultimelor două mesaje din sursa precedentă într-un tablou. Alături de probabilitățile mesajelor se trec cuvintele de cod corespunzătoare.

Succesiunea operațiilor este dată de tabelul 4.3.

TABELUL 4.3

Exemplu de codare binară Huffman

Mesaje s_k	Probabilități $p(s_k)$	Cuvinte de cod c_k	$[R_1]$		$[R_2]$		$[R_3]$		$[R_4]$	
									→0,60	(0)
							→0,40	(1)	0,40	(1)
s_1	0,30	00	0,30	(00)	0,30	(00)	0,30	(00)		
					→0,30	(01)	0,30	(01)		
s_2	0,25	10	0,25	(10)	0,25	(10)				
s_3	0,15	11	0,15	(11)	0,15	(11)				
s_4	0,15	010	0,15	(010)						
			→0,15	(011)						
s_5	0,10	0110								
s_6	0,05	0111								

$$0{,}3 \log 0{,}3 + 0{,}25 \log 0{,}25 + 0{,}3 \log 0{,}15 + 0{,}1 \log 0{,}1 + 0{,}05 \log 0{,}05 = -2{,}4$$

$$H(S) = 2{,}4 \qquad \eta = \frac{H(S)}{\bar{l} \log 2} = 0{,}975$$

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{6} l_i p(s_i) = 2{,}45$$

În fig. 4.5 se dă graful corespunzător.

Lungimea medie a cuvintelor de cod este:

$$\bar{l} = 2 \times (0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}15) + 3 \times 0{,}15 + 4 \times (0{,}10 + 0{,}05) = 2{,}45$$

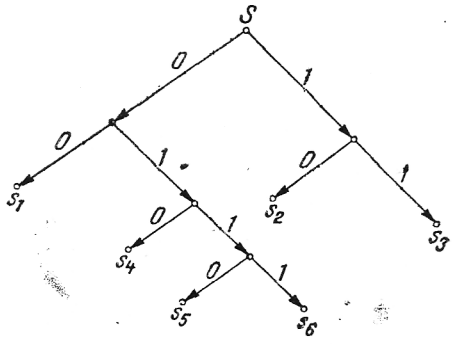


Fig. 4.5. Graful corespunzător procedeului de codare binară Huffman.

O altă variantă echivalentă de codare este dată în tabelul 4.4, iar graful corespunzător în fig. 4.6.

TABELUL 4.4

Exemplu de codare binară Huffman

Mesaje s_k	Probabilități $p(s_k)$	Cuvinte de cod c_k	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$	$[R_4]$
						→0,60 (0)
					→0,40 (1)	0,40 (1)
				→0,30 (01)	0,30 (01)	
s_1	0,30	00	0,30 (00)	0,30 (00)	0,30 (00)	
s_2	0,25	10	0,25 (10)	0,25 (10)		
			→0,15 (11)	0,15 (11)		
s_3	0,15	011	0,15 (011)			
s_4	0,15	010	0,15 (010)			
s_5	0,10	110				
s_6	0,05	111				

Codul obținut în acest caz este diferit de cel precedent, însă are aceeași lungime medie:

$$\bar{l} = 2 \times (0,3 + 0,25) + 3 \times (0,15 + 0,15 + 0,10 + 0,05) = 2,45$$

deci aceeași eficiență.

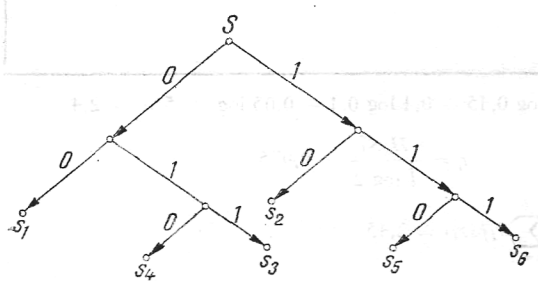


Fig. 4.6. Graful corespunzător procedeului de codare binară Huffman.

CAPITOLUL 5

CODAREA PENTRU CANALE CU PERTURBAȚII

În capitolul precedent s-au studiat metodele de a transforma o sursă oarecare într-o sursă de entropie maximă sau apropiată de valoarea maximă, în vederea obținerii unei eficiențe cît mai mari.

În prezentul capitol se consideră sursa de entropie maximă, sursa la care toate simbolurile generate, numite *simboluri de informație*, au aceeași probabilitate. Înainte de a transmite aceste simboluri pe canalul cu perturbații se adaugă o anumită redundanță — de obicei prin adăugarea unor simboluri, numite *simboluri de control*, care au menirea să indice utilizatorului prezența erorilor sau chiar să-i dea posibilitatea să le corecteze. În acest sens vorbim de *coduri detectoare de erori* și de *coduri corectoare de erori*.

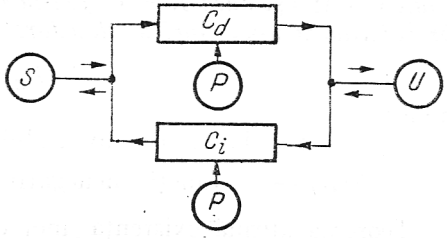


Fig. 5.1. Sistem de transmisiune cu legătură inversă.

În cazul detecției erorilor este necesar un canal de întoarcere (fig. 5.1) prin care utilizatorul să solicite sursei repetarea mesajului eronat.

Deoarece cantitatea de informație necesară solicitării unei retransmisii este foarte mică, capacitatea canalului invers poate fi și ea foarte mică. Sistemul de detecție a erorilor și de repetare la cerere a mesajelor eronate, cunoscut sub numele de A R Q (automatic repetiton request) este larg utilizat în legătură cu sursele cu debit controlabil. La canale cu perturbații mai mari, pentru a evita repetări prea frecvente se folosește și un sistem de corecție automată a erorilor, rămînînd ca cererea de repetare să fie făcută numai cînd numărul erorilor depășește posibilitățile sistemului de corecție.

În cazul surselor cu debit necontrolabil sau atunci cînd informația este înmagazinată în diferite tipuri de memorii susceptibile a se degrada, este necesar să se utilizeze un sistem de corecție automată a erorilor.

5.1. Clasificarea codurilor detectoare sau corectoare de erori

Dacă *prelucrările necesare obținerii proprietăților de detecție sau de corecție se fac în blocuri de n simboluri* spunem că avem de-a face cu **coduri bloc.** Șirurile de n simboluri se numesc *cuvinte.* Dacă acestor cuvinte le corespunde un mesaj generat de sursa primară spunem că avem cuvinte cu sens.

Dacă *prelucrarea simbolurilor generate de sursă nu se face pe blocuri, ci în mod continuu* spunem că avem de-a face cu **coduri convoluționale** (sau recurente).

În cadrul codurilor bloc se vor studia două tipuri de coduri și anume codurile grup și codurile ciclice.

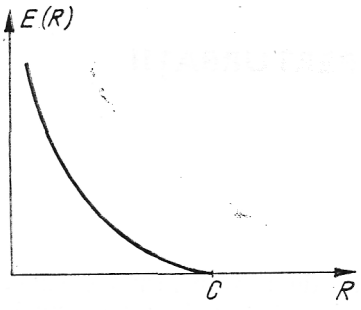


Fig. 5.2. Exponentul erorii.

Codurile grup sînt cele în care *cuvintele sînt considerate ca fiind elemente într-un spațiu vectorial.*

Codurile ciclice sînt codurile în care *cuvintele sînt considerate ca fiind elemente într-o algebră.*

5.2. Teorema lui Shannon pentru canale cu perturbații

Teorema lui Shannon pentru canale cu perturbații este o teoremă de existență a cărei demonstrare nu se va da în cele ce urmează.

În esență **teorema lui Shannon** afirmă următoarele:

Dacă avem o sursă cu un debit de informație R biți/s și un *canal de capacitate* C biți/s *și dacă* $R < C$, *există un cod cu cuvinte de lungime* n *astfel încît probabilitatea unei erori de decodare* P_E *să fie:*

$$P_E \leqslant 2^{-nE(R)}$$

unde:

n este lungimea cuvîntului de cod;

$E(R)$ — o funcție nenegativă (fig. 5.2) numită exponentul erorii.

Teorema afirmă existența unor coduri a căror probabilitate de decodare eronată este arbitrar de mică, dar nu arată cum pot fi construite asemenea coduri. Această teoremă afirmînd un lucru cu totul suprinzător și anume că *indiferent de nivelul perturbațiilor dintr-un canal, se pot face transmisiuni cu o probabilitate a erorii oricît de mică* — a dus la o mare dezvoltare a teoriei codurilor.

5.3. Coduri grup

Codurile grup sînt coduri bloc în care cele n simboluri care formează un cuvînt sînt considerate ca fiind componentele unui vector n dimensional (spațiul vectorial avînd o structură de grup se justifică denumirea acestor coduri).

Convenim în cele ce urmează să prezentăm sub formă matriceală componentele unui cuvînt:

$$\mathbf{w} = [a_1 \; a_2 \ldots a_n]$$

Deoarece ne ocupăm numai de coduri binare, elementele a_i sînt elementele unui cîmp cu două elemente notate (0, 1), cîmpul fiind notat cu GF(2) (vezi anexa II).

Regulile de operare numite adunare modulo 2 și multiplicare în $GF(2)$ sînt:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Din punct de vedere fizic simbolurile (0, 1) pot reprezenta o clasă largă de semnale, de ex: „0" poate reprezenta un impuls pozitiv, iar „1" un impuls negativ; sau „0" poate reprezenta un semnal sinusoidal de durată finită și fază nulă, iar „1" același semnal cu faza π; sau „0" absența semnalului, iar „1" prezența semnalului etc.

5.3.1. Specificarea cuvintelor cu sens

Dacă unele cuvinte din n litere sînt puse în corespondență biunivocă cu mesajele generate de sursă, spunem că aceste cuvinte au sens sau că sînt cuvinte de cod.

Mulțimea tuturor cuvintelor, în număr $N = 2^n$ o notăm cu W și are o structură de spațiu vectorial, iar mulțimea cuvintelor cu sens, în număr $S = 2^k$ o notăm cu V și are o structură de subspațiu vectorial. Dacă atribuim sens tuturor cuvintelor, respectiv:

$$S = N = 2^n$$

atunci informația medie transmisă pe un cuvînt este

$$I = \log N = n$$

iar informația medie pe simbol este:

$$i_n = \frac{I}{n} = 1 \text{ bit}, \tag{5.1}$$

respectiv are valoarea maximă.

Dacă toate cuvintele sînt cuvinte de cod, nu există posibilitatea de a detecta sau corecta erorile ce se introduc în procesul de transmisiune prin canal. Aceasta din cauză că prin modificarea de către perturbații a simbolurilor dintr-un cuvînt de cod se obțin tot cuvinte de cod, respectiv cuvinte cu sens.

Pentru a avea posibilitatea de a recunoaște prezența erorilor în cuvîntul recepționat (detecția erorilor) sau de a face corecția lor, adică de a recunoaște poziția erorilor se procedează după cum se arată în cele ce urmează.

Mulțimea W a cuvintelor se împarte în două submulțimi V și F.

Tuturor cuvintelor $v_i \in V$ li se atribuie sens, respectiv v_i sînt cuvinte de cod.

Se presupune că numărul lor este:

$$S = 2^k$$

unde $k < n$ este un număr întreg.

Cuvintelor $w_j \in F$ nu li se atribuie sens, ele sînt cuvinte fără sens, respectiv ele nu conțin informație (fig. 5.3).

Informația medie transmisă cu un cuvînt de cod este în acest caz:

$$I = \log S = k.$$

iar informația medie pe simbol este:

$$i_k = \frac{k}{n} \tag{5.2}$$

mai mică decît i_n dat de relația (5.2).

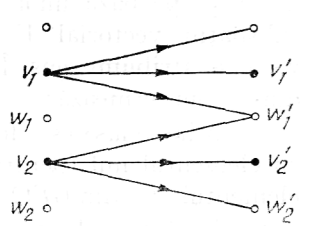


Fig. 5.3. Graful de tranziție pentru cuvintele de cod transmise pe un canal cu perturbații.

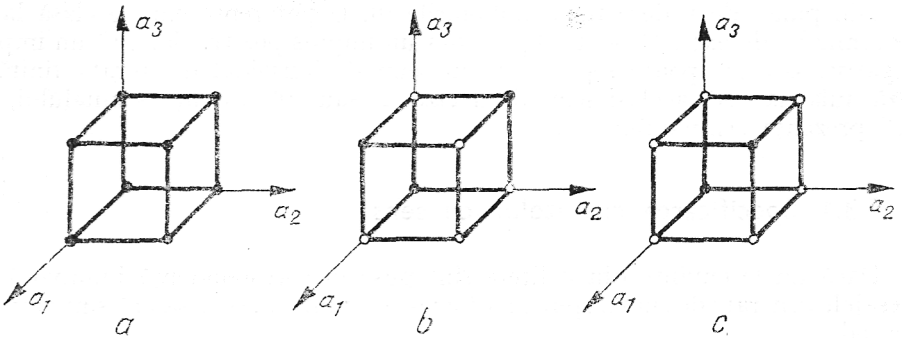


Fig. 5.4. Alegerea cuvintelor cu sens (de cod) în cazul a $n = 3$ simboluri.

În fig. 5.4 se ilustrează geometric alegerea cuvintelor de cod pentru cazul $n = 3$. Cerculețele negre reprezintă cuvinte de cod, iar cerculețele albe cuvinte fără sens.

În cazul fig. 5.4, *a*, toate cuvintele ce se pot forma adică $N = 2^3 = 8$ sînt cuvinte de cod. Apariția unei erori nu poate fi detectată.

În cazul fig. 5.4, *b* se aleg $S = 2^2 = 4$ cuvinte de cod. Apariția unei erori conduce la un cuvînt fără sens, deoarece se modifică numai una din coordonate. Se face, deci, detecția unei erori, dar nu se poate face și corecția ei.

În cazul fig. 5.4, *c* se aleg $S = 2^1 = 2$ cuvinte de cod. Apariția unei erori poate fi detectată și eroarea poate fi corectată.

În cele ce urmează cuvintele de cod se vor nota cu $\mathbf{v}_i$ iar cuvintele recepționate (care provin din $\mathbf{v}_i$ dar pot fi diferite de cuvintele de cod $\mathbf{v}_i$ transmise) se vor nota cu $\mathbf{v}'_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= [a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}] \\ \mathbf{v}'_i &= [a'_{i1}\ a'_{i2} \dots a'_{in}] \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dacă $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$, respectiv $a'_{i1} = a_{i1}$, $a'_{i2} = a_{i2}$, ..., $a'_{in} = a_{in}$ se spune că transmisiunea s-a efectuat fără eroare.

5.3.2. Cuvintele ca elemente ale claselor alăturate

În mulțimea elementelor $\mathbf{w}$ ale spațiului vectorial W (care are structură de grup) pe baza unor criterii care vor fi stabilite ulterior, determinăm un subspațiu vectorial V (care are structură de subgrup), și acestor elemente $\mathbf{v} \in V$ le atribuim sens. În raport cu subgrupul V putem forma clase alăturate după cum urmează:

— prima clasă este formată din elementele (cuvinte cu sens) $\mathbf{v} \in V$ începînd cu elementul nul (pentru comoditate îl notăm cu „0" el este însă diferit de elementul „0" din $GF(2)$, fiind o matrice cu toate elementele nule);

— în clasa a doua, alegem ca prim element unul din cuvintele (fără sens) cu numărul cel mai mic de componente „1" care nu figurează în prima clasă și pe care-l notăm cu $\boldsymbol{\varepsilon}_1$;

— restul elementelor din clasa a doua se formează adunînd modulo 2 pe ε_1 la elementele primei clase, după cum urmează:

$$\begin{array}{l} 0 \quad v_1 \qquad v_2 \qquad \ldots v_{s-1} \\ \varepsilon_1 \; v_1 + \varepsilon_1 \; v_2 + \varepsilon_1 \ldots v_{s-1} + \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \; v_1 + \varepsilon_2 \; v_2 + \varepsilon_2 \ldots v_{s-1} + \varepsilon_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{5.4}$$

Operația se continuă pînă cînd se epuizează toate elementele din W.

Dată fiind structura de spațiu vectorial, avem

$$v_i + \varepsilon_j = v_i' \in W \quad \text{pt} \; \forall \; v_i \in V \quad \text{și} \quad \varepsilon_j \in W$$

altfel spus, în tabloul (5.4) figurează toate cuvintele din W, din care cuvintele din prima linie sînt cuvinte cu sens.

Pe baza acestui tablou decodarea se face recunoscînd coloana în care figurează cuvîntul recepționat v_i', primul element din această coloană fiind cuvîntul transmis de sursă, respectiv cuvîntul în care erorile sînt corectate.

Pentru exemplificare să considerăm că mulțimea W are $2^4 = 16$ cuvinte din care $2^1 = 2$ sînt cuvinte cu sens. În acest caz clasele alăturate sînt

[0 0 0 0]	[1 1 1 1]
[0 0 0 1]	[1 1 1 0]
[0 0 1 0]	[1 1 0 1]
[0 1 0 0]	[1 0 1 1]
[1 0 0 0]	[0 1 1 1]
[0 0 1 1]	[1 1 0 0]
[0 1 0 1]	[1 0 1 0]
[1 0 0 1]	[0 1 1 0]

Examinînd acest tablou remarcăm următoarele:

— dacă recepționăm cuvîntul 1 0 0 0 decidem că s-a transmis cuvîntul 0 0 0 0 (primul cuvînt din coloană), adică putem afirma că a intervenit o eroare în poziția 1;

— dacă recepționăm 1 0 1 1 decidem că s-a transmis 1 1 1 1, adică a intervenit o eroare în poziția 2 — cuvîntul recepționat 1 0 1 1 se găsește în clasa în care primul element este 0 1 0 0;

— cuvintele din prima coloană, respectiv primele elemente în clasele alăturate indică poziția în care au intervenit erori (au un 1 în pozițiile eronate, restul simbolurilor fiind zero), din această cauză le numim **cuvinte eroare**;

— deci codul examinat poate corecta o eroare simplă indiferent în ce poziție intervine și cîteva erori duble dacă intervin în anumite poziții;

— toate cuvintele dintr-o coloană sînt mai „apropiate" de primul cuvînt din coloana respectivă decît de oricare alt cuvînt din alte coloane; prin mai apropiat se înțelege că diferă într-un număr mai mic de poziții (definiția riguroasă a distanței va fi dată în cele ce urmează).

Utilizarea tabloului cu clasele alăturate nu este convenabilă pentru decodare dacă avem un număr mare de cuvinte, ea este însă foarte utilă pentru a înțelege mecanismul prin care se face corecția erorilor.

5.3.3. Distanța Hamming

În spațiul n — dimensional al cuvintelor se introduce **funcția distanță** $D(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ care satisface postulatele unui spațiu metric. Prin definiție, această funcție este:

$$D(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = (a_{i1} \oplus a_{j1}) + (a_{i2} \oplus a_{j2}) + \ldots + (a_{in} \oplus a_{jn}) \tag{5.5}$$

unde s-a notat cu $\oplus$ adunarea modulo 2 în corpul finit cu două elemente ale coordonatelor și cu $+$ adunarea obișnuită în corpul numerelor reale.[1]

Sub o formă concisă se poate scrie:

$$D(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \oplus a_{jk}) \tag{5.6}$$

Din relația de definiție dată rezultă că *distanța între două cuvinte de cod este egală cu numărul de simboluri (coordonate) prin care cele două cuvinte se deosebesc.*

Pentru codurile ilustrate prin fig. 5.4 se obțin distanțele minime: $D = 1$ (fig. 5.4, *a*); $D = 2$ (fig. 5.4, *b*) și $D = 3$ (fig. 5.4, *c*).

5.3.3.1. **Decizia pe baza distanței minime**

Se presupune că transmisiunea se face printr-un canal binar simetric fără memorie. Se mai presupune că fiecare cuvînt de cod poate fi transmis cu aceeași probabilitate.

Se notează cu $p < \frac{1}{2}$ probabilitatea ca un simbol să fie transmis eronat și cu q probabilitatea ca el să fie transmis corect:

$$p + q = 1$$

Dacă se recepționează cuvîntul $\mathbf{v}'_i$, probabilitatea ca el să provină din $\mathbf{v}_i$ este:

$$p(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}'_i) = p^{D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_i)}\, q^{n - D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_i)} \tag{5.7}$$

unde $D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_i)$ este distanța între $\mathbf{v}'_i$ și $\mathbf{v}_i$ respectiv numărul de simboluri eronate datorită perturbațiilor.

Dacă se recepționează $\mathbf{v}'_i$ probabilitatea ca el să provină din $\mathbf{v}_j$ este:

$$p(\mathbf{v}_j/\mathbf{v}'_i) = p^{D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_j)}\, q^{n - D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_j)} \tag{5.8}$$

Deoarece în majoritatea canalelor utilizate probabilitatea $p \ll 1$, respectiv $q \approx 1$, relațiile precedente pot fi scrise:

$$p(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}'_i) \cong p^{D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_i)} \tag{5.9}$$

$$p(\mathbf{v}_j/\mathbf{v}'_i) \cong p^{D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_j)} \tag{5.10}$$

Dacă:

$$D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_i) < D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_j) \quad \text{pt. } \forall\, j \neq i \tag{5.11}$$

atunci

$$p(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}'_i) > p(\mathbf{v}_j/\mathbf{v}'_i) \quad \text{pt. } \forall\, j \neq i \tag{5.12}$$

[1] În cazurile în care nu se pot crea confuzii, adunarea modulo 2 va fi notată cu $+$.

Cu alte cuvinte, *dacă distanța de la cuvîntul recepționat* $\mathbf{v}'_i$ *la cuvîntul de cod* $\mathbf{v}_i$ *este mai mică decît distanța la oricare alt cuvînt de cod, atunci probabilitatea ca* $\mathbf{v}'_i$ *să provină din* $\mathbf{v}_i$ *este mai mare decît probabilitatea ca el să provină din oricare alte cuvinte de cod.*

Dacă relația (5.11) este îndeplinită, pe baza relației (5.12) se decide că s-a transmis cuvîntul $\mathbf{v}_i$ atunci cînd s-a recepționat $\mathbf{v}'_i$.

Această **schemă de decizie** se numește **a observatorului ideal** sau **a probabilității maxime.** Ea stabilește o corespondență între cuvintele recepționate $\mathbf{v}'_i$ și cuvintele transmise $\mathbf{v}_i$ pe baza *criteriului probabilității condiționate* $p(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}'_i)$ ***maxime.***

5.3.3.2. Regiuni de decizie

Cu ajutorul funcției distanță se poate face o partiție a mulțimii W în submulțimi disjuncte W_i în jurul punctelor $\mathbf{v}_i \in W_i$, submulțimi care au proprietatea că toate punctele $\mathbf{v}'_i \in W_i$ sînt mai aproape de punctul $\mathbf{v}_i$ decît de oricare punct $\mathbf{v}_j$ pentru $j \neq i$.

Dacă pentru un punct $\mathbf{v}'_i$ are loc relația

$$D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_i) < D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_j) \quad \forall\, j \neq i \tag{5.13}$$

atunci

$$\mathbf{v}'_i \in W_i \tag{5.14}$$

Mulțimea punctelor care se găsesc la aceeași distanță față de cel puțin două puncte $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$ și care nu pot fi înglobate în nici una din mulțimile W_i se notează cu W_0, adică dacă

$$\mathbf{v}_i \notin W_j \tag{5.15}$$

pentru orice j, atunci:

$$\mathbf{v}'_i \notin W_0 \tag{5.16}$$

În felul acesta, toate punctele spațiului W aparțin fie mulțimilor W_i ($i = 1, 2, \ldots, S$), fie mulțimii W_0, adică:

$$W_0 \cup W_1 \cup W_2 \cup, \ldots, \cup W_S = W = V \cup F \tag{5.17}$$

În legătură cu mulțimile astfel determinate, la recepționarea cuvîntului $\mathbf{v}'_i$ se pot ivi următoarele situații:

- dacă

$$\mathbf{v}'_i \in F \tag{5.18}$$

cuvîntul recepționat $\mathbf{v}'_i$ nu este cuvînt de cod (F este mulțimea cuvintelor fără sens) și se poate face detecția erorilor:

- dacă:

$$\mathbf{v}'_i \in W_i \tag{5.19}$$

respectiv:

$$D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_i) < D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_j) \quad \text{pt. } \forall\, j \neq i, \tag{5.20}$$

erorile pot fi corectate, în sensul că se decide că $\mathbf{v}'_i$ provine din $\mathbf{v}_j$;

- dacă:

$$\mathbf{v}'_i \in W_0 \tag{5.21}$$

respectiv

$$D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_i) = D(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_j)$$

pentru un anumit j, erorile nu pot fi corectate, însă pot fi detectate fiindcă:

$$W_0 \subset F$$

și deci:

$$\mathbf{v}'_i \in F$$

Dacă se atribuie sens tuturor cuvintelor posibile mulțimea F devine vidă și în consecință nu este posibilă nici detecția, nici corecția erorilor.

Din cele precedente rezultă că *posibilitățile de detecție sau de corecție sînt cu atît mai mari cu cît mulțimile W_i conțin mai multe elemente*, fiindcă toate elementele $\mathbf{v}'_i \in W_i$ se decodifică în $\mathbf{v}_i$. Acest lucru se realizează dacă $\mathbf{v}_i \in W_i$ se găsește la distanță mare de cel mai apropiat cuvînt cu sens $\mathbf{v}_j \in W_j$.

Rezultă că *posibilitățile de detecție și de corecție ale unui cod depind de distanța minimă între două cuvinte de cod.*

Astfel, pentru detecția a e erori, care pot să intervină în oricare poziție a cuvîntului distanța minimă între cuvintele de cod trebuie să fie:

$$D_{min} = e + 1 \tag{5.22}$$

Pentru corecția a e erori, care pot să intervină în orice poziție, distanța minimă este

$$D_{min} = 2e + 1 \tag{5.23}$$

Dacă distanța între cuvinte este mare, cu excepția distanței între două cuvinte care este mică, este evident că aceasta din urmă limitează numărul de erori detectabile sau corectabile, fiindcă proprietățile de detecție și corecție trebuie să fie asigurate pentru toate configurațiile posibile de e erori.

5.3.4. Cuvîntul eroare

Pentru a elabora mecanismul de detecție sau de corecție al erorilor este necesar ca în prealabil să se analizeze modul în care se introduc erorile ce trebuie detectate sau corectate.

Sub o formă generală acțiunea perturbațiilor poate fi caracterizată printr-un operator aleator $\mathfrak{A}$ care face transformarea de la spațiul cuvintelor de cod $\mathbf{v}_i$ (emise la intrarea în canal) la spațiul cuvintelor recepționate $\mathbf{v}'_i$ (la ieșirea din canal)

$$\mathfrak{A}\{\mathbf{v}_i\} = \mathbf{v}'_i \tag{5.24}$$

Această relație poate fi scrisă sub o formă mai simplă dacă se definește un cuvînt eroare care are simboluri din același alfabet cu cuvintele de cod $\mathbf{v}_i$ și aceeași lungime n. Cuvîntul eroare poate fi considerat ca fiind generat de perturbațiile din canal. În notația matriceală cuvîntul eroare poate fi scris sub forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_n] \tag{5.25}$$

unde simbolurile $\varepsilon_i (i = 1, 2, \dots, n)$ pot lua în cazul binar valorile 0 sau 1 și anume: ε_i ia valoarea 1 dacă perturbațiile sînt de așa natură încît introduc o eroare pe poziția i (modifică 1 în 0 sau invers) și ε_i ia valoarea 0 în caz contrar, respectiv dacă nu se introduc erori.

În cele ce urmează se vor nota pozițiile simbolurilor cuvintelor începînd de la stînga spre dreapta.

Cuvîntul eroare mai poate fi scris și sub forma:

$$\varepsilon = [\ldots \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_e} \ldots] \tag{5.26}$$

unde:

— simbolurile $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_e}$ sînt simboluri 1, celelalte simboluri care completează numărul simbolurilor pînă la n fiind 0;

— indicii $i_1, i_2, \ldots, i_e$ sînt numere de 1 la n care arată poziția în care apare o eroare.

Notațiile (5.25) și (5.26) sînt echivalente în sensul că simbolurile $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_{i_e}$ sînt egale cu 1, iar toate celelalte sînt egale cu 0.

Cu ajutorul definiției date cuvîntului eroare, transformarea dată de relația (5.24) poate fi scrisă sub forma:

$$\mathfrak{A}\{\mathbf{v}_i\} = \mathbf{v}_i + \varepsilon = \mathbf{v}'_i \tag{5.27}$$

unde semnul $+$ indică adunarea modulo 2 a matricelor $\mathbf{v}_i$ și ε.

Notînd:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= [a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}] \\ \mathbf{v}'_i &= [a'_{i1}\ a'_{i2} \ldots a'_{in}] \end{aligned} \tag{5.28}$$

se obține:

$$\begin{aligned} a'_{i1} &= a_{i1} + \varepsilon_1 \\ a'_{i2} &= a_{i2} + \varepsilon_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{in} &= a_{in} + \varepsilon_n \end{aligned} \tag{5.29}$$

sau, adunînd modulo 2 în ambii membrii pe ε_1, respectiv ε_2 etc. se obține:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= a'_{i1} + \varepsilon_1 \\ a_{i2} &= a'_{i2} + \varepsilon_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{in} &= a'_{in} + \varepsilon_n \end{aligned} \tag{5.30}$$

aceste relații reprezentînd transformarea inversă

$$\mathbf{v}_i = \mathfrak{A}^{-1}\{\mathbf{v}'_i\} = \mathbf{v}'_i + \varepsilon \tag{5.31}$$

Introducerea erorilor este reprezentată schematic în fig. 5.5.

5.3.4.1. Erori individuale

Dacă se presupune că fiecare simbol transmis este afectat în mod independent de perturbații, erorile care apar sînt independente unele de altele.

Aceste erori individuale apar, de obicei, ca urmare a acțiunii zgomotelor de fluctuație.

În cazul unui canal binar simetric, probabilitatea introducerii unei erori pe o poziție oarecare se notează cu p și se presupune aceeași pentru toate pozițiile.

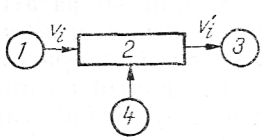


Fig. 5.5. Reprezentarea schematică a procesului de introducere a erorilor.

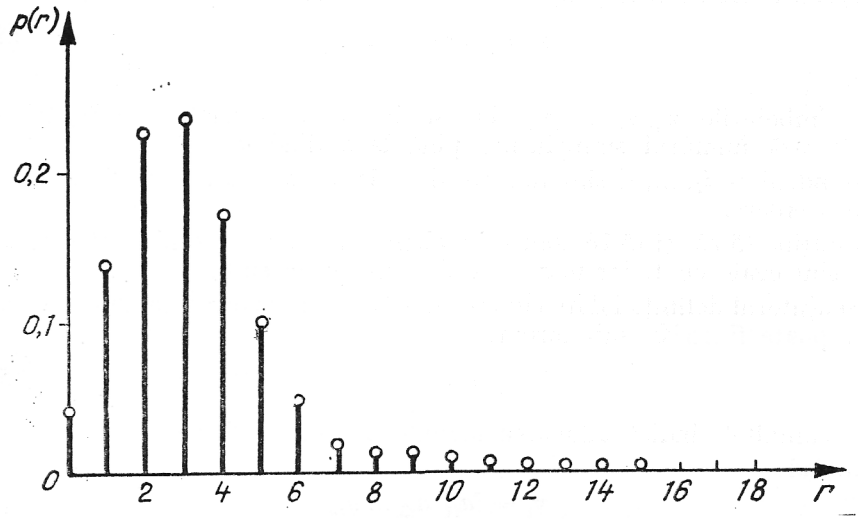


Fig. 5.6. Legea de distribuție a erorilor independente.

Probabilitatea de apariția a r erori independente într-un cuvînt de n simboluri este dată de o *lege de distribuție binominală*:

$$p(r) = C_n^r p^r (1 - p)^{n-r} \tag{5.32}$$

Această lege de distribuție este reprezentată în fig. 5.6 pentru un caz particular. Se vede că această probabilitate scade rapid dacă numărul erorilor crește peste o anumită valoare.

Probabilitatea de apariție a e erori și mai puțin de e erori este dată de *funcția de repartiție* corespunzătoare:

$$P\{r \leqslant e\} = \sum_{r=0}^{e} p(r) = \sum_{r=0}^{e} C_n^r p^r (1 - p)^{n-r} \tag{5.33}$$

După cum rezultă din relațiile (5.32) și (5.33), probabilitatea unei anumite configurații a erorilor depinde în acest caz numai de numărul lor.

5.3.4.2. Pachete de erori

Dacă perturbațiile au o durată mai mare decît durata unui simbol, erorile apar grupate. Aceste erori apar, de obicei, ca urmare a acțiunii perturbațiilor de impulsuri sau a întreruperilor în canalul de transmisiune sau în mediile de stocare a informației (linii telefonice, sisteme de memorie cu bandă magnetică etc.). Se spune în acest caz că apar pachete de erori.

Se numește **pachet de erori** o *succesiune de simboluri* (corecte sau eronate) *în care primul și ultimul simbol sînt eronate și în care simbolurile corecte succesive apar în grupuri mai mici de r.*

Parametrul r caracterizează pachetul de erori. El depinde de caracteristicile statistice ale canalului de transmisiune.

Între ultimul simbol (eronat) al unui pachet de erori și primul simbol (eronat) al pachetului de erori următor se găsesc mai mult de r simboluri corecte succesive.

Două erori între care există $s < r$ simboluri neeronate fac parte din același pachet de erori. Dacă între ele există $s \geqslant r$ simboluri neeronate, ele fac parte din pachete diferite.

Lungimea l a unui pachet de erori se definește ca fiind *numărul total de simboluri* (eronate și neeronate) *care formează pachetul de erori*. Primul și ultimul simbol din pachetul de erori sînt eronate.

Un alt parametru care caracterizează pachetele de erori este **densitatea D a erorilor** definită ca *raportul între numărul de simboluri eronate din pachet și numărul total de simboluri în pachet (lungimea lui)*.

Cuvîntul eroare care conține un pachet de erori de lungime l va avea un număr de l simboluri 0 și 1, din care primul și ultimul simbol al pachetului (corespunzînd simbolurilor eronate) sînt 1, celelalte simboluri fiind 0 sau 1.

El poate fi scris sub forma:

$$\mathbf{e} = [\ldots \alpha_i \ \varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_{i+l-2} \ \alpha_{i+l-1} \ldots] \tag{5.34}$$

unde:

α_i reprezintă simbolul 1 plasat în poziția i;

ε_{i+k} reprezintă simbolul 0 sau 1 plasat în poziția $i + k$, cu restricția că nu pot să apară succesiv un număr de „0" mai mare sau egal cu „r".

5.3.5. Mecanismul de detecție și de corecție a erorilor

Pentru a stabili o modalitate de detecție sau corecție a erorilor se consideră un spațiu m — dimensional ($m = n - k$) care se numește *spațiul de corecție* Z și care are 2^m elemente $\mathbf{z} \in Z$ numite *corectori*. Corectorii se reprezintă prin matrice.

În literatura de specialitate corectorul se mai numește și *vector de control de paritate sau sindrom*.

Corectorii sînt destinați să indice pozițiile din cuvîntul de cod în care s-au introdus erori. În acest scop se stabilește o corespondență univocă între mulțimea tuturor cuvintelor recepționate (respectiv spațiul W) și mulțimea corectorilor (respectiv spațiul Z). Această corespondență se poate stabili definind un operator $\mathcal{K}$ astfel ca:

$$\mathcal{K}\{\mathbf{v}'_i\} = \mathbf{z} \tag{5.35}$$

unde $\mathbf{v}'_i \in W$ și $\mathbf{z} \in Z$.

Dacă $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$, adică dacă transmisiunea s-a făcut fără erori, $\mathbf{z}$ trebuie să fie același pentru orice i indicînd astfel faptul că nu sînt erori. Se alege în acest caz pentru $\mathbf{z}$ valoarea 0 și ca urmare relația (5.35) devine:

$$\mathcal{K}\{\mathbf{v}_i\} = \mathbf{0} \tag{5.36}$$

pentru orice i de la 1 la $S = 2^k$.

În felul acesta se impune operatorului $\mathcal{K}$ condiția ca $\mathcal{K}\{\mathbf{v}'_i\} = \mathbf{0}$, respectiv $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, dacă și numai dacă $\mathbf{v}'_i$ este un cuvînt de cod, respectiv $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$.

Pentru a putea corecta erorile introduse în procesul de transmisiune *este necesar ca pentru fiecare cuvînt eroare care poate fi generat de perturbațiile din canal să existe un singur corector distinct diferit de zero.*

Mulțimea tuturor cuvintelor eroare care trebuie să fie corectate poate fi reprezentată prin puncte în spațiul n-dimensional al erorilor, E.

Corespondența între punctele spațiului E care reprezintă erori corectabile și cele ale spațiului Z trebuie să fie biunivocă. Ea poate fi stabilită definind un operator astfel ca:

$$\mathfrak{D}\{\mathbf{z}\} = \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.37}$$

și

$$\mathfrak{D}^{-1}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{z} \tag{5.38}$$

Cu ajutorul operatorilor $\mathfrak{K}$ și $\mathfrak{D}$ se poate efectua detecția sau corecția erorilor după cum urmează:

— dacă se constată că:

$$\mathfrak{K}\{\mathbf{v}'_i\} \neq 0$$

fără a specifica valoarea lui $\mathbf{z}$, ci doar faptul că este diferit de zero, se spune că s-a efectuat detecția erorilor;

— dacă poziția punctului $\mathbf{z}$ în spațiul Z este cunoscută, dată de:

$$\mathfrak{K}\{\mathbf{v}'_i\} = \mathbf{z}$$

atunci, cu ajutorul operatorului $\mathfrak{D}$, se obține:

$$\mathfrak{D}\{\mathbf{z}\} = \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.39}$$

iar cu ajutorul cuvîntului eroare astfel determinat se obține cuvîntul corectat, respectiv cuvîntul de cod transmis:

$$\mathfrak{D}^{-1}\{\mathbf{v}'_i\} = \mathbf{v}'_i + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{v}_i \tag{5.40}$$

5.3.6. Matricea de corecție (control)

Din cele precedente rezultă că operatorul $\mathfrak{K}$ determină o transformare care este numai univocă de la spațiul cuvintelor recepționate la spațiul corectorilor (transformarea inversă nu este definită).

Cea mai simplă structură pentru operatorul $\mathfrak{K}$ se obține dacă se consideră o transformare liniară care este numai univocă de la spațiul cuvintelor recepționate la spațiul corectorilor, definită de ecuațiile:

$$\begin{aligned}
&h_{11}\, a'_1 + h_{12}\, a'_2 + \ldots + h_{1n}\, a'_n = c_1 \\
&h_{21}\, a'_1 + h_{22}\, a'_2 + \ldots + h_{2n}\, a'_n = c_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&h_{m1}\, a'_i + h_{m2}\, a'_2 + \ldots + h_{mn}\, a'_n = c_m
\end{aligned} \tag{5.41}$$

h_{ij} sînt parametrii care determină transformarea $\mathfrak{K}$;

a_i — simbolurile unui cuvînt recepționat;

c_i — coordonatele care determină punctul $\mathbf{z}$ (componentele corectorului $\mathbf{z}$).

Relațiile (5.41) se pot scrie compact sub formă matriceală. În acest scop se introduce matricea:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \ldots h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} \ldots h_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{m1} & h_{m2} \ldots h_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.42}$$

Matricea $\mathbf{H}$ se numește **matrice de control.**

Prin transformări elementare matricea $\mathbf{H}$ poate fi pusă sub formă echivalentă

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & q_{11} & q_{12} \cdots q_{1k} \\ 0 & 1 \ldots 0 & q_{21} & q_{22} \cdots q_{2k} \\ & & & \\ 0 & 0 \ldots 0 & \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 \ldots 1 & q_{m1} & q_{m2} \cdots q_{mk} \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_m \mathbf{Q}] \tag{5.43}$$

în care $\mathbf{I}_m$ reprezintă matricea unitate de ordinul m, iar $\mathbf{Q}$ este:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \cdots q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} \cdots q_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{m1} & q_{m2} \cdots q_{mk} \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

În cele ce urmează se vor nota cuvintele sub formă de matrice linie:

$$\mathbf{v}' = [a_1' \; a_2' \ldots a_n'] \tag{5.45}$$

iar corectorii sub forma de matrice coloană:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

Cu ajutorul notațiilor precedente, relațiile (5.41) pot fi scrise sub forma:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}'^T = \mathbf{z} \tag{5.47}$$

unde $\mathbf{v}'^T$ este transpusa matricei $\mathbf{v}'$.

Dacă cuvîntul recepționat este un cuvînt de cod ($\mathbf{v}' = \mathbf{v}$), conform relației (5.36) corectorul este nul:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}'^T = 0 \tag{5.48}$$

5.3.7. Codarea codurilor grup cu ajutorul matricei de control H

Convenim în cele ce urmează ca în cuvîntul de cod:

$$\mathbf{v} = [a_1 \ldots a_m \; a_{m+1} \ldots a_n] \tag{5.49}$$

primele m simboluri

$$\mathbf{c} = [a_1 \; a_2 \ldots a_m] \tag{5.50}$$

să fie simboluri redundante care servesc detecției sau corecției de erori și, în consecință, le numim *simboluri de control*, iar ultimele k simboluri:

$$\mathbf{i} = [a_{m+1} \; a_{m+2} \ldots a_{m+k}] \tag{5.51}$$

unde $m + k = n$

să fie simboluri generate de sursă pe care le numim *simboluri de informație.*

Cu aceste notații avem:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{c}\ \mathbf{i}] \tag{5.52}$$

Pentru a determina cele m simboluri de control în funcție de cele k simboluri de informație, facem apel la (5.36) care în cazul unui operator liniar devine:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = 0 \tag{5.53}$$

În conformitate cu notațiile precedente avem

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = [\mathbf{I}_m\ \mathbf{Q}]\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T\\ \mathbf{i}^T\end{bmatrix} = 0$$

respectiv $\mathbf{c}^T + \mathbf{Q}\mathbf{i}^T = 0$

sau

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{Q}\mathbf{i}^T \tag{5.54}$$

Operația de determinare a simbolurilor de control în funcție de simbolurile de informație se numește **codare.**

Relația (5.54) poate fi scrisă:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1k}\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{m+1}\\ a_{m+2}\\ \vdots\\ a_{m+k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix} \tag{5.55}$$

de unde rezultă:

$$a_j = \sum_{i=1}^{k} q_{ji}\ a_{m+i} \qquad j = \overline{1,\ m} \tag{5.56}$$

adică simbolurile de control se obțin din combinații liniare (însumare modulo doi) ale simbolurilor de informație.

Cuvintele de cod astfel formate au proprietatea că pot fi recunoscute ca atare datorită faptului că au corectorul corespunzător nul. Dacă în procesul de transmisiune se introduc erori, corectorul este diferit de zero, iar prin mecanismul indicat de relațiile (5.35), (5.39) și (5.40) se pot corecta erorile.

Dacă cele k simboluri alese arbitrar ca simboluri de informație sînt simboluri succesive plasate la începutul (sau la sfîrșitul cuvîntului de cod) **codul** se numește **sistematic.**

Codurile sistematice au avantajul că operația de corecție a erorilor este simplă și că la decodare separarea simbolurilor de informație se realizează cu un circuit poartă care este deschis numai în intervalul de timp cînd apar simbolurile de informație.

5.3.7.1. Relații între coloanele matricei H în cazul corecției erorilor

Pentru a determina condițiile pe care trebuie să le satisfacă matricea **H** în cazul în care trebuie să fie corectate toate combinațiile de e erori, se consideră cuvîntul recepționat:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

unde $\boldsymbol{\varepsilon}$ este un cuvînt eroare cu e simboluri egale cu 1, respectiv cu e erori:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\ldots\ \alpha_{i_1}\ \ldots.\ \alpha_{i_e}\ \ldots]$$

Corectorul corespunzător cuvîntului $\mathbf{v}'$ este:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{v}'^{T} = \mathbf{H}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon})^{T} = \mathbf{H}\mathbf{v}^{T} + \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^{T} \tag{5.57}$$

și, fiindcă $\mathbf{H}\mathbf{v}^{T} = 0$, rezultă:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^{T} \tag{5.58}$$

sau

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \dots h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} \dots h_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ h_{m1} & h_{m2} \dots h_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_{i_1} \\ \vdots \\ \alpha_{i_e} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{5.59}$$

Pentru simplificare se notează coloanele matricei $\mathbf{H}$ cu $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$ și relația (5.59) poate fi scrisă sub forma:

$$\mathbf{z} = [\mathbf{h}_1\ \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_n] \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_{i_1} \\ \vdots \\ \alpha_{i_e} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{5.60}$$

sau:

$$\mathbf{z} = [\dots \alpha_{i_1}\ \mathbf{h}_{i_1} + \dots + \alpha_{i_e}\ \mathbf{h}_{i_e} + \dots] \tag{5.61}$$

respectiv, fiindcă $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \dots = 1$, rezultă:

$$\mathbf{z} = [\mathbf{h}_{i_1} + \dots + \mathbf{h}_{i_e}] \tag{5.62}$$

Pentru a corecta e erori indiferent de pozițiile în care intervin este necesar, după cum arată relația (5.62), ca sumele modulo 2 a cîte e coloane oarecare din matricea $\mathbf{H}$ să fie distincte.

În felul acesta se obțin corectori distincți pentru fiecare cuvînt eroare care conține e erori. În caz contrar se ajunge la situația că e erori care intervin în poziții diferite să dea naștere aceluiași corector $\mathbf{z}$ și, ca urmare, corecția să nu mai fie posibilă.

Dacă coloanele matricei $\mathbf{H}$ sînt astfel alese încît sumele modulo 2 a cîte e coloane sînt distincte, respectiv:

$$\mathbf{h}_{i_1} + \dots + \mathbf{h}_{i_e} \neq \mathbf{h}_{j_1} + \dots + \mathbf{h}_{j_e} \tag{5.63}$$

pentru orice valori $i_1, \dots, i_e$ distincte, cuprinse între 1 și n și $j_1 \dots j_e$ distincte cuprinse între 1 și n (care pot fi egale cu unele numere $i_1 \dots i_e$ dar nu cu toate), atunci, adunînd în ambii membrii coloanele $\mathbf{h}_{j_1} \dots \mathbf{h}_{j_e}$, se obține:

$$\mathbf{h}_{i_1} + \dots + \mathbf{h}_{i_e} + \mathbf{h}_{j_1} + \dots + \mathbf{h}_{j_e} \neq 0 \tag{5.64}$$

respectiv ordonînd:

$$\mathbf{h}_{i_1} + \dots + \mathbf{h}_{i_{2e}} \neq 0 \tag{5.65}$$

pentru orice valori $i_1 \dots i_{2e}$ cuprinse între 1 și n.

Dacă coloanele matricei $\mathbf{H}$ îndeplinesc condițiile date de relația (5.63), respectiv(5.65), atunci există posibilitatea de a se corecta e erori oarecare.

Se poate arăta că în acest caz distanța minimă între două cuvinte de cod este egală cu $2e + 1$. Pentru aceasta se consideră distanța între două cuvinte oarecare:

$$D(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \oplus a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_k \tag{5.66}$$

unde s-a introdus notația

$$b_k = a_{ik} \oplus a_{jk}$$

Simbolurile b_k astfel obținute sînt simbolurile unui cuvînt de cod **w** fiindcă satisfac relația:

$$\mathbf{H}\mathbf{w}^T = 0 \tag{5.67}$$

unde:

$$\mathbf{w} = [b_1\ b_2 \ldots b_n] = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j \tag{5.68}$$

Într-adevăr:

$$\mathbf{H}\mathbf{w}^T = \mathbf{H}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j)^T = \mathbf{H}\mathbf{v}_i^T + \mathbf{H}\mathbf{v}_j^T = 0 \tag{5.69}$$

Din relația (5.66) rezultă că distanța între două cuvinte de cod oarecare este egală cu numărul de componente diferite de zero ale unui alt cuvînt de cod.

Numărul de componente diferite de zero într-un cuvînt de cod se numește **ponderea cuvîntului de cod.**

Rezultă deci, că distanța între două cuvinte de cod este egală cu ponderea altui cuvînt de cod și, ca urmare, cuvîntul de cod cu ponderea cea mai mică diferită de zero determină distanța minimă între cuvintele de cod. Cu alte cuvinte, *distanța minimă între cuvintele de cod este egală cu ponderea minimă a unui cuvînt de cod.*

Dacă se presupune că **w** este un cuvînt de cod cu pondere egală cu $2e + 1$, atunci acest cuvînt poate fi notat:

$$\mathbf{w} = [\ldots\ \alpha_{i_1} \ldots\ \alpha_{i_{2e+1}} \ldots] \tag{5.70}$$

Fiindcă **w** este cuvînt de cod, are loc relația:

$$\mathbf{H}\mathbf{w}^T = 0 \tag{5.71}$$

respectiv:

$$\alpha_{i_1}\ \mathbf{h}_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_{2e+1}}\ \mathbf{h}_{i_{2e+1}} = 0 \tag{5.72}$$

sau

$$\mathbf{h}_{i_1} + \ldots + \mathbf{h}_{i_{2e+1}} = 0 \tag{5.73}$$

Dacă suma a $2e$ coloane oarecare este diferită de zero, atunci nu există nici o relație de forma:

$$\mathbf{h}_{i_1} + \ldots + \mathbf{h}_{i_{2e}} = 0 \tag{5.74}$$

respectiv nu există nici un cuvînt cu ponderea mai mică decît $2e + 1$, aceasta fiind ponderea minimă.

5.3.7.2. Relații între coloanele matricei H în cazul detecției erorilor

Cazul cînd în locul corecției erorilor se intenționează să se facă numai detecția erorilor poate fi tratat în mod analog, punînd însă o condiție mai puțin restrictivă pentru corectorii **z.**

Într-adevăr, pentru corectorii **z** dați de relația (5.58) se impune condiția să fie diferiți de zero fără să fie distincți.

Se presupune că numărul erorilor care trebuie să fie detectate este d. În acest caz cuvîntul eroare este de forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\ldots\ \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_d} \ldots] \tag{5.75}$$

și din relația:

$$\mathbf{H}'\boldsymbol{\varepsilon}^T \neq 0$$

notînd prin $\mathbf{h}'_1, \mathbf{h}'_2, \ldots, \mathbf{h}'_n$ coloanele matricei $\mathbf{H}'$ (notată cu prim pentru a se distinge de cazul precedent) se obține:

$$[\mathbf{h}'_1\ \mathbf{h}'_2 \ldots \mathbf{h}'_n] \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_{i_1} \\ \vdots \\ \alpha_{i_d} \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

respectiv:

$$\mathbf{h}'_{i_1} + \ldots + \mathbf{h}'_{i_d} \neq \mathbf{0} \tag{5.76}$$

pentru orice $i_1, \ldots, i_d$ distincți cuprinși între 1 și n.

Din relația (5.76) rezultă că în cazul detecției unei singure erori matricea $\mathbf{H}'$ trebuie să aibă toate coloanele diferite de zero (putînd fi eventual egale între ele).

Din relațiile (5.75) și (5.76) rezultă că detecția a $d = 2e$ erori este echivalentă cu corecția a e erori și invers.

Dacă numărul erorilor care trebuie să fie detectate este impar:

$$d = 2p + 1 \qquad p = 0, 1, \ldots \tag{5.77}$$

atunci matricea de control $\mathbf{H}'$ poate fi determinată cu ușurință ținînd seama că în acest caz, conform relației (5.66), se impune condiția:

$$\mathbf{h}'_{i_1} + \ldots + \mathbf{h}'_{i_{2p+1}} \neq \mathbf{0} \tag{5.78}$$

care este satisfăcută dacă se pune:

$$\mathbf{h}'_{i_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{i_1} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{h}'_{i_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{i_2} \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots \tag{5.79}$$

respectiv:

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_n \\ 1 & 1 \quad 1 \end{bmatrix} \tag{5.80}$$

Într-adevăr, introducînd relațiile (5.79) în relația (5.78) și ținînd seama de faptul că suma modulo 2 a unui număr par de simboluri 1 este nulă, se obține:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{i_1} + \ldots + \mathbf{h}_{i_{2p}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{i_{2p+1}} \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0 \tag{5.81}$$

După cum se vede, această relație este satisfăcută pentru orice valori ale coloanelor $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n$, în particular și pentru valori nule.

Prin urmare, dacă singura condiție care se impune codului este de a detecta erorile impare, matricea $\mathbf{H}$ poate avea forma:

$$\mathbf{H}' = [1, 1, \ldots 1] \tag{5.82}$$

În acest caz în cuvîntul de cod:

$$\mathbf{v} = [a_1\ a_2 \ldots a_{n-1}\ a_n] \tag{5.83}$$

ultimele $k = n - 1$ simboluri se aleg arbitrar și reprezintă simboluri de informație, iar primul simbol a_1 este simbolul de verificare a parității de-

terminat de relația $\mathbf{H}'\mathbf{v}^T = \mathbf{0}$ care, ținînd seama de relația (5.82), poate fi scrisă:

$$a_1 = a_2 + a_3 + \ldots + a_n \tag{5.84}$$

Dacă la recepție $\mathbf{H}'\mathbf{v}'^T \neq \mathbf{0}$, respectiv:

$$a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_{n-1} + a'_n \neq 0, \tag{5.85}$$

se poate afirma că în procesul de transmisiune s-a introdus un număr impar de erori.

Prin adăugarea unui simbol de control al parității, pe lîngă simbolurile de corecție, se obține o informație suplimentară asupra erorilor și anume informația că sînt în număr par sau impar. În cazul corecției unei erori această adăugire dă posibilitatea să se corecteze o eroare și să se detecteze toate erorile duble. În acest caz matricea de control este de forma (5.80) sau, dacă simbolul de control al parității se adaugă fără a micșora numărul simbolurilor de informație, este de forma:

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_n \\ 1 & 1 & 1 \quad 1 \end{bmatrix} \tag{5.86}$$

cuvîntul de cod avînd în acest caz $n + 1$ simboluri.

Corectorul este:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}'\mathbf{v}'^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{5.87}$$

unde $c_2 \in GF(2)$

respectiv:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_n \\ 1 & 1 & 1 \ \ldots 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + a'_1\mathbf{h}_1 + \ldots + a'_n\mathbf{h}_n \\ a'_0 + a'_1 \quad + \ldots + a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{z} \tag{5.88}$$

Se consideră că matricele coloană $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_n$ din matricea $\mathbf{H}$ îndeplinesc condițiile necesare corecției unei erori. În această ipoteză considerăm următoarele cazuri:

— $\mathbf{c}_1 = 0$ și $c_2 = 0$ unde $\mathbf{c}_1$ este o matrice coloană cu m elemente; în acest caz decidem că nu sînt erori;

— $\mathbf{c}_1 \neq 0$ și $c_2 = 1$; decidem că există o eroare corectabilă;

— $\mathbf{c}_1 = 0$ și $c_2 = 1$; decidem că simbolul a'_0 este eronat;

— $\mathbf{c}_1 \neq 0$ și $c_2 = 0$; decidem că există două erori necorectabile.

Cu o probabilitate mică, deciziile pot fi eronate.

5.3.8. Codarea codurilor grup cu ajutorul matricei generatoare G

Ținînd seama de notațiile introduse în § 5.3.6 se definește o matrice $\mathbf{G}$ numită **matrice generatoare** care satisface relația:

$$\mathbf{v} = \mathbf{iG} \tag{5.89}$$

Pentru a vedea legătura între matricea **G** și matricea **H** înlocuim pe **v** din relația:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = \mathbf{0}$$

și se obține:

$$\mathbf{H}(\mathbf{i}\mathbf{G})^T = \mathbf{H}\mathbf{G}^T\mathbf{i}^T = \mathbf{0} \tag{5.90}$$

Fiindcă această relație este valabilă pentru orice simboluri de informație, rezultă:

$$\mathbf{H}\mathbf{G}^T = \mathbf{0} \tag{5.91}$$

Ori **H**, conform relației (5.43) este:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I}_m \ \mathbf{Q}] \tag{5.92}$$

unde **Q** este o matrice cu m linii și k coloane dată de relația (5.44).

Se observă că dacă **G** este de forma:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{Q}^T \ \mathbf{I}_k] \tag{5.93}$$

atunci relația (5.91) este satisfăcută:

$$\mathbf{H}\mathbf{G}^T = [\mathbf{I}_m \ \mathbf{Q}] \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{I}_k \end{bmatrix} = [\mathbf{Q} + \mathbf{Q}] = \mathbf{0}$$

Notăm cu **P** matricea $\mathbf{Q}^T$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T \tag{5.94}$$

respectiv:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} \cdots p_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{k1} & p_{k2} \cdots p_{km} \end{bmatrix} \tag{5.95}$$

deci:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{P} \ \mathbf{I}_k] \tag{5.96}$$

sau

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} p_{11} \cdots p_{1m} & 1 & 0 \ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ p_{k1} \cdots p_{km} & 0 & \ldots 1 \end{bmatrix} \tag{5.97}$$

Ținînd seama de relațiile (5.52) (5.89) și (5.96) avem:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{c} \ \mathbf{i}] = \mathbf{i}[\mathbf{P} \ \mathbf{I}_k] = [\mathbf{i}\mathbf{P} \ \mathbf{i}] \tag{5.98}$$

de unde rezultă:

$$\mathbf{c} = \mathbf{i} \ \mathbf{P} \tag{5.99}$$

relație care ne dă simbolurile de control în funcție de simbolurile de informație.

Ținînd seama de relația (5.99) avem

$$\mathbf{c} = [a_{m+1} \ a_{m+2} \ldots a_{m+k}] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} \cdots p_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{k1} & p_{k2} \cdots p_{km} \end{bmatrix} \tag{5.100}$$

respectiv simbolurile de control a_j, $j \leqslant m$ sînt

$$a_j = \sum_{i=1}^{k} a_{m+1}\ p_{ij} \tag{5.101}$$

5.3.9. Formarea corectorilor

Corectorul dat de relația (5.47) poate fi pus sub forma:

$$\mathbf{z}^T = \mathbf{v}'\mathbf{H}^T \tag{5.102}$$

sau

$$\mathbf{z}^T = [\mathbf{c}'\ \mathbf{i}'][\mathbf{I}_m\ \mathbf{P}^T]^T \tag{5.103}$$

unde $\mathbf{c}'$ este matricea simbolurilor de control recepționate;
$\mathbf{i}'$ — matricea simbolurilor de informație recepționate.

Efectuînd transpunerea rezultă:

$$\mathbf{z}^T = [\mathbf{c}'\ \mathbf{i}'] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}' + \mathbf{i}'\mathbf{P}] \tag{5.104}$$

Ținînd seama de relația (5.99) rezultă că termenul notat cu $\mathbf{c}''$:

$$\mathbf{c}'' = \mathbf{i}'\mathbf{P} \tag{5.105}$$

reprezintă simbolurile de control ce rezultă din operația de codificare a simbolurilor de informație recepționate.

Cu notațiile de mai sus avem:

$$\mathbf{z}^T = [\mathbf{c}' + \mathbf{c}''] \tag{5.106}$$

Operațiile necesare realizării relației (5.106) sînt arătate în fig. 5.7.

5.3.10. Codul Hamming grup corector de o eroare

Pentru corecția unei singure erori, numărul corectorilor 2^m trebuie să fie egal cu $n + 1$ sau mai mare pentru a putea indica o eroare într-unul din cele n simboluri ale cuvîntului recepționat sau pentru a indica că nu sînt erori. Deci:

$$2^m \geqslant n + 1 \tag{5.107}$$

sau

$$2^m \geqslant k + m + 1 \tag{5.108}$$

este relația care determină numărul simbolurilor de control cînd se dă numărul k al simbolurilor de informație, în cazul corecției unei singure erori.

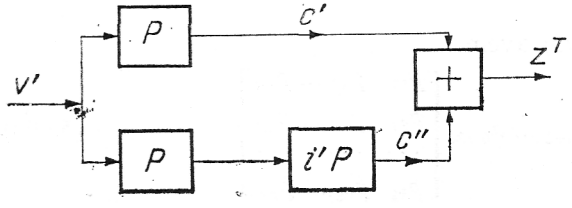


Fig. 5.7. Determinarea corectorilor.

Codul Hamming este caracterizat de o matrice de control **H**, în care coloana $\mathbf{h}_i$ este reprezentarea binară a numărului i:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1\ \mathbf{h}_2\ \mathbf{h}_3 \ldots \mathbf{h}_n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 1 & 1 & . & . \\ 1 & 0 & 1 & . & . \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

Se remarcă că $\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j \neq 0$ pentru $\forall\ i \neq j$.

Cuvîntul eroare, cu o singură eroare este:

$$\varepsilon = [\ldots\ \alpha_i\ \ldots] \quad (5.110)$$

Dacă se transmite $\mathbf{v}_j$ se recepționează

$$\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j + \varepsilon \quad (5.111)$$

Corectorul corespunzător este:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{v}'^{T}_j = \mathbf{H}\varepsilon^T$$

sau

$$\mathbf{z} = [\mathbf{h}_1\ \mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_i \ldots \mathbf{h}_m] \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{h}_i \quad (5.112)$$

adică corectorul este reprezentarea binară a numărului i care indică poziția în care există o eroare.

Acest fapt face ca decodarea să fie foarte simplă necesitînd de fapt o conversie de la binar la zecimal.

Codul Hamming poate corecta toate erorile simple însă nu poate corecta nici o eroare dublă motiv pentru care se spune că este un cod perfect.

Codurile care pot corecta e erori în orice poziții, dar nu pot corecta nici o configurație particulară de e + 1 erori sau mai multe se numesc **coduri perfecte.**

5.3.10.1. Codarea codului Hamming

Pentru simplificarea calculului, cele m poziții ale simbolurilor de contro se aleg astfel încît corespund vectorilor coloană $\mathbf{h}_i$ cu o singură componentă diferită de 0.

Aceste poziții sînt: $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{m-1}$. Simbolurile de control se vor nota cu c_i, iar cele de informație cu i_j. Cu aceste notații un vector cod se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{v} = [c_1\ c_2\ i_3\ c_4\ i_5 \ldots i_n] \quad (5.113)$$

După modul de dispunere a simbolurilor de control rezultă că acest cod nu este un cod sistematic.

Simbolurile de control sînt date de relația

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = 0$$

respectiv

$$[\mathbf{h}_1\ \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_n]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

sau

$$c_1\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\0\end{bmatrix} + i_3\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\1\end{bmatrix} + \dots i_n\begin{bmatrix}1\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\1\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

relație echivalentă cu m ecuații în care simbolurile $c_1, c_2, c_4 \dots$ nu intervin decît o singură dată, deci pot fi exprimate în funcție de simbolurile de informație.

Începînd cu ultima linie se poate scrie:

$$\begin{aligned} c_1 &= i_3 + i_5 + \dots + i_n \\ c_2 &= i_3 + i_6 + \dots + i_n \\ c_4 &= i_5 + i_6 + \dots + i_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{5.114}$$

5.3.10.2. **Decodarea codului Hamming**

La recepție, cuvîntul recepționat $\mathbf{v}'$ se introduce într-un dispozitiv cu celule binare de memorie și apoi se calculează corectorul cu relația:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{v}'^{T} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix} = [\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_n]\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ i_n' \end{bmatrix}$$

Ținînd seama de structura matricei $\mathbf{H}$, în mod analog calculului precedent se obține:

$$\begin{aligned} e_m &= c_1' + i_3' + i_5' + \dots + i_n' \\ e_{m-1} &= c_2' + i_3' + i_6' + \dots + i_n' \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{5.115}$$

Numărul binar astfel calculat ($e_1\ e_2 \dots e_m$) este introdus într-un descifrator (respectiv într-un convertor binar-zecimal) la ieșirea căruia se obține un semnal care indică poziția erorii, permițînd astfel corecția ei.

Exemplu. Se consideră cazul cînd $k = 4$. Din relația (5.108) rezultă $m = 3$ și $n = 7$. Matricea de control este:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

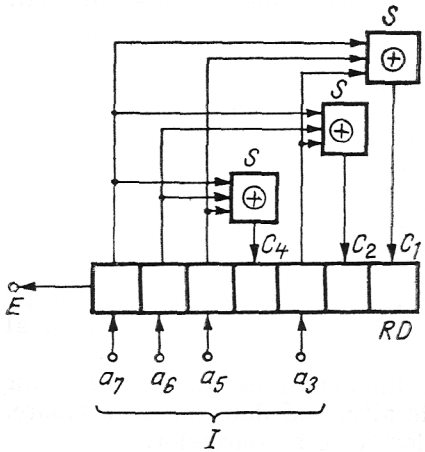


Fig. 5.8. Schema unei unități de codare pentru un cod Hamming corector de o eroare.

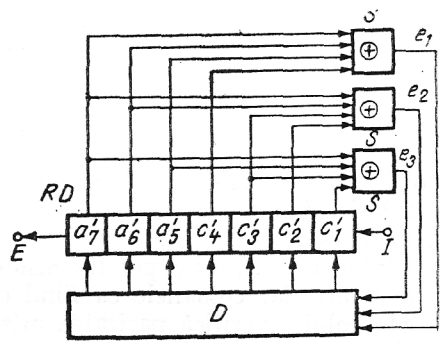


Fig. 5.9. Schema unei unități de decodare pentru un cod Hamming corector de o eroare.

Cuvîntul de cod este:

$$\mathbf{v} = [c_1\ c_2\ i_3\ c_4\ i_5\ i_6\ i_7]$$

Relațiile care determină simbolurile de control sînt:

$$c_1 = i_3 + i_5 + i_7$$
$$c_2 = i_3 + i_6 + i_7$$
$$c_4 = i_5 + i_6 + i_7$$

Codarea poate fi realizată de schema din fig. 5.8 în care *RD* este un registru de deplasare, iar calculul simbolurilor de corecție se face cu sumatoare modulo 2. După formarea cuvîntului de cod intrările în registru sînt blocate și conținutul lui apare la ieșire sub forma unei succesiuni de impulsuri (în ritmul impulsurilor de tact) care reprezintă cuvîntul de cod.

La recepție decodarea poate fi realizată cu schema din fig. 5.9.

Calculul corectorilor se face după relațiile:

$$e_1 = c'_4 + i'_5 + i'_6 + i'_7$$
$$e_2 = c'_2 + i'_3 + i'_6 + i'_7$$
$$e_3 = c'_1 + i'_3 + i'_5 + i'_7$$

iar corectorul ($e_1\ e_2\ e_3$) este introdus în descifratorul *D* care dă un semnal de corecție a erorii în celula care are numărul de ordine reprezentat binar de ($e_1\ e_2\ e_3$).

Separarea simbolurilor de informație se face cu ajutorul unor circuite poartă plasate la ieșire (nu sînt arătate în figură) care se deschid în momentele cînd simbolurile de informație apar la ieșire (codul nefiind sistematic, această operație complică instalația de decodare).

5.3.11. Coduri iterate

Prin combinarea a două sau mai multe coduri se pot obține coduri cu posibilități mai mari de detecție sau corecție a erorilor decît codurile originale.

Astfel, prin iterarea unor coduri detectoare de erori se poate obține un cod corector de erori.

Pentru aceasta se dispun simbolurile de informație ale cuvintelor de cod, unele sub altele, sub formă de tabel:

c_{10}	$a_{11}\ \ a_{12}\ \ \ldots\ a_{1k}$
c_{20}	$a_{21}\ \ a_{22}\ \ \ldots\ a_{2k}$
	$\ldots\ldots\ldots\ldots$
c_{s0}	$a_{s1}\ \ a_{s2}\ \ \ldots\ a_{sk}$
c	$c_1\ \ c_2\ \ \ldots\ c_k$

apoi la fiecare linie se adaugă un simbol (c_{i0}) de control al parității pe acea linie. Analog, la fiecare coloană se adaugă un simbol de control al parității (c_j).

Liniile acestui tabel pot fi considerate ca fiind cuvintele unui cod detector de o eroare, iar coloanele ca fiind cuvintele altui cod detector de o eroare.

Simbolul c verifică paritatea atît a liniilor cît și a coloanelor.

Se poate arăta că dacă c verifică paritatea pe linii, în mod obligatoriu o verifică și pe coloane. Pentru aceasta să considerăm suma primei coloane și a ultimei linii:

$$c = \sum_{i=1}^{s} c_{i0} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} a_{ij}$$

$$c' = \sum_{j=1}^{k} c_j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{s} a_{ij}$$

Deci $c = c'$

Codul rezultant este capabil să corecteze o eroare fiindcă această eroare afectează atît paritatea pe o linie cît și paritatea pe o coloană. Simbolul eronat este localizat prin cunoașterea celor două simboluri de control diferite de zero și se află la intersecția dintre linia și coloana respectivă. Transmisiunea se face linie după linie (sau coloană) și decodarea se face după ce la recepție a fost completat întreg tabelul.

5.4. Coduri ciclice

Codurile ciclice sînt *coduri bloc în care cele n simboluri care formează un cuvînt sînt considerate ca fiind coeficienții unui polinom de grad n — 1* și anume:

$$v(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \tag{5.116}$$

Ca și în cazul codurilor grup, simbolurile unui cuvînt de cod, respectiv coeficienții polinomului $v(x)$, pot fi reprezentați și sub formă de matrice linie

$$\mathbf{v} = [a_0\ a_1 \ldots a_{n-1}] \tag{5.117}$$

Codurile ciclice au proprietatea că dacă v este cuvînt cu sens, atunci și orice permutare ciclică a simbolurilor sale este un cuvînt cu sens:

$$[a_i\ a_{i+1} \ldots a_{n-1}\ a_0 \ldots a_{i-1}]$$

Mulțimea tuturor cuvintelor formează o **algebră**, iar *mulțimea cuvintelor cu sens formează un* **ideal.**

5.4.1. Generarea cuvintelor

Mulțimea tuturor cuvintelor, cu sens sau fără sens, este reprezentată de clase de resturi modulo un polinom $p(x)$ de grad n cu coeficienți în $GF(2)$.

Să considerăm inelul tuturor polinoamelor și în acest inel considerăm idealul format din toți multiplii polinomului $p(x)$ de grad n.

Prin mecanismul descris la codurile grup (§ 5.3) formăm clasele de resturi, prima clasă fiind idealul generat de $p(x)$:

$$\begin{array}{llll}
0 & p(x) & xp(x) \ldots 0 + & \text{multiplii lui } p(x) \\
1 & 1 + p(x) & 1 + xp(x) \ldots 1 + & \text{„ „ „} \\
x & x + p(x) & x + xp(x) \ldots x + & \text{„ „ „} \\
1+x & 1 + x + p(x) & 1 + x + xp(x) \ldots 1 + x + & \text{„ „ „} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \qquad (5.118)$$

Clasele de resturi modulo $p(x)$ formează o algebră.

Pentru a specifica că este vorba de clase de resturi se introduce notația

$$\{a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}\}$$

sau notația

$$a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$$

în care x a fost înlocuit cu X pentru comoditatea scrisului; cînd nu se pot crea confuzii clasele de resturi vor fi notate cu polinoame în x și nu în X.

În cele ce urmează considerăm că mulțimea tuturor cuvintelor formează o algebră generată de un polinom $p(x)$ de grad n.

Polinomul $p(x)$ poate fi ales arbitrar, dar, pentru a obține unele rezultate similare cu cele obținute la codurile grup, dorim ca produsul $u(X) \cdot v(X) = 0$ unde $u(X)$ și $v(X)$ sînt elemente în algebra modulo $p(x)$, să se exprime sub o formă asemănătoare cu produsul scalar $<u, v> = 0$.

Acest lucru se întîmplă dacă alegem:

$$p(x) = x^n + 1$$

Exemplu

$$p(X) = x^3 + 1$$

$$u(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

$$v(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2$$

$$u(X) \cdot v(X) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)X^3 + a_2b_2X^4$$

Dat fiind că polinomul $p(x)$ se găsește în prima clasă de resturi, avem:

$$p(X) = X^3 + 1 = 0$$

de unde $X^3 = 1$, $X^4 = X$

Înlocuind obținem:

$$u(X) \cdot v(X) = a_0b_0 + a_1b_2 + a_2b_1 + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_2)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2$$

Dacă $u(X) \cdot v(X) = 0$ atunci

$$\begin{aligned}
a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0 \\
a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_2 &= 0 \\
a_0b_0 + a_1b_2 + a_2b_1 &= 0
\end{aligned} \qquad (5.119)$$

Observăm că prima ecuație este asemănătoare produsului scalar $<u, v> = 0$ în care componentele unui vector sînt scrise în ordine inversă. Mai mult, orice permutare ciclică a coeficienților dă tot un produs scalar nul.

5.4.2. Specificarea cuvintelor cu sens

Mulțimea claselor de resturi modulo $p(x) = x^n + 1$ are 2^n elemente. Din acestea alegem un număr de 2^k cărora le atribuim sens și anume atribuim sens elementelor idealului generat de un polinom $g(x)$ de grad m numit **polinom generator.**

Fiindcă elementul „0" trebuie să facă parte din ideal, rezultă că există un polinom $h(x)$, astfel încît:

$$g(X) \cdot h(X) = 0 = p(X) \tag{5.120}$$

din această relație rezultă că polinomul $g(x)$ trebuie să fie divizor al polinomului $p(x)$

$$g(x) = \frac{p(x)}{h(x)} = \frac{x^n + 1}{h(x)} \tag{5.121}$$

Ținînd seama de cele precedente, cuvintele de cod pot fi specificate în două moduri.

5.4.2.1. Codarea cuvintelor de cod ca elemente în idealul generat de $g(x)$ de grad m

În acest caz $v(x)$ trebuie să fie un multiplu a lui $g(x)$:

$$v(x) = i(x)\, g(x) \tag{5.122}$$

unde $i(x)$ este **polinomul simbolurilor de informație**

$$i(x) = a_m + a_{m+1}x + \ldots + a_{m+k-1}x^{k-1} \tag{5.123}$$

Polinomul generator este notat:

$$g(x) = g_0 + g_1 x + \ldots + g_{m-1}x^{m-1} + x^m \tag{5.124}$$

fiind, în mod obligatoriu, de grad m, $g_m = 1$.

Relația (5.122) dă o metodă de codificare, însă codul astfel obținut nu este cod sistematic.

Pentru a obține un cod sistematic se procedează după cum urmează:

Polinomul simbolurilor de control se notează cu:

$$c(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_{m-1}x^{m-1} \tag{5.125}$$

deci

$$v(x) = c(x) + x^m i(x)$$

Efectuăm împărțirea:

$$\frac{x^m i(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \tag{5.126}$$

$r(x)$ fiind restul împărțirii, polinom de grad mai mic decît m.

Relația (5.126) poate fi scrisă

$$\frac{r(x)}{g(x)} + \frac{x^m i(x)}{g(x)} = q(x) \tag{5.127}$$

sau

$$r(x) + x^m i(x) = q(x) \cdot g(x) \tag{5.128}$$

Cuvîntul de cod fiind multiplu al lui $g(x)$ rezultă

$$c(x) = r(x) = rest \frac{x^m i(x)}{g(x)} \tag{5.129}$$

adică polinomul simbolurilor de control se obține din divizarea polinomului simbolurilor de informație multiplicat cu x^m, prin polinomul $g(x)$.

În felul acesta $v(x)$ este cuvîntul de cod al unui cod sistematic.

Ținînd seama că:

$$v(x) = q(x)\, g(x) \tag{5.130}$$

unde $q(x) = q_0 + q_1 x + \ldots + q_{k-1} x^{k-1}$ (5.131)

se poate scrie:

$$v(x) = q_0 g(x) + q_1 x g(x) + \ldots + q_{k-1} x^{k-1} g(x) \tag{5.132}$$

cu alte cuvinte $v(x)$ se găsește în spațiul linie al matricei:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(X) \\ Xg(X) \\ \vdots \\ X^{k-1} g(X) \end{bmatrix} \tag{5.133}$$

Reamintim că spațiul linie al unei matrici este format din mulțimea combinațiilor liniare ale vectorilor linie ai matricei.

Ori **G**, conform relației (5.124), se poate scrie:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(X) \\ Xg(X) \\ \vdots \\ X^{k-1} g(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 \ldots g_m & 0 \ldots 0 \\ 0 & g_0 \ldots g_m & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 & g_0\ g_1 & \ldots g_m \end{bmatrix} \tag{5.134}$$

unde elementele liniilor sînt coeficienții unui polinom de grad $n-1$ ($v(x)$ este de grad $n-1$) iar coeficienții puterilor lui x absente au fost înlocuiți cu zero.

Matricea **G** se numește **matrice generatoare** și are k linii și n coloane; cu ea se poate face codificarea conform relației (5.89):

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\ \mathbf{G}$$

care este echivalentă cu relația (5.122) în sensul că ambele ne dau aceleași simboluri de control.

5.4.2.2. Codarea cuvintelor de cod ca elemente în spațiul nul al idealului generat de $h(x)$ de grad k

Pornind de la relația (5.130), multiplicînd cu:

$$h(x) = h_0 + h_1 x + \ldots h_k x^k \tag{5.135}$$

obținem:

$$v(x)\, h(x) = q(x)\, g(x)\, h(x)$$

respectiv, ținînd seama că polinoamele respective sînt clase de resturi și că avem relația (5.120), se poate scrie:

$$v(X)\, h(X) = q(X)\, g(X)\, h(X)$$

adică

$$v(X)\, h(X) = 0 \tag{5.136}$$

relație care spune că $v(x)$ se găsește în spațiul nul al idealului generat de $h(x)$.

Produsul $v(X)\, h(X)$ prin generalizarea relațiilor (5.119) poate fi scris ca produs scalar cu componentele vectorului $h(x)$ scrise în ordine inversă:

$$\begin{aligned}
&(a_0\ a_1 \dots a_{n-1})\ (0 \dots 0\ \ h_k\ \ h_{k-1} \dots h_0) = 0\\
&(a_0\ a_1 \dots a_{n-1})\ (0 \dots h_k\ \ h_{k-1}\ \dots\ h_0\ 0\ ) = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(a_0\ a_1 \dots a_{n-1})\ (h_k\ \ h_{k-1} \dots h_0\ 0 \dots 0) = 0
\end{aligned} \tag{5.137}$$

restul ecuațiilor nu prezintă interes fiindcă din cele n ecuații date de permutările ciclice numai $n - k = m$ sînt independente.

Setul de ecuații (5.137) care permit să se determine simbolurile de control în funcție de cele de informație pot fi scrise:

$$\begin{bmatrix} 0 \dots 0\ \ h_k\ \ h_{k-1} \dots h_0 \\ 0 \dots h_k \dots\dots h_0\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ h_k \dots h_0\ 0 \dots\dots 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = 0 \tag{5.138}$$

sau notînd:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \dots\ 0\ \ h_k \dots\ \ h_0 \\ 0 \dots 0\ \ h_k\ \ \dots\ \ h_0\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots 0 \\ h_k \dots\ \ h_0\ 0 \dots 0\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.139}$$

avem:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = 0 \tag{5.140}$$

deci matricea $\mathbf{H}$ dată de relația (5.139) este matricea de control, relația (5.140) fiind echivalentă cu relația (5.136).

Ținînd seama de relația (5.120), de (5.134) și de (5.139) se poate arăta că

$$\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{H}\mathbf{G}^T = 0 \tag{5.141}$$

5.4.3. Decodarea

Problema decodării constă în *găsirea unei corespondențe între cuvîntul eronat recepționat $v'(x)$ și cuvîntul $\varepsilon(x)$ care reprezintă erorile introduse de canal.*

$$v'(x) = v(x) + \varepsilon(x) \tag{5.142}$$

Dacă recepționînd $v'(x)$ se poate calcula $\varepsilon(x)$ atunci corecția se realizează prin însumarea modulo doi:

$$v(x) = v'(x) + \varepsilon(x) \tag{5.143}$$

După cum s-a văzut în § 5.3.8 relația (5.106) corectorul se obține prin însumarea simbolurilor de control recepționate $c'(x)$ cu simbolurile de control obținute prin codificarea simbolurilor de informație recepționate

$$c''(x) = rest\ \frac{x^m i'(x)}{g(x)} \tag{5.144}$$

respectiv:

$$z(x) = c'(x) + c''(x) \tag{5.145}$$

sau

$$z(x) = c'(x) + rest\ \frac{x^m i'(x)}{g(x)} \tag{5.146}$$

Polinomul $c'(x)$ fiind de grad mai mic decît m se poate scrie:

$$z(x) = rest\ \frac{c'(x) + x^m i(x)}{g(x)} \tag{5.147}$$

sau

$$z(x) = rest\ \frac{v'(x)}{g(x)} \tag{5.148}$$

sau ținînd seama de relația (5.142):

$$z(x) = rest\ \frac{\varepsilon(x)}{g(x)} \tag{5.149}$$

Polinomul $z(x)$ are gradul cel mult $m - 1$, deci numărul acestor corectori este 2^m (sînt m termeni). Rezultă că din mulțimea configurațiilor posibile de erori, respectiv polinoame $\varepsilon(x)$ în număr de 2^n numai cele care pot fi puse în corespondență biunivocă cu corectorii $z(x)$ adică un număr de 2^m configurații de erori pot fi corectate.

Relația (5.149) este echivalentă cu relația:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^T \tag{5.150}$$

● **Decodarea pe baza tabloului claselor de resturi.** Prima clasă este formată de idealul generat de $g(x)$. Prima coloană este formată din polinoame pe care le considerăm cuvinte eroare. La urmă rezervăm o coloană pentru corectori:

	Cuvinte recepționate		corectori $z(x)$
	Cuvinte eroare		
Cuvinte cu sens	0	$v_1(x)\ v_2(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_s(x)$	
Cuvinte fără sens	$\varepsilon_1(x)$	$\varepsilon_1 + v_1\ \varepsilon_1 + v_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varepsilon_1 + v_s$	$z_1 = \text{rest}\ \frac{\varepsilon_1(x)}{g(x)}$
	$\varepsilon_2(x)$	$\varepsilon_2 + v_1\ \varepsilon_2 + v_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varepsilon_2 + v_s$	$z_2 = \text{rest}\ \frac{\varepsilon_2(x)}{g(x)}$
	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮

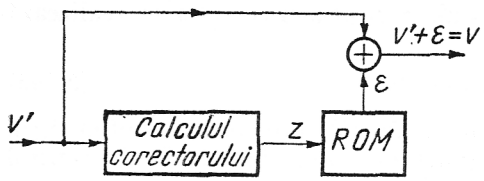


Fig. 5.10. Procedeu de codare bazat pe clase de resturi.

Se observă că pentru toate cuvintele dintr-o clasă de resturi (linie) corectorul este același. Astfel, pentru clasa la care primul element este ε_j, un cuvînt oarecare din această clasă are corectorul:

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{H}(\boldsymbol{\varepsilon}_j + \mathbf{v}_k)^T = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_j^T + \mathbf{H}\mathbf{v}_k^T = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_j^T \quad k = \overline{1, s} \tag{5.151}$$

Din acest fapt rezultă *procedeul de decodare* și anume:

— la fiecare cuvînt recepționat $\mathbf{v}'$ se calculează corectorul $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{v}'^T$;

— din tabloul claselor de resturi se vede care este cuvîntul eroare $\boldsymbol{\varepsilon}$ corespunzător corectorului;

— se adună $\boldsymbol{\varepsilon}$ cu $\mathbf{v}'$ și se obține $\mathbf{v}$.

Acest procedeu de decodare este valabil numai dacă corectorului calculat nu-i corespunde decît un singur cuvînt eroare. În caz contrar se poate face detecție de erori însă nu se poate face corecție.

În fig. 5.10 este arătat schematic principiul acestei decodări. În memoria ROM care este adresată de către corectorul z se introduc toate cuvintele eroare ε în corespondență biunivocă cu corectorii z.

Pînă în prezent nu s-a specificat ce condiții trebuie să îndeplinească polinomul generator $g(x)$ astfel încît codul să poată corecta un număr impus de erori. Această problemă va fi tratată mai tîrziu.

5.4.4. Realizarea codării și a decodării pentru detecția erorilor prin circuite de multiplicare sau de divizare

După cum s-a văzut în paragraful 5.4.2 codarea poate fi realizată în două moduri:

1. *Prin multiplicare:*

$$v(x) = i(x)\ g(x) \tag{5.152}$$

și în acest caz se obține un cod nesistematic. Demodularea se face prin divizare:

$$z(x) = rest\ \frac{v'(x)}{g(x)} \tag{5.153}$$

2. *Prin divizare:*

$$v(x) = rest\ \frac{x^m i(x)}{g(x)} + x^m i(x) \tag{5.154}$$

în acest caz obținîndu-se un cod sistematic.

Decodarea se face tot prin divizare ca și în cazul precedent (relația (5.153)).

Date fiind avantajele codurilor sistematice, în cele ce urmează se va trata cazul al doilea.

5.4.4.1. Codarea prin circuite de divizare

Fie circuitul secvențial din fig. 5.11 care folosește celule binare notate cu c, circuite de multiplicare cu constantele $g_i \in GF(2)$ și sumatori modulo doi.

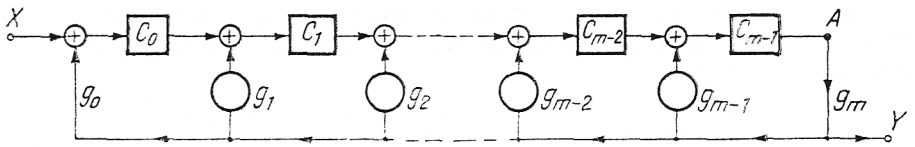


Fig. 5.11. Circuit de divizare.

Pentru analiza circuitului vom folosi un **operator de întîrziere** notat cu D care reprezintă întîrzierea de un tact pe care o introduce o celulă binară.

Dacă în registru se introduc coeficienții în ordinea descrescătoare a indicilor, respectiv:

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_0$$

care corespund polinomului:

$$j(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

atunci secvența aplicată la intrare utilizînd operatorul D poate fi pusă sub forma de transformată Z:

$$a_n + a_{n-1}D + a_{n-2}D^2 + \ldots + a_0 D^n \tag{5.155}$$

cu interpretarea că simbolul a_0 ajunge în prima celulă de intrare după n tacte sau:

$$D^n(a_n D^{-n} + a_{n-1}D^{-(n-1)} + \ldots + a_1 D^{-1} + a_0 I) \tag{5.156}$$

unde:

$$D^0 = I \tag{5.157}$$

reprezintă **operatorul identitate.**

Din cele precedente rezultă că unui polinom în x îi corespunde același polinom în D^{-1}, întîrziat.

Pentru a pune în evidență operația pe care o realizează circuitul, se definește funcția de transfer a circuitului notată cu T ca fiind raportul între secvența de ieșire Y și secvența de intrare X:

$$T = \frac{Y}{X} \tag{5.158}$$

Determinarea funcției de transfer a circuitului se face foarte simplu dacă considerăm graful echivalent al circuitului arătat în fig. (5.12).

În construirea grafului s-a ținut seama de faptul că unei celule binare îi corespunde o ramură de transmitanță D, unui multiplicator cu constanta g_i o ramură de transmitanță g_i, iar unui sumator modulo-doi — un nod, în care însumarea se face modulo doi.

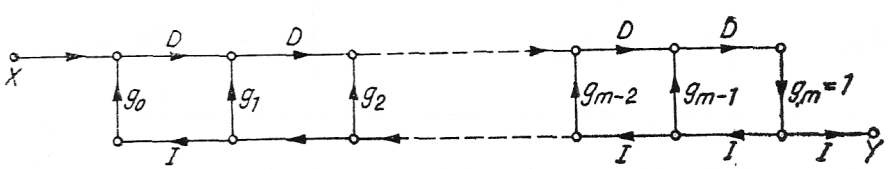


Fig. 5.12. Graful echivalent al circuitului din fig. 5.11.

Funcția de transfer este tocmai transmitanța grafului între nodul de intrare și nodul de ieșire, transmitanță ce se poate determina cu ajutorul formulei lui Mason:

$$T = \frac{Y}{X} = \frac{[(C_1 + C_2 + \ldots)\,(I + L_1)\,(I + L_2)\ldots]^*}{[(I + L_1)\,(I + L_2)\ldots]^*} \tag{5.159}$$

unde:

X este secvența de intrare exprimată în funcție de operatorul D;
Y — secvența de ieșire;
C_i — transmitanța căii i;
L_j — transmitanța buclei j;
I — operatorul identitate.

Asteriscurile indică faptul că din expresiile respective trebuie să fie eliminați termenii ce conțin produse între bucle și căi adiacente și între bucle adiacente. Sumele se fac modulo 2.

Dacă ne referim la graful din fig. 5.12 avem:

$$T = \frac{Y}{X} = \frac{C_{xy}}{I + L_1 + L_2 \ldots + L_m} = \frac{D^m}{I + g_{m-1}D + g_{m-2}D^2 \ldots g_0 D^m} \tag{5.160}$$

unde:

C_{xy} este unica cale între intrare și ieșire;
L_j — transmitanța buclei j

sau

$$T = \frac{Y}{X} = \frac{I}{D^{-m} + g_{m-1}D^{-(m-1)} + \ldots + g_0} \tag{5.161}$$

de unde:

$$Y = \frac{X}{g(D^{-1})} \tag{5.162}$$

relație din care rezultă că circuitul face operația de divizare:

$$y(x) = \frac{j(x)}{g(x)} \tag{5.163}$$

Dacă împărțirea se face cu rest, restul rămîne înmagazinat în celulele registrului.

Dacă secvența de intrare $X' = i(x)$ se aplică la ieșirea registrului (punctul A în fig. 5.11 și 5.13)

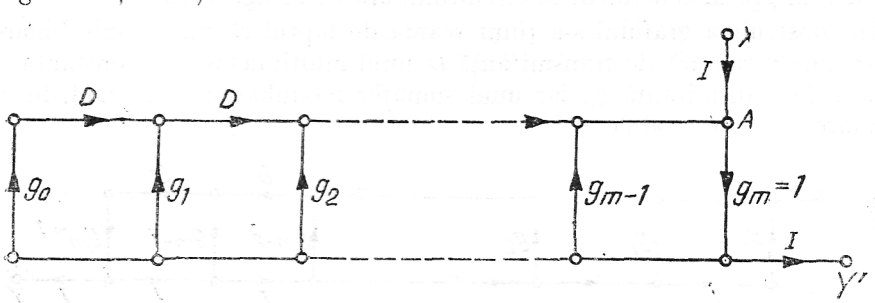
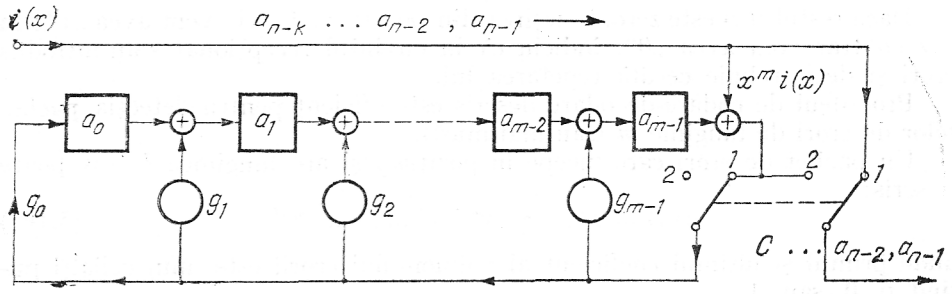


Fig. 5.13. Graful echivalent al circuitului din fig. 5.11 cînd intrarea se face în punctul A.



F'g 5.14. Codarea prin circuite de divizare.

atunci funcția de transfer devine:

$$T = \frac{Y'}{X'} = \frac{I}{I + g_{m-1}D + \ldots + g_0 D^m} = \frac{D^{-m}}{g(D^{-1})} \tag{5.164}$$

sau

$$Y' = \frac{D^{-m}X'}{g(D^{-1})} \tag{5.165}$$

respectiv

$$y(x) = \frac{x^m i(x)}{g(x)} \tag{5.166}$$

Această relație arată că circuitul din fig. 5.11 prin introducerea simbolurilor de informație în punctul A poate servi la codificare, în conformitate cu relația (5.154).

Circuitul de codificare este arătat în fig. 5.14.

Inițial cheia C se găsește în poz. 1 și la intrare se introduc coeficienții lui $i(x)$ și fiindcă intrarea se face după ultima celulă, în registru se introduce polinomul $x^m i(x)$. Cîtul diviziunii cu $g(x)$ nu interesează, ci numai restul $c(x)$ care este înmagazinat în registru după k tacte.

După terminarea introducerii simbolurilor de informație cheia C este trecută pe poz. 2 și conținutul $c(x)$ al registrului este evacuat $(a_0 \ldots a_{m-2}a_{m-1})$ completîndu-se astfel la ieșire întregul cuvînt de cod $(a_0 \ldots a_{m-1}, a_m \ldots a_{n-1})$.

5.4.4.2. **Decodarea prin circuit de divizare**

Decodarea constă în calculul corectorului $z(x) = rest\,\frac{v'(x)}{g(x)}$ realizat cu circuitul din fig. 5.15.

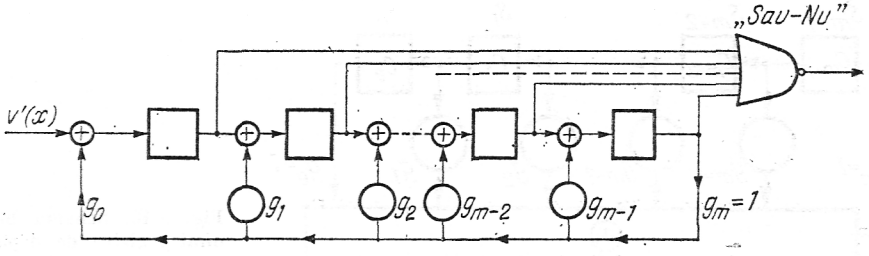


Fig. 5.15. Decodarea prin circuite de divizare.

Dacă restul $z(x)$ este zero, la ieșirea din poarta SAU-NU vom avea „1"; în caz contrar vom avea „0", indiciu că în cuvîntul recepționat s-au introdus erori și deci trebuie cerută repetarea lui.

Procedeul de codare-decodare descris este eficient pentru detecția pachetelor de erori de lungime m (sau mai mică).

Un pachet de erori care începe în poziția j și are lungimea $l = m$ poate fi scris:

$$e(x) = x^j + \varepsilon_{j+1}x^{j+1} + \ldots + x^{j+m-1} \tag{5.167}$$

unde primul și ultimul coeficient al polinomului erorii este unu, ceilalți putînd fi 0 sau 1.

Pachetul de erori mai poate fi scris:

$$e(x) + x^j [1 + \varepsilon_{j+1}x + \ldots + x^{m-1}] = x^j e_0(x) \tag{5.168}$$

Dacă $$v'(x) = v(x) + e(x) \tag{5.169}$$

atunci $$z(x) = rest\frac{e(x)}{g(x)} = rest\frac{x^j e_0(x)}{g(x)} \tag{5.170}$$

Deoarece $e_0(x)$ este de grad $m - 1$, nu este divizibil cu $g(x)$ iar $g(x)$, fiind polinom ireductibil cum se va vedea ulterior divizor al lui $x^n + 1$, restul $\frac{x^j e_0(x)}{g(x)}$ va fi diferit de zero, deci codul este capabil să detecteze un pachet de erori de lungime m în orice poziție intervin acestea.

5.4.5. Realizarea codării și a decodării pentru corecția erorilor cu registre de deplasare cu reacție

Registrul de deplasare cu reacție are numeroase aplicații printre care și în codare și decodare.

5.4.5.1. Registrul de deplasare cu reacție

Este un *circuit secvențial liniar care poate funcționa autonom*, adică fără semnal aplicat din exterior, *numai cu semnal de reacție*. În fig. 5.16 este arătată schema unui asemenea registru.

Conexiunile registrului sînt realizate în conformitate cu coeficienții polinomului generator

$$g(x) = g_0 + g_1x + \ldots + g_{m-1}x^{m-1} + x^m \tag{5.171}$$

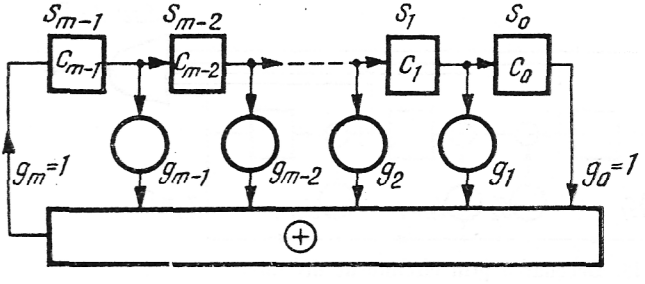


Fig. 5.16. Schema bloc a unui registru de deplasare cu reacție

Urmărind schema registrului și notînd cu s_i starea celulei C_i la tactul t și cu s'_i starea aceleiași celule C_i la tactul $t+1$ relațiile între stările succesive ale registrului sînt date de setul de ecuații liniare:

$$\begin{aligned} s'_0 &= s_1 \\ s'_1 &= s_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s'_{m-2} &= \cdots\cdots\cdots s_{m-1} \\ s'_{m-1} &= g_0 s_0 + g_1 s_1 + \cdots + g_{m-1} s_{m-1} \end{aligned} \tag{5.172}$$

Aceste ecuații pot fi scrise sub formă matriceală:

$$\mathbf{S'} = \mathbf{TS} \tag{5.173}$$

unde

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{m-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S'} = \begin{bmatrix} s'_0 \\ s'_1 \\ \vdots \\ s'_{m-1} \end{bmatrix} \tag{5.174}$$

iar $\mathbf{T}$ este matricea caracteristică a registrului

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 & 1 \\ g_0 & g_1 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & g_{m-1} \end{bmatrix} \tag{5.175}$$

Dacă starea inițială a registrului a fost S, stările succesive sînt $\mathbf{TS}$, $\mathbf{T^2S}, \ldots \mathbf{T^nS} = \mathbf{S}$.

Numărul stărilor fiind finit, în mod obligatoriu registrul trebuie să ajungă din nou în starea inițială. Pentru ca fiecare stare a registrului să fie precedată de o stare unică trebuie să existe matricea inversă $\mathbf{T^{-1}}$ respectiv $g_0 = 1$.

Un registru poate genera mai multe cicluri după cum se arată în fig. 5.17.

Numărul total de stări nenule este $2^m - 1$ ele putînd fi generate într-un singur ciclu sau în mai multe.

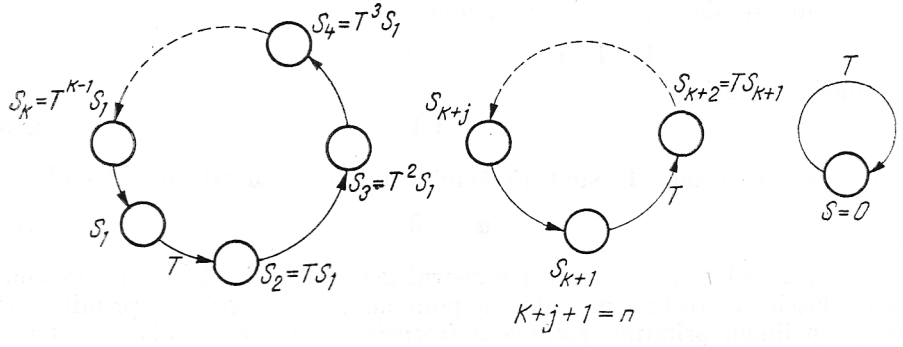


Fig. 5.17. Cicluri generate de registre.

De un interes deosebit este cazul în care registrul generează toate stările nenule în număr de $2^m - 1$ într-un singur ciclu.

Polinomul caracteristic al matricei **T** prin definiție este:

$$\Phi(x) = det\,|\mathbf{T} - x\,\mathbf{I}| \tag{5.176}$$

Dacă matricea **T** are structura dată de (5.175) atunci:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -x & \dots & 1 \\ g_0 & g_1 & \dots & g_{m-2} & g_{m-1} & -x \end{bmatrix} \tag{5.177}$$

făcînd dezvoltarea se obține:

$$\Phi(x) = g_0 + g_1 x + \dots + g_{m-1} x^{m-1} + x^m \tag{5.178}$$

adică, polinomul caracteristic al matricei **T** este polinomul generator $g(x)$, el determinînd în mod unic registrul de deplasare cu reacție.

Matricea caracteristică **T** este o rădăcină a polinomului caracteristic:

$$g(\mathbf{T}) = 0 \tag{5.179}$$

Numim **perioada matricei caracteristice T,** sau **lungimea ciclului,** *cel mai mic număr întreg n pentru care*:

$$\mathbf{T}^n = \mathbf{T}^0 = \mathbf{I} \tag{5.180}$$

Convenim să notăm ca stare inițială a registrului starea:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.181}$$

adică starea în care toate celulele registrului sînt în starea 0, cu excepția celulei C_{m-1} care este în starea 1.

Deci cele n stări nenule ale registrului pot fi scrise:

$$\mathbf{T}^0\mathbf{U} = \mathbf{U},\ \mathbf{TU},\ \mathbf{T}^2\mathbf{U} \dots \mathbf{T}^{n-1}\mathbf{U},\ \mathbf{T}^n\mathbf{U} = \mathbf{U} \tag{5.182}$$

aceste elemente sînt izomorfe cu elementele:

$$\mathbf{T}^0,\ \mathbf{T},\ \mathbf{T}^2, \dots, \mathbf{T}^{n-1},\ \mathbf{T}^n = \mathbf{T}^0 = \mathbf{I} \tag{5.183}$$

Introducem notația:

$$\boldsymbol{\alpha}^i = \mathbf{T}^i\mathbf{U} \tag{5.184}$$

și este evident că dacă **T** este o rădăcină a lui $g(x)$ și $\boldsymbol{\alpha}$ este o rădăcină:

$$g(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \tag{5.185}$$

Pentru a vedea în ce condiții registrul generează ciclul maxim, să considerăm clasele de resturi modulo un polinom $g(x)$ de grad m primitiv. (Se numește **polinom primitiv,** *polinomul ireductibil care are ca rădăcină un element care generează toate clasele de resturi modulo $g(x)$ numit element primitiv.*)

Exemplu. Polinoamele primitive figurează în Anexa II pentru orice grad existînd cel puțin un polinom primitiv. Alegem de exemplu $g(x) = 1 + x + x^3$.

Dacă $g(x)$ este polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{T}$ avem:

$$1 + \mathbf{T} + \mathbf{T}^3 = \mathbf{0} \tag{5.186}$$

Pe baza acestei relații putem găsi o expresie pentru toate puterile lui $\mathbf{T}$ conform tabelului:

Puteri ale lui $\mathbf{T}$	Clase de resturi modulo $g(x) = 1 + x + x^3$	Reprezentare matriceală $[\alpha^i]^T$
$\mathbf{T}^0 =$	1	[1 0 0]
$\mathbf{T}^1 =$	$\mathbf{T}$	[0 1 0]
$\mathbf{T}^2 =$	$\mathbf{T}^2$	[0 0 1]
$\mathbf{T}^3 =$	$1 + \mathbf{T}$	[1 1 0]
$\mathbf{T}^4 = \mathbf{T} + \mathbf{T}^2 =$	$\mathbf{T} + \mathbf{T}^2$	[0 1 1]
$\mathbf{T}^5 = \mathbf{T}^2 + \mathbf{T}^3 =$	$1 + \mathbf{T} + \mathbf{T}^2$	[1 1 1]
$\mathbf{T}^6 = \mathbf{T} + \mathbf{T}^2 + \mathbf{T}^3 =$	$1 + \mathbf{T}^2$	[1 0 1]
$\mathbf{T}^7 = \mathbf{T} + \mathbf{T}^3 = \mathbf{T}_0$	1	[1 0 0]

Prima clasă de resturi, cu primul element **0** nu figurează în tablou.

Se vede că în coloana a doua figurează toate clasele de resturi generate de un polinom de grad 3, respectiv toate polinoamele de grad mai mic decît 3. Se mai vede că aceste polinoame pot fi exprimate ca puteri ale lui $\mathbf{T}$, numit element primitiv, care este rădăcină a polinomului $g(x)$ care, din această cauză, se numește polinom primitiv. În clasele de resturi astfel formate este ușor de văzut că operația de împărțire are sens, adică clasele de resturi formează un cîmp numit *cîmp Galois*, respectiv o extensie a cîmpului de bază $GF(2)$ cu elementele (0, 1). Extensia se notează cu $GF(2^3)$ sau în general cînd $g(x)$ are gradul m, cu $GF(2^m)$.

Numărul de elemente nenule în $GF(2^m)$ este $2^m - 1$; în cazul precedent $2^3 - 1 = 7$.

În general se poate demonstra că algebra polinoamelor modulo $q(x)$ — un polinom de grad m cu coeficienți în $GF(2)$, ireductibil în acest cîmp — formează un cîmp, numit cîmp Galois $GF(2^m)$.

Elementele cîmpului Galois $GF(2^m)$, cu excepția elementului nul, formează un grup multiplicativ ciclic. Dacă polinomul ireductibil este primitiv atunci ciclul are lungimea maximă egală cu $2^m - 1$

Ținînd seama de izomorfismul:

$$\mathbf{T}^i \Leftrightarrow \mathbf{T}^i\mathbf{U} \tag{5.187}$$

rezultă că dacă polinomul caracteristic al registrului este un polinom primitiv, atunci registrul generează într-un singur ciclu toate stările nenule $\mathbf{T}^i\mathbf{U}$ pentru $i = \overline{0, n}$, unde $n = 2^m - 1$ și $\mathbf{T}^n = \mathbf{T}^0$.

Toate considerațiile precedente sînt valabile și pentru registrul echivalent dat în fig. 5.18 a cărei matrice caracteristică este:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} g_{m-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ g_{m-2} & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ & & & & 1 \\ g_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{5.188}$$

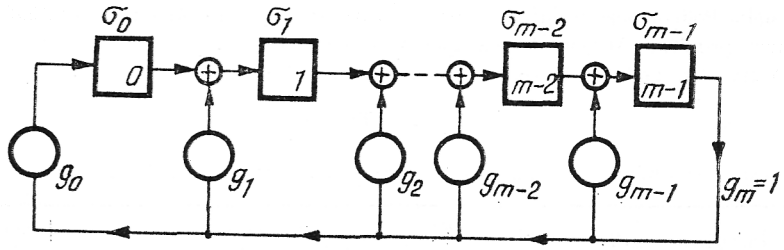


Fig. 5.18. Schema bloc a unui registru de deplasare cu reacție echivalentă cu cel din fig. 5.16.

Registrele se numesc **echivalente** pentru că *au același polinom caracteristic.*

5.4.5.2. **Codor cu registru de deplasare cu reacție**

Cu ajutorul unui registru de deplasare cu reacție realizat conform schemei din fig. 5.19 se poate genera un cod sistematic.

Registrul de deplasare cu reacție este format din $m = n - k$ celule cu conexiunile făcute în conformitate cu polinomul generator (primitiv) al codului:

$$g(x) = g_0 + g_1 x + \ldots + g_{m-1} x^{m-1} + g_m x^m \tag{5.189}$$

unde

$$g_m = g_0 = 1$$

Inițial comutatorul C se găsește în poziția 1 și se introduc cele k simboluri de informație:

$$a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_{n-k}$$

care în același timp apar și la ieșire.

Starea inițială a registrului este astfel încît în toate celulele este înmagazinat simbolul 0, numită **stare nulă.**

Pentru o analiză comodă, în cele ce urmează, stările registrului vor fi reprezentate sub formă matriceală.

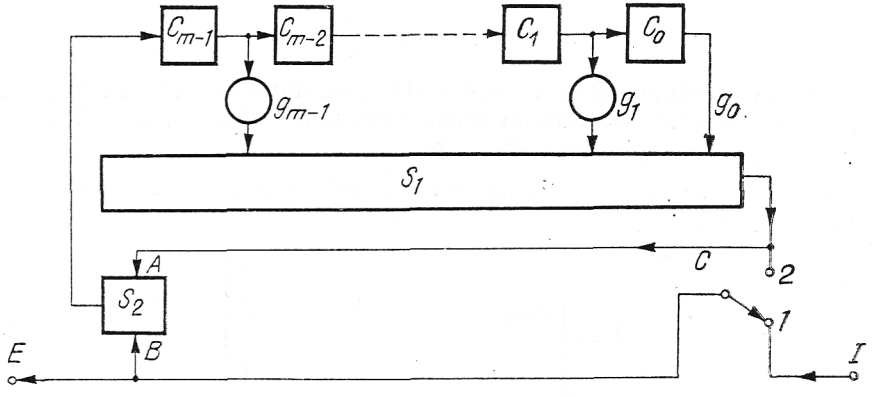


Fig. 5.19. Codor cu registru de deplasare cu reacție.

La tactul 1 se introduce în punctul B, deci la intrarea registrului, simbolul a_{n-1} și starea registrului este:

$$a_{n-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} = a_{n-1}\mathbf{U} \tag{5.190}$$

La tactul 2 starea registrului este:

$$a_{n-1}\mathbf{TU} + a_{n-2}\mathbf{U} \tag{5.191}$$

unde $\mathbf{T}$ este matricea caracteristică a registrului.

La tactul 3 starea registrului este:

$$a_{n-1}\mathbf{T}^2\mathbf{U} + a_{n-2}\mathbf{TU} + a_{n-3}\mathbf{U} \tag{5.192}$$

În același mod se arată că la tactul k starea registrului este:

$$a_{n-1}\mathbf{T}^{k-1}\mathbf{U} + a_{n-2}\mathbf{T}^{k-2}\mathbf{U} + \ldots + a_{n-k}\mathbf{U} \tag{5.193}$$

După acest moment comutatorul C se comută în poziția 2 și ieșirea din primul sumator S_1 se conectează la linia de ieșire și la intrarea B a sumatorului S_2. Deosebirea față de situația precedentă constă în faptul că simbolurile introduse în punctul B al sumatorului S_2 nu provin de la intrare (adică nu sînt simboluri de informație) ci provin de la ieșirea din sumatorul S_1, adică sînt simboluri de control, care, în același timp, sînt transmise și la ieșire.

Ținînd seama de acest fapt, stările succesive ale registrului pot fi determinate ca și înainte de comutarea comutatorului C.

Prin urmare, la tactul $k + 1$ starea registrului este:

$$a_{n-1}\mathbf{T}^k\mathbf{U} + a_{n-2}\mathbf{T}^{k-1}\mathbf{U} + \ldots + a_{n-k}\mathbf{TU} + a_{n-k-1}\mathbf{U} \tag{5.194}$$

și așa mai departe pînă cînd au apărut toate cele m simboluri de control:

$$a_{n-1}\mathbf{T}^{n-1}\mathbf{U} + a_{n-2}\mathbf{T}^{n-2}\mathbf{U} + \ldots + a_1\mathbf{TU} + a_0\mathbf{U} \tag{5.195}$$

unde simbolurile de control s-au notat cu $a_{n-k-1}, \ldots, a_0$.

În ultimele m deplasări, adică după comutarea comutatorului C din poziția 1 în poziția **5**, la cele două intrări A și B ale sumatorului S_2 se aplică simultan aceleași simboluri (cele de control),astfel că la intrarea în registru apare la fiecare deplasare simbolul zero. După cele m deplasări registrul este adus în starea inițială nulă, astfel încît se poate scrie că ultima stare, dată de relația (5.195), este nulă, respectiv:

$$a_0\mathbf{U} + a_1\mathbf{TU} + \ldots + a_{n-2}\mathbf{T}^{n-2}\mathbf{U} + a_{n-1}\mathbf{T}^{n-1}\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{5.196}$$

Această relație se poate scrie sub forma unui produs de matrice:

$$[\mathbf{U}\ \mathbf{TU}\ \mathbf{T}^2\mathbf{U} \ldots \mathbf{T}^{n-2}\mathbf{U}\ \mathbf{T}^{n-1}\mathbf{U}]\,[a_0\ a_1\ a_2 \ldots a_{n-2}\ a_{n-1}]^T = \mathbf{0} \tag{5.197}$$

relație identică cu:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{v}^T = \mathbf{0} \tag{5.198}$$

unde:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{U}\ \mathbf{TU}\ \mathbf{T}^2\mathbf{U} \ldots \mathbf{T}^{n-2}\mathbf{U}\ \mathbf{T}^{n-1}\mathbf{U}] \tag{5.199}$$

și vectorul de cod **v** este:

$$\mathbf{v} = [a_0\ a_1\ a_2 \ldots a_{n-2}\ a_{n-1}] \tag{5.200}$$

în care $a_0, a_1, \ldots, a_{n-k-1}$ sînt simboluri de control,

iar $a_{n-k}, a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-1}$ sînt simboluri de informație.

Cele $2^m - 1$ stări posibile ale registrului cu m celule sînt cele $n = 2^m - 1$ elemente nenule ale cîmpului $GF(2^m)$ generate de rădăcina α a polinomului caracteristic (generator) primitiv de gradul m.

5.4.5.3. **Decodor cu registru de deplasare cu reacție**

Schema bloc care ilustrează principiul de funcționare a decodorului este dată în fig. 5.20.

Unitatea de decodare conține *un registru de deplasare* numit principal (*RP*) și *doi decodori* (DC_1, DC_2).

În *registrul principal* se înmagazinează cuvîntul recepționat de lungime n. Această înmagazinare trebuie să dureze pînă cînd se recepționează toate simbolurile de control și se face calculul necesar corecției.

Decodorul are un registru de deplasare cu reacție, identic cu cel de la codare, la celulele căruia este legat detectorul de erori (*D*).

Funcția detectorului este de a detecta (recunoaște) anumite stări ale registrului de deplasare cu reacție și de a emite 1 atunci cînd registrul se găsește în una din aceste stări.

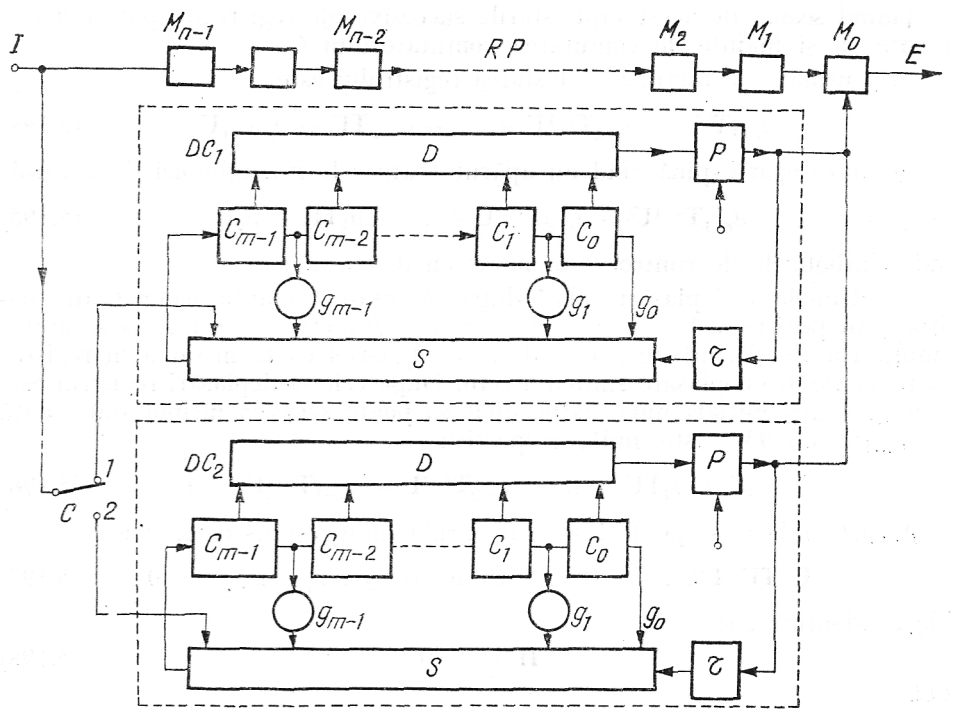


Fig. 5.20. Decodor cu registru de deplasare cu reacție.

Acest simbol „1" se însumează modulo 2 cu simbolul eronat cînd acesta se află în ultima celulă M_0 a registrului principal, efectuînd astfel corecția erorii. În același timp acest simbol 1 este introdus cu o întîrziere de un tact și în sumatorul registrului de deplasare cu reacție pentru a pregăti registrul în vederea corecției erorilor rămase necorectate.

Stările pe care trebuie să le recunoască detectorul sînt tocmai corectorii corespunzători erorilor pe care codul le poate corecta.

În cazul detecției erorilor și nu a corecției lor, funcția detectorului este mult mai simplă și anume de a emite simbolul 1 dacă starea finală (după recepționarea tuturor simbolurilor cuvîntului) a registrului de deplasare cu reacție este diferită de zero.

În ansamblul ei, unitatea de decodare funcționează în felul următor. Simbolurile unui cuvînt recepționat se introduc simultan în registrul de deplasare principal care servește ca memorie și în registrul de deplasare cu reacție care calculează corectorul.

În acest timp detectorul este deconectat (poarta P este închisă). Calculul corectorului se termină cînd ultimul simbol al cuvîntului recepționat este introdus în registrul principal și în decodor. În acest moment se conectează detectorul, respectiv se deschide poarta P (v. fig. 5.20) și se efectuează operația de corecție. Tot în acest moment comutatorul C este trecut în poziția 2 și cuvîntul următor recepționat este introdus în decodorul 2 și în registrul principal, în timp ce acesta evacuează la ieșire cuvîntul anterior.

În momentul cînd primul cuvînt este introdus complet în registrul principal și în decodor, starea registrului de deplasare cu reacție, în conformitate cu cele stabilite în § 5.4.52, este:

$$\mathbf{z} = a'_0\mathbf{U} + a'_1\mathbf{TU} + \ldots + a'_{n-2}\mathbf{T}^{n-2}\mathbf{U} + a'_{n-1}\mathbf{T}^{n-1}\mathbf{U} \qquad (5.201)$$

unde s-au notat cu a'_i simbolurile recepționate, care datorită erorilor, pot să difere de simbolurile emise a_i.

Dacă nu sînt erori $a'_i = a_i \; \forall \; i$, iar $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Această stare a registrului se menține (fiindcă $\mathbf{T} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$) în timpul tuturor deplasărilor care evacuează din registrul principal primul cuvînt de cod. În consecință, detectorul de erori nu emite nici un semnal de corecție.

Dacă există erori $a'_i \neq a_i$ pentru anumite poziții i, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Acest fapt poate servi la detecția erorilor.

Dacă pentru fiecare configurație de erori ce trebuie să fie corectate există un corector distinct, acesta poate fi recunoscut de detectorul de erori care dă semnalul de corecție. Funcționarea are loc astfel încît detectorul recunoaște un anumit corector tocmai în momentul în care un simbol eronat se găsește în ultima celulă M_0 a registrului principal. Ultima celulă M_0 a registrului principal efectuează operația de însumare modulo 2 a simbolului înmagazinat cu simbolul 1 dat de detector efectuînd în felul acesta corecția (complementează starea celulei M_0).

5.4.5.4. **Codul Hamming ciclic corector de o eroare**

Codul Hamming este caracterizat de matricea de control:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{U}\ \mathbf{TU}\ \mathbf{T}^2\mathbf{U} \ldots \mathbf{T}^{n-1}\mathbf{U}] \qquad (5.202)$$

unde $n = 2^m - 1$, reprezintă numărul de simboluri din cuvîntul de cod.

În notația matriceală relația de codificare se poate scrie:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = 0 \tag{5.203}$$

Dacă polinomul generator (primitiv) $g(X)$ este:

$$g(x) = 1 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_{m-1} x^{m-1} + x^m \tag{5.204}$$

iar în registrul de deplasare cu reacție din fig. 5.19 se realizează conexiunile în conformitate cu acest polinom, atunci registrul va genera un cod ciclic Hamming cu m simboluri de control și $k = n - m$ simboluri de informații.

Spre deosebire de codul Hamming grup, acest cod este sistematic. **Codul Hamming** caracterizat de matricea de control **H** dată de relația (5.202) *este capabil să corecteze o singură eroare, deoarece numai două coloane sînt liniar independente.*

Dacă vectorul eroare se reprezintă prin matricea:

$$\varepsilon = [\ldots, \alpha_{n-r}, \ldots] \tag{5.205}$$

adică apare o singură eroare pe poziția n—r, atunci corectorul este dat de relația:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\varepsilon^T = \mathbf{T}^{n-r}\mathbf{U} \tag{5.206}$$

Se presupune deci că simbolul a'_{n-r}, adică simbolul introdus în registrul de deplasare după r tacte, este eronat, respectiv

$$a'_{n-r} = a_{n-r} + 1 \tag{5.207}$$

Deoarece $n = 2^m - 1$ este perioada lui **T** (polinomul caracteristic $g(x)$ al lui **T** fiind primitiv, perioada este maximă și egală cu numărul total de stări posibile diferite de zero, adică $2^m - 1$):

$$\mathbf{T}^n = \mathbf{I} \tag{5.208}$$

deci

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-r}\mathbf{U} \tag{5.209}$$

Rezultă că momentul în care întreg cuvîntul recepționat este introdus în registrul de deplasare (v. fig. 5.20) conținutul registrului de deplasare cu reacție este $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-r}\mathbf{U}$. În acest moment comutatorul C este trecut pe poziția 2, astfel că în registrul de deplasare cu reacție nu se mai introduc simbolurile de la intrare, deci stările lui succesive sînt:

$$\mathbf{z},\ \mathbf{T}\mathbf{z},\ \mathbf{T}^2\mathbf{z},\ \ldots,\ \mathbf{T}^{r-1}\mathbf{z}$$

în timp ce simbolurile:

$$a'_{n-1},\ a'_{n-2},\ \ldots,\ a'_{n-r}$$

se succed în celula M_0 de ieșire din registrul principal.

După $r - 1$ deplasări, simbolul eronat a'_{n-r} ajunge în celula M_0. În acest moment conținutul registrului de deplasare cu reacție este:

$$\mathbf{S}_{r-1} = \mathbf{T}^{r-1}\mathbf{z} = \mathbf{T}^{r-1}\mathbf{T}^{-r}\mathbf{U} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} \tag{5.210}$$

Starea $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}$ este:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.211}$$

fiind starea care precede starea **U**.

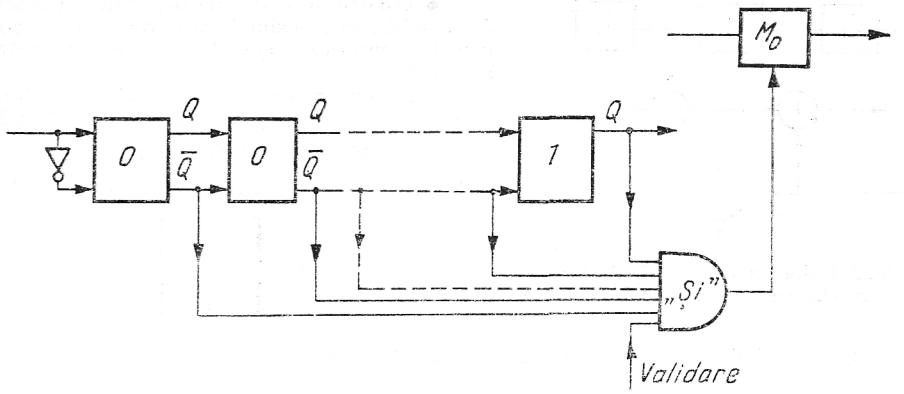


Fig. 5.21. Circuit care sesizează o eroare.

Deci detectorul de erori trebuie astfel construit ca el să sesizeze starea $\mathbf{T^{-1}U}$ și să furnizeze un simbol 1 care se adună modulo 2 cu conținutul celulei M_0 pentru a efectua corecția.

Acest lucru poate fi realizat, de exemplu, așa cum se arată în fig. 5.21.

După cum se vede urmărind schema, detectorul de erori furnizează un semnal 1 numai dacă starea registrului de deplasare este (0, 0, ..., 0,1). Acest semnal complementează conținutul celulei M_0 și servește la corecția erorii.

Circuitul poartă P este închis tot timpul cît se face calculul corectorului. În caz contrar, dacă în timpul calculării corectorului registrul trece prin starea (0, 0, ..., 0, 1), detectorul comandă o corecție falsă.

Pentru aducerea la zero a registrului cu reacție(în vederea începerii operației de corecție a unui alt cuvînt) semnalul de corecție 1, întîrziat cu un tact în celula binară σ (fig. 5.20), este introdus și în sumatorul S_1 al registrului de deplasare cu reacție.

Deci la tactul r (primul tact după efectuarea corecției) starea registrului de deplasare va fi:

$$\mathbf{TS}_{r-1} + \mathbf{U} = \mathbf{TT^{-1}U} + \mathbf{U} = \mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{0} \qquad (5.212)$$

Din acest moment starea rămîne nemodificată pînă la apariția primului simbol din cuvîntul următor ce urmează a fi corectat.

Exemplu. Fie un cod ciclic la care $n = 7$, $k = 4$, $m = 3$.

Cuvintele de cod sînt de forma:

$$v(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_6x^6$$

simbolurile a_0, a_1 și a_2 sînt simboluri de control, iar a_3, a_4, a_5, a_6 sînt simboluri de informație.

Cuvintele sînt elemente în algebra polinoamelor modulo $p(x) = x^7 + 1$.

Cele $2^3 - 1$ elemente nenule ale cimpului $GF(2^3)$ sînt cele generate de un polinom primitiv de gradul 3. Din polinoamele primitive de gradul 3 (date la sfîrșitul Anexei I) se alege:

$$g(x) = 1 + x + x^3$$

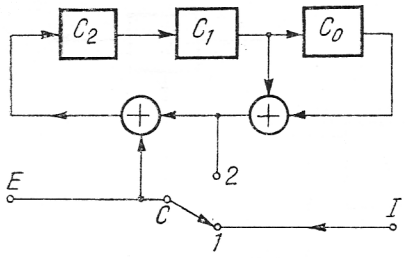


Fig. 5.22. Codor cu registru de deplasare cu reacție cu $g(x) = 1 + x + x^3$.

● **Codarea.** Registrul de deplasare cu reacție de la emisie, cu conexiunile realizate conform polinomului generator $g(x) = 1 + x + x^3$ este arătat în fig. 5.22.

Pentru a stabili relațiile care determină simbolurile de control este nevoie să se cunoască matricea **H**:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{U} \quad \mathbf{TU} \quad \mathbf{T^2U} \ldots \mathbf{T^6U}]$$

unde **T** este matricea caracteristică a registrului:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementul primitiv al cîmpului $GF(2^3)$ este $\alpha = \mathbf{TU}$ respectiv:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Celelalte elemente sînt:

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = \mathbf{T^2U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\alpha}^3 = \mathbf{T^3U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\alpha}^4 = \mathbf{T^4U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\alpha}^5 = \mathbf{T^5U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\alpha}^6 = \mathbf{T^6U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deci, matricea de control **H** este:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

și din relația:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = \mathbf{0}$$

se obține:

$$a_2 = a_4 + a_5 + a_6$$

$$a_1 = a_3 + a_4 + a_5$$

$$a_0 = a_2 + a_3 + a_4 = a_3 + a_5 + a_6$$

● **Decodarea.** Schema bloc de la recepție este dată de fig. 5.23.

Registrul de deplasare cu reacție calculează corectorii. Se presupune că simbolul a_4' este eronat, deci $a_4' = a_4 + 1$. În acest caz $n - r = 4$ iar corectorul, respectiv starea registrului este:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T^4U} = \mathbf{T^{-3}U}$$

Cînd simbolul a_4' ajunge în ultima celulă a registrului principal, respectiv după încă două tacte, starea registrului de deplasare cu reacție este:

$$\mathbf{T^2T^{-3}U} = \mathbf{T^{-1}U}$$

adică (0 0 1).

5.4.6.1. Specificarea cuvintelor de cod prin rădăcinile polinomului generator

În cele precedente cuvîntul de cod a fost specificat ca fiind un element în idealul generat de polinomul generator $g(x)$:

$$v(x) = q(x)\, g(x) \tag{5.213}$$

sau ca un element în spațiul nul al idealului generat de polinomul $h(x)$:

$$v(x)\, h(x) = 0 \tag{5.214}$$

O formă echivalentă de specificare a cuvintelor de cod este următoarea: *un polinom $v(x)$ de grad $n-1$ este cuvînt de cod dacă și numai dacă are ca rădăcini, rădăcinile polinomului generator $g(x)$.*

Această definiție este echivalentă cu precedentele fiindcă, dacă polinomul $v(x)$ are ca rădăcini, rădăcinile lui $g(x)$, el este divizibil cu $g(x)$, respectiv este în idealul generat de $g(x)$.

Conform relației (5.121) polinomul generator $g(x)$ este divizor al polinomului $x^n + 1$ (care generează algebra în care elementele sînt cuvinte cu sens sau fără sens). Rezultă că rădăcinile lui $g(x)$, care sînt și rădăcini ale lui $v(x)$, sînt rădăcini ale lui $x^n + 1$.

Invers, dacă avem un cod cu cuvinte de lungime n și dorim să specificăm polinomul generator, respectiv cuvintele de cod, alegem după criterii care vor fi specificate în cele ce urmează, un număr de r rădăcini ale lui $x^n + 1$ și formăm polinomul care are aceste rădăcini și care este polinomul generator. Cele r rădăcini alese, fiind rădăcini ale polinomului generator sînt și rădăcini ale cuvîntului de cod $v(x)$.

În conformitate cu teorema 2, Anexa II, rădăcinile $(\boldsymbol{\beta}_i)$ ale polinomului $x^n + 1$ sînt elementele $(\boldsymbol{\alpha}_i)$ din $GF(2^m)$ generate de un polinom primitiv $q(x)$ de grad m:

$$\boldsymbol{\beta}_0 = 1,\ \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}^2,\ \ldots,\ \boldsymbol{\beta}_{n-1} = \boldsymbol{\alpha}^{n-1} = \boldsymbol{\alpha}^{2m-2} \tag{5.215}$$

Să presupunem că cuvîntul de cod:

$$v(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_{n-1} x^{n-1} \tag{5.216}$$

are printre rădăcini elementele:

$$\boldsymbol{\beta}_{i_1},\ \boldsymbol{\beta}_{i_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_{i_r}$$

ale cîmpului $GF(2^m)$.

Înlocuind în (5.216) se obține:

$$v(\boldsymbol{\beta}_{i_k}) = a_0 \boldsymbol{\beta}_{i_k}^0 + a_1 \boldsymbol{\beta}_{i_k}^1 + \ldots + a_{n-1} \boldsymbol{\beta}_{i_k}^{n-1} \tag{5.217}$$

pentru $k = \overline{1, r}$ și $\boldsymbol{\beta}_i^0 = 1$.

Relația (5.217) poate fi scrisă sub formă matriceală:

$$[\boldsymbol{\beta}_{i_k}^0 \boldsymbol{\beta}_{i_k}^1 \cdots \boldsymbol{\beta}_{i_k}^{n-1}]\ [a_0\ a_1 \ldots a_{n-1}]^T = 0 \tag{5.218}$$

Notînd:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \beta_{i_1}^0 & \beta_{i_1}^1 & \cdots & \beta_{i_1}^{n-1} \\ \beta_{i_2}^0 & \beta_{i_2}^1 & \cdots & \beta_{i_2}^{n-1} \\ \vdots & & & \\ \beta_{i_r}^0 & \beta_{i_r}^1 & \cdots & \beta_{i_r}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.219}$$

relația (5.218) poate fi scrisă:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = \mathbf{0} \tag{5.220}$$

adică se obține cunoscuta relație de codare.

Polinomul $m_i(x)$, de gradul cel mai mic, cu coeficienți în $GF(2)$, care are ca rădăcină un element $\beta_i \in GF(2^m)$, se numește polinom minimal al lui β_i.

Orice element $\beta_i \in GF(2^m)$ are un polinom minimal de grad m sau mai mic (teorema 7, Anexa II).

Dacă un polinom $v(x)$ cu coeficienți în $GF(2)$ are ca rădăcină pe β_i, atunci $v(x)$ este divizibil cu $m_i(x)$, polinomul minimal al lui β_i (teorema 6, Anexa II).

Cele r rădăcini β_{i_k} ale lui $v(x)$ pot fi astfel alese, încît fiecare rădăcină β_{i_k} să aibă un polinom minimal distinct $m_k(x)$.

Aceste polinoame fiind divizori ai lui $v(x)$, rezultă că:

$$g(x) = m_1(x)\, m_2(x) \ldots m_r(x) \tag{5.221}$$

este polinomul generator specificat de rădăcinile β_{i_k}, $k = \overline{1, r}$.

Problema alegerii celor r rădăcini astfel încît codul să poată corecta e erori, va fi tratată în cele ce urmează.

5.4.6.2. **Codul Bose-Chaudhuri-Hocquenghem (B.C.H.)**

Se poate demonstra (vezi Anexa II-3) că alegînd

$$\beta_{i_1} = \alpha,\ \beta_{i_2} = \alpha^3,\ \ldots,\ \beta_{i_r} = \alpha^{2e-1}$$

obținem un cod capabil să corecteze e erori independente.

În acest caz matricea $\mathbf{H}$ dată de relația (5.219) devine

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^0 & \alpha^3 & \alpha^6 & \ldots & \alpha^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha^0 & \alpha^{2e-1} & \alpha^{(2e-1)2} & & \alpha^{(2e-1)\ (n-1)} \end{bmatrix} \tag{5.222}$$

În demonstrația din Anexa II se arată că oricare $q \leqslant 2e$ coloane din această matrice sînt independente, în aceste condiții codul obținut fiind capabil să corecteze e erori și mai puține.

Codurile la care codificarea se face cu o matrice $\mathbf{H}$ *de structura* (5.222) sînt cunoscute sub numele de **coduri B.C.H.**

Exemplu. Să presupunem că lungimea cuvîntului de cod este $n = 15$ (în conformitate cu teorema 2, Anexa II, trebuie ca $n = 2^m - 1$ și că dorim să corectăm $e = 3$ erori. În acest caz rădăcinile polinomului generator vor fi:

$$\alpha,\ \alpha^3,\ \alpha^{2e-1} = \alpha^5$$

Fiindcă $n = 2^m - 1 = 15$ rezultă $m = 4$, adică rădăcinile lui $x^{15} + 1$, respectiv elementele cîmpului $GF(2^4)$ sînt generate de un polinom primitiv de gradul 4, cum ar fi $q(x) = 1 + x + x^4$, și anume:

Puteri ale lui α	Clasele de resturi modulo $q(x) = 1 + x + x^4$	Reprezentarea matriceală $[\alpha]^T$
α^0	1	[0 0 0 0]
α^1	α	[1 0 0 0]
α^2	α^2	[0 1 0 0]
α^3	α^3	[0 0 1 0]
α^4	$1 + \alpha$	[1 1 0 0]
α^5	$\alpha + \alpha^2$	[0 1 1 0]
α^6	$\alpha^2 + \alpha^3$	[0 0 1 1]
α^7	$1 + \alpha + \alpha^3$	[1 1 0 1]
α^8	$1 + \alpha^2$	[1 0 1 0]
α^9	$\alpha + \alpha^3$	[0 1 0 1]
α^{10}	$1 + \alpha + \alpha^2$	[1 1 1 0]
α^{11}	$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3$	[1 0 1 1]
α^{12}	$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$	[1 1 1 1]
α^{13}	$1 + \alpha^2 + \alpha^3$	[1 0 1 1]
α^{14}	$1 + \alpha^3$	[1 0 0 1]
α^{15}	1	[0 0 0 0]

Pentru determinarea polinoamelor minimale (care sînt ireductibile) se procedează după cum urmează:

Polinomul minimal $m_1(x)$ al elementului α, în conformitate cu teorema 3 din Anexa II are rădăcinile:

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8$$

deci este un polinom de grad 4, respectiv:

$$m_1(x) = (x - \alpha)\ (x - \alpha^2)\ (x - \alpha^4)\ (x - \alpha^8)$$

Făcînd înmulțirile și ținînd seama de relațiile din tabloul precedent se obține

$$m_1(x) = 1 + x + x^4$$

Polinomul minimal al lui α^3 este $m_3(x)$ și are rădăcinile:

$$\alpha^3,\ \alpha^6,\ \alpha^{12},\ \alpha^{24} = \alpha^9$$

el este tot de grad 4 și se determină în același mod, obținînd:

$$m_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

Polinomul minimal al lui α^5 are rădăcinile

$$\alpha^5,\ \alpha^{10},\ \alpha^{20} = \alpha^5,\ \alpha^{40} = \alpha^{10}$$

deci este un polinom de gradul doi, și anume:

$$m_5(x) = 1 + x + x^2$$

deci polinomul generator al codului este

$$g(x) = m_1(x)\ m_3(x)\ m_5(x)$$

respectiv $g(x) = (1 + x + x^4)\ (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)\ (1 + x + x^2)$ de grad 10. Deci $m = 10$ și $k = 5$.

Pentru codificare nu este necesar să se folosească matricea **H** dată de (5.222) dar este util să observăm că în exemplul considerat avînd o coloană formată din elementele α, α^3, α^5 vom avea $3 \times 4 = 12$ linii în loc de 10 cîte simboluri de control avem. Rezultă că două linii din această matrice sînt liniar dependente, adică pot fi formate din însumarea celorlalte linii.

Pentru decodarea codurilor B.C.H. există mai mulți algoritmi, însă metoda cea mai simplă ca echipament este aceea descrisă în § 5.4.3.1, adică decodarea pe baza corespondenței între corectori și cuvintele eroare înmagazinate într-o memorie.

Dacă ne referim la exemplul precedent, numărul corectorilor este $2^{10} - 1 = 1023$.

Numărul cuvintelor eroare formate din 1, 2 și 3 erori este

$$C_{15}^1 + C_{15}^2 = C_{15}^3 = 675$$

deci se vede că acest cod nu este perfect, numărul erorilor corectabile fiind mult mai mic decît cel al corectorilor.

5.4.6.3. **Codul Golay**

Codul Golay *împreună cu* **codul Hamming** *corector de o eroare sînt singurele coduri binare corectoare de erori perfecte.*

Codul Golay are: $n = 23$ $k = 12$ $m = 11$ și poate corecta 3 erori și mai puține.

Este un cod perfect fiindcă *numărul cuvintelor corectabile este egal cu acela al corectorilor*:

$$C_{23}^1 + C_{23}^2 + C_{23}^3 = 2^{11} - 1 \tag{5.223}$$

Polinomul generator trebuie să aibă perioada 23 pentru ca registrul de deplasare să aibă un ciclu de lungime 23. Rezultă, în conformitate cu teorema 4 și definiția 4 din Anexa II, că dacă polinomul generator este ireductibil rădăcinile lui trebuie să aibă toate același ordin, egal cu 23.

Din cele $2^{11}-1$ elemente ale lui $GF(2^{11})$ generate de un polinom primitiv de grad 11 trebuie să alegem o rădăcină α^u care să fie rădăcină a lui $x^{23} + 1$ și a lui $g(x)$ polinomul generator ($\alpha^n = 1$, $n = 2^m - 1$).

Deci $\alpha^{23u} + 1 = 0$ dar $x^{2^{11}-1} + 1$ are ca rădăcină pe α, respectiv $\alpha^{2^{11}-1} = 1$.

Din aceste relații rezultă că $u = \dfrac{2^{11} - 1}{23} = 89$.

Deci polinomul generator $g(x)$ trebuie să aibă pe α^{89} ca rădăcină respectiv să fie polinomul minimal al elementului α^{89} din $GF(2^{11})$. În [212] pag. 476 APPENDIX [C] la polinoamele ireductibile de grad 11, figurează ca polinom minimal pentru elementul α^{89} din $GF(2^{11})$ polinomul:

$$g_1(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + x^{10} + x^{11} \tag{5.224}$$

sau

$$g_2(x) = 1 + x + x^5 + x^6 + x^7 + x^9 + x^{11} \tag{5.225}$$

Rezultă:

$$x^{23} - 1 = (1 + x)\, g_1(x)\, g_2(x) \tag{5.226}$$

Pentru decodare se poate utiliza tot metoda bazată pe corespondența între corectori și cuvintele eroare (§ 5.4.3.1).

5.4.6.4. Sincronizarea codurilor bloc

Pentru decodarea unui cuvînt de cod, decodorul trebuie să fie capabil să identifice primul simbol din fiecare cuvînt recepționat.

Erorile cauzate de pierderea sincronizării sînt extrem de greu de corectat; din cauza aceasta în cele mai multe cazuri se pune doar problema recuperării sincronizării.

Cea mai simplă metodă de sincronizare constă în *utilizarea unor secvențe Barker*, caracterizate printr-o funcție de autocorelație cu un vîrf foarte pronunțat.

O *metodă mai eficientă*, dar mult mai complexă, constă în *construirea unor coduri care să ia în considerare simultan erorile canalului și erorile de sincronizare.*

5.5. Coduri convoluționale

Codurile convoluționale sau **recurente** se caracterizează prin faptul că *simbolurile de informație generate de sursă sînt prelucrate în flux continuu*, fără a fi împărțite în cuvinte de cod ca la codurile bloc. Pentru a putea utiliza însă unele noțiuni elaborate la codurile bloc, vom diviza fluxul continuu de simboluri de informație și de control în blocuri care, însă, nu mai au semnificație de cuvinte de cod. În acest caz simbolurile de control dintr-un bloc controlează simbolurile de informație și din alte blocuri.

5.5.1. Structura codurilor convoluționale

În succesiunea continuă a simbolurilor se definește un bloc de lungime n_0 format din k_0 simboluri de informație și m_0 simboluri de control.

Simbolurile de control dintr-un bloc de lungime n_0 controlează și simboluri de informație din alte blocuri. *Numărul întreg de blocuri, incluzînd primul bloc și ultimul bloc, în care se găsesc simbolurile de informație verificate de simbolurile de control din blocul considerat* se notează cu m și se numește **constrîngere,** iar numărul:

$$n = m\, n_0 \tag{5.227}$$

se numește **lungime de constrîngere.**

În cazul codurilor convoluționale, cuvintele de cod sînt definite ca fiind o succesiune semi-infinită de simboluri de informație și control:

$$\mathbf{V} = [x_1^{(1)} \dots x_1^{(k_0)} y_1^{(1)} \dots y_1^{(m_0)} x_2^{(1)} \dots x_2^{(k_0)} \; y_2^{(1)} \dots y_2^{(m_0)} \dots] \tag{5.228}$$

unde $x_j^{(i)}$ este simbolul de informație care ocupă poziția i în blocul j;
$y_j^{(l)}$ — simbolul de control care ocupă poziția l în blocul j;
k_0 — numărul de simboluri de informație într-un bloc;
m_0 — numărul de simboluri de control într-un bloc;
$n_0 = k_0 + m_0$ este numărul de simboluri într-un bloc.

Pentru o scriere mai concisă se introduc notațiile:

$$\mathbf{X}_j = [x_j^{(1)} \dots x_j^{(k_0)}] \tag{5.229}$$

și

$$\mathbf{Y}_j = [y_j^{(1)} \dots y_j^{(m)}] \tag{5.230}$$

Cu aceste notații cuvîntul de cod poate fi scris:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{X}_1\ \mathbf{Y}_1\ \mathbf{X}_2\ \mathbf{Y}_2 \dots \mathbf{X}_j\ \mathbf{Y}_j \dots] \tag{5.231}$$

sau notînd:

$$\mathbf{V}_j = [\mathbf{X}_j\ \mathbf{Y}_j] \tag{5.232}$$

avem:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1\ \mathbf{V}_2 \dots V_j \dots] \tag{5.233}$$

Primele $n = m\ n_0$ simboluri:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{X}_1\ \mathbf{Y}_1\ \mathbf{X}_2\ \mathbf{Y}_2 \dots \mathbf{X}_m\ \mathbf{Y}_m] \tag{5.234}$$

din cuvîntul de cod V formează un cuvînt inițial de cod.

În cazul particular, în care lungimea de constrîngere n este egală cu numărul n_0 de simboluri dintr-un bloc, (respectiv $m = 1$, matricea $\mathbf{W} = [\mathbf{X}_1\ \mathbf{Y}_1]$ reprezintă primul cuvînt de cod al unui cod bloc, iar matricea **V** dată de relația (5.233) reprezintă o succesiune de cuvinte ale unui cod bloc.

În acest caz, în conformitate cu cele stabilite în paragrafele precedente, relațiile între simbolurile de control și cele de informație sînt determinate de o matrice de control:

$$\mathbf{H}_0 = [\mathbf{R}\ \mathbf{I}_{m_0}] \tag{5.235}$$

unde **R** este o matrice cu m_0 linii și k_0 coloane (notată diferit față de notația de la codurile bloc pentru a pune în evidență că discutăm coduri convoluționale), iar $\mathbf{I}_{m_0}$ este matricea unitate de ordinul m_0.

Spre deosebire de notațiile precedente ale matricei **H** de control, în acest caz avem o inversare a elementelor, în loc de $[\mathbf{I}_{m_0}\ \mathbf{R}]$ avem $[\mathbf{R}\ \mathbf{I}_{m_0}]$ fiindcă în cuvîntul de cod s-a inversat ordinea simbolurilor de informație cu cele de control, în loc de $[\mathbf{Y}_1\ \mathbf{X}_1]$ avem $[\mathbf{X}_1\ \mathbf{Y}_1]$.

Codificarea are loc conform relației:

$$\mathbf{H}_0\mathbf{W}^T = [\mathbf{R}\ \mathbf{I}_{m_0}]\ [\mathbf{X}_1\ \mathbf{Y}_1]^T = [\mathbf{R}\ \mathbf{I}_{m_0}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \mathbf{Y}_1^T \end{bmatrix} = 0 \tag{5.236}$$

respectiv:

$$\mathbf{Y}_1^T = \mathbf{R}\ \mathbf{X}_1^T \tag{5.237}$$

Dacă în locul cuvîntului **W** de lungime finită, considerăm cuvîntul **V**, care este o succesiune semiinfinită de blocuri, în cazul particular cînd între aceste blocuri nu avem constrîngeri ($m = 1$), matricea **H** cu care se face codificarea conform relației $\mathbf{HV}^T = 0$ are forma:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I}_m & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{R} & \mathbf{I}_{m_0} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{R} & \mathbf{I}_{m_0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

unde numai elementele din diagonală sînt diferite de zero; aceste elemente ne dau legătura între simbolurile de control și cele de informație din blocurile care se succed, conform relației (5.237).

5.5.2. Codarea codurilor convoluționale cu ajutorul matricei de control **H**

În cazul general, în care lungimea de constrîngere este $n = m\,n_0$, în matricea de control **H** trebuie să intervină elemente (matrice) pe care le notăm cu $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_m$ care să ne dea legătura între simbolurile de control și cele de informații din cele m blocuri între care există constrîngeri.

Acest lucru se poate realiza dacă matricea **H** are forma:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{I}_{m_0} & 0 & & & & & & & & & & \\ \mathbf{R}_2 & 0 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{I}_{m_0} & 0 & \ldots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ \mathbf{R}_m & 0 & \mathbf{R}_{m-1} & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{I}_{m_0} & 0 & \ldots & & & \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_m & 0 & \mathbf{R}_{m-1} & 0 & & & 0 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{I}_{m_0} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \tag{5.238}$$

unde elementele notate cu **0** înseamnă matrice nule.

Relația $\mathbf{H}\mathbf{v}^T = 0$ ne dă:

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_1\,\mathbf{X}_1^T + \mathbf{Y}_1^T = 0 \\ &\mathbf{R}_2\,\mathbf{X}_1^T + \mathbf{R}_1\,\mathbf{X}_2^T + \mathbf{Y}_2^T = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathbf{R}_m\,\mathbf{X}_1^T + \mathbf{R}_{m-1}\,\mathbf{X}_2^T + \ldots + \mathbf{R}_1\,\mathbf{X}_m^T + \mathbf{Y}_m^T = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5.239}$$

Matricea

$$\mathbf{h} = [\mathbf{R}_m\ 0\ \mathbf{R}_{m-1}\ 0 \ldots 0\ \mathbf{R}_1\ \mathbf{I}_{m_0}] \tag{5.240}$$

se numește **matrice de bază** și se observă că după m blocuri, liniile matricei **H** sînt formate din matricea **h** decalată la fiecare linie cu un element $\mathbf{H}_0$ spre dreapta. Acest lucru înseamnă că matricea **h** controlează în mod succesiv cîte m blocuri din cuvîntul de cod **V**.

Pentru exemplificare, să considerăm cazul în care $m = 4$ și să scriem:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^T = 0 \tag{5.241}$$

respectiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{I}_{m_0} & 0 & \ldots & & & & & & & & \\ \mathbf{R}_2 & 0 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{I}_{m_0} & 0 & \ldots & & & & & & \\ \mathbf{R}_3 & 0 & \mathbf{R}_2 & 0 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{I}_{m_0} & 0 & \ldots & & & & \\ \mathbf{R}_4 & 0 & \mathbf{R}_3 & 0 & \mathbf{R}_2 & 0 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{I}_{m_0} & 0 & \ldots & & \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_4 & 0 & \mathbf{R}_3 & 0 & \mathbf{R}_2 & 0 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{I}_{m_0} & 0 & \ldots \\ \ldots & & & & & & & & & & & \\ \ldots & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{X}_2^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \mathbf{X}_3^T \\ \mathbf{Y}_3^T \\ \mathbf{X}_4^T \\ \mathbf{Y}_4^T \\ \mathbf{X}_5^T \\ \mathbf{Y}_5^T \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \tag{5.242}$$

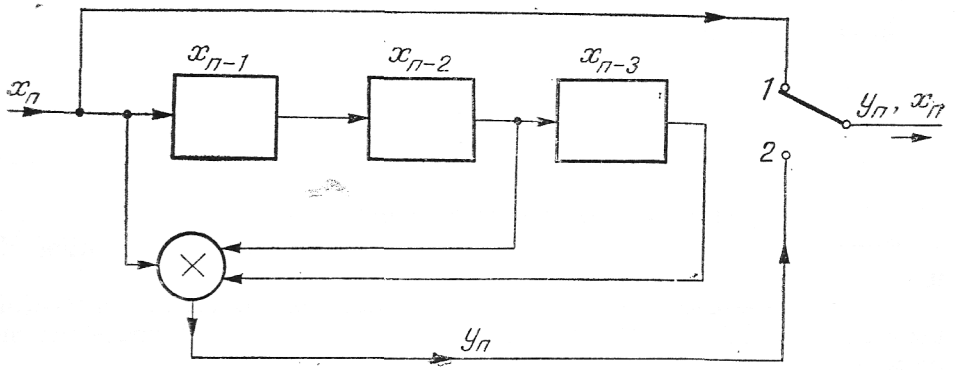


Fig. 5.24. Codor convoluțional.

sau:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}_1\mathbf{X}_1^T + \mathbf{Y}_1^T = 0\\
&\mathbf{R}_2\mathbf{X}_1^T + \mathbf{R}_1\mathbf{X}_2^T + \mathbf{Y}_2^T = 0\\
&\mathbf{R}_3\mathbf{X}_1^T + \mathbf{R}_2\mathbf{X}_2^T + \mathbf{R}_1\mathbf{X}_3^T + \mathbf{Y}_3^T = 0\\
&\mathbf{R}_4\mathbf{X}_1^T + \mathbf{R}_3\mathbf{X}_2^T + \mathbf{R}_2\mathbf{X}_3^T + \mathbf{R}_1\mathbf{X}_4^T + \mathbf{Y}_4^T = 0
\end{aligned} \tag{5.243}$$

În continuare să considerăm unul din codurile uzuale la care $k_0 = 1$, $m_0 = 1$ și $n_0 = 2$. În acest caz matricele $\mathbf{R}_i$ sînt formate dintr-un singur element, deci $\mathbf{R}_i \in GF(2)$.

Pentru a obține niște proprietăți de ortogonalitate care ușurează codarea, așa după cum se va vedea, alegem matricea $\mathbf{h}$ după cum urmează:

$$\mathbf{R}_1 = 1,\ \mathbf{R}_2 = 0,\ \mathbf{R}_3 = 1,\ \mathbf{R}_4 = 1$$

respectiv:

$$\mathbf{h} = [1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1]$$

În acest caz relațiile (5.243) devin:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1\\
y_2 &= x_2\\
y_3 &= x_3 + x_1\\
y_4 &= x_4 + x_2 + x_1
\end{aligned} \tag{5.244}$$

În general:

$$y_n = x_n + x_{n-2} + x_{n-3} \tag{5.245}$$

unde $x_n = 0$ pentru $n \leqslant 0$.

Codorul care realizează aceste ecuații este arătat în fig. 5.24.

5.5.3. Decodarea codurilor convoluționale cu logică majoritară

În mod analog cuvîntului de cod, se poate defini un vector eroare:

$$\mathbf{E} = [\varepsilon_1^{(1)} \ldots \varepsilon_1^{(k_0)} \eta_1^{(1)} \ldots \eta_1^{(m_0)} \ldots] \tag{5.246}$$

unde $\varepsilon_1^{(j)} = 1$ dacă simbolul $x_1^{(j)}$ este eronat și $\eta_1^{(l)} = 1$ dacă simbolul $y_1^{(l)}$ este eronat.

Cuvîntul recepționat este:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \mathbf{E} \tag{5.247}$$

iar corectorul:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{V}'^T = \mathbf{H}\mathbf{E}^T \tag{5.248}$$

În cazul exemplului precedent:

$$\mathbf{E} = [\varepsilon_1\ \eta_1\ \varepsilon_2\ \eta_2 \ldots]$$

$$\begin{aligned} z_1 &= y'_1 + x'_1 = \eta_1 + \varepsilon_1 \\ z_2 &= y'_2 + x'_2 = \eta_2 + \varepsilon_2 \\ z_3 &= y'_3 + x'_3 + x'_1 = \eta_3 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \\ z_4 &= y'_4 + x'_4 + x'_2 + x'_1 = \eta_4 + \varepsilon_4 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{5.249}$$

Corecția se face simbol cu simbol și numai asupra simbolurilor de informație.

Deci prima eroare care trebuie corectată, dacă există, este ε_1. Din ecuațiile precedente eliminăm ecuația a doua care nu conține nici o informație privind pe ε_1 și se obține

$$\begin{aligned} z_1 &= \eta_1 + \varepsilon_1 \\ z_3 &= \eta_3 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \\ z_4 &= \eta_4 + \varepsilon_4 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{5.250}$$

Observăm că toate ecuațiile precedente îl conțin pe ε_1 și că nici un alt simbol eroare nu este membru în două ecuații. În acest caz spunem că setul de combinații liniare (5.250) este *ortogonal* pe simbolul ε_1.

Dacă intervine o eroare în primul simbol x'_1, respectiv $\varepsilon_1 = 1$ și mai intervine încă o eroare în oricare altă poziție, majoritatea corectorilor din (5.250) sînt diferiți de zero.

Deci, dacă majoritatea corectorilor (5.250) sînt egali cu 1, decidem că avem o eroare în poziția x'_1 respectiv $\varepsilon_1 = 1$ și în caz contrar, decidem că $\varepsilon_1 = 0$ adică nu avem eroare în prima poziție.

Trebuie să remarcăm că decodarea se face corect numai dacă în afara poziției x'_1, care poate să fie eronată sau corectă, există cel mult o eroare în oricare altă poziție pe lungimea de constrîngere.

Din cele precedente rezultă că decodorul trebuie să aibă circuite logice care să sesizeze dacă majoritatea corectorilor sînt „1" sau „0". În fig. 5.25 este

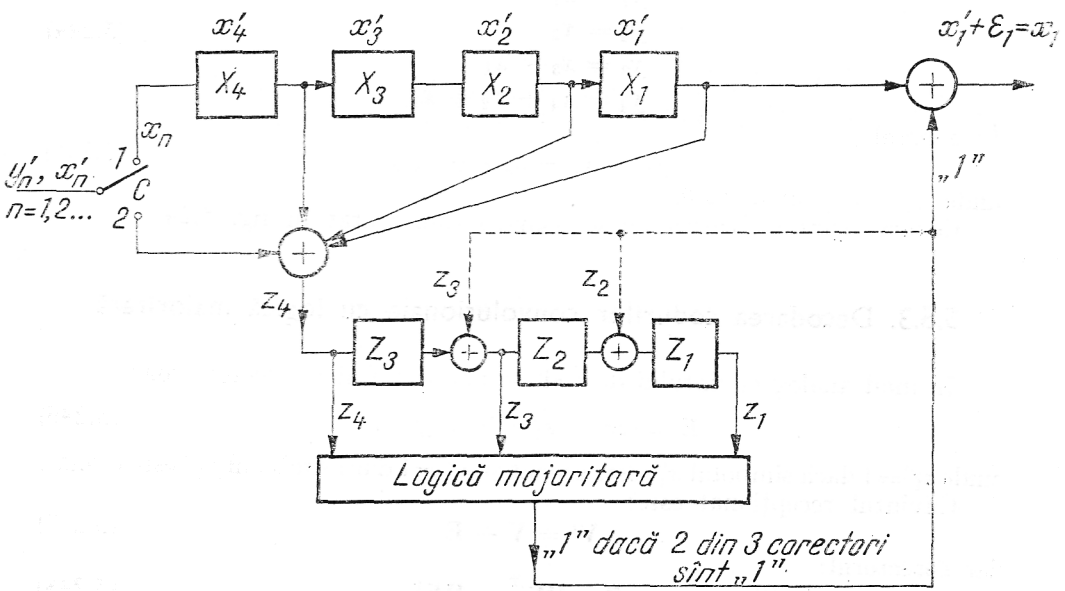


Fig. 5.25. Decodor convoluțional.

arătat decodorul. Cheia C se găsește în poziția 1 pentru simbolurile de informație și în poziția 2 pentru simbolurile de control.

Pentru a ușura înțelegerea procesului de decodare, în tabloul de mai jos sînt indicate stările diferitelor celule din registrele cu deplasare.

celula \ t	1	2	3	4
X_4	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4
X_3	0	x'_1	x'_2	x'_3
X_2	0	0	x'_1	x'_2
X_1	0	0	0	x'_1
Z_4	$x'_1 + y'_1$	$x'_2 + y'_2$	$x'_3 + y'_3 + x'_1$	$x'_4 + y'_4 + x'_2 + x'_1$
Z_3	0	$x'_1 + y'_1$	$x'_2 + y'_2$	$x'_3 + y'_3 + x'_1$
Z_2	0	0	$x'_1 + y'_1$	$x'_2 + y'_2$
Z_1	0	0	0	$x'_1 + y'_1$

Se observă că la tactul „4" s-au format corectorii în conformitate cu (5.249) și că procesul de corecție asupra lui x'_1, care în acest moment se găsește la ieșire, poate să aibă loc.

În continuare, pentru a decoda simbolul următor x'_2, în matricea **H** trebuie să considerăm linia următoare și ca urmare se elimină prima ecuație din (5.249) și se mai adaugă una nouă:

$$z_5 = y'_5 + x'_5 + x'_3 + x'_2$$

În acest caz corectorii care vor trebui luați în considerare sînt analog relațiilor (5.249):

$$\begin{aligned} z_2 &= \eta_2 + \varepsilon_2 \\ z_3 &= \eta_3 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \\ z_4 &= \eta_4 + \varepsilon_4 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \\ z_5 &= \eta_5 + \varepsilon_5 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{5.251}$$

Eliminînd, ca și în cazul precedent, ecuația care nu conține pe ε_2 se obține:

$$\begin{aligned} z_2 &= \eta_2 + \varepsilon_2 \\ z_4 &= \eta_4 + \varepsilon_4 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \\ z_5 &= \eta_5 + \varepsilon_5 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{5.252}$$

ecuații asemănătoare cu (5.250) la care indicele lui z_i a crescut cu o unitate și în care ε_1 trebuie să fie egal cu 0.

Dacă prima poziție nu a fost eronată, $\varepsilon_1 = 0$, se obține:

$$\begin{aligned} z_2 &= \eta_2 + \varepsilon_2 \\ z_4 &= \eta_4 + \varepsilon_4 + \varepsilon_2 \\ z_5 &= \eta_5 + \varepsilon_5 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{5.253}$$

adică un set de combinații liniare ortogonale pe ε_2, deci decodarea se face exact ca și în cazul precedent.

Dacă prima poziție x'_1 a fost eronată, după efectuarea corecției $x'_1 + \varepsilon_1 = x_1$, trebuie să eliminăm valorile lui ε_1 din celulele Z_3 și Z_2 prin adunarea modulo doi a unui „1" așa cum se arată punctat în fig. 3.25.

Dacă în procesul de corecție decodorul va face o eroare, aceasta va mai fi urmată de cîteva erori după care procesul de corecție revine la normal.

Alte metode de decodare a codurilor convoluționale sînt descrise în [212], din care menționăm *algoritmul de decodare a lui Viterbi* și *decodarea secvențială*.

5.6. Procedeul de întrețesere

Scopul acestui procedeu este de a permite utilizarea codurilor destinate corectării erorilor independente, la canale cu pachete de erori.

Ideia este de a transmite simbolurile unui cuvînt de cod, întrețesute cu simboluri din alte cuvinte de cod, astfel încît *două simboluri succesive din același cuvînt să se găsească la o distanță mai mare decît lungimea l a pachetului de erori*. În felul acesta un pachet de erori nu poate afecta mai multe simboluri din același cuvînt și ca urmare simbolurile cuvîntului de cod fiind eronate de pachete diferite (deci independente) efectul lor este acela al erorilor independente.

Cele precedente sînt ilustrate în fig. 5.26.

Dacă notăm cu un indice superior numărul de ordine al cuvîntului, se vede că pe canal se transmite succesiunea:

$$a_{n-1}^{(1)} \quad a_{n-1}^{(2)} \ldots a_{n-1}^{(l)} \quad a_{n-2}^{(1)} \quad a_{n-2}^{(2)} \ldots$$

Rezultă că *un pachet de erori de lungime l nu afectează decît un singur simbol dintr-un cuvînt de cod* și în felul acesta *se obține efect de erori independente*.

5.7. Detecție globală de erori

În unele aplicații este necesar ca probabilitatea mesajelor (cuvinte de cod) cu erori nedetectate să fie extrem de mică ($P < 10^{-10}$). În acest caz prezența unor erori ce rămîn după procesul de corecție a erorilor, trebuie detectată.

Acest lucru poate fi realizat așa cum se arată în fig. 5.27.

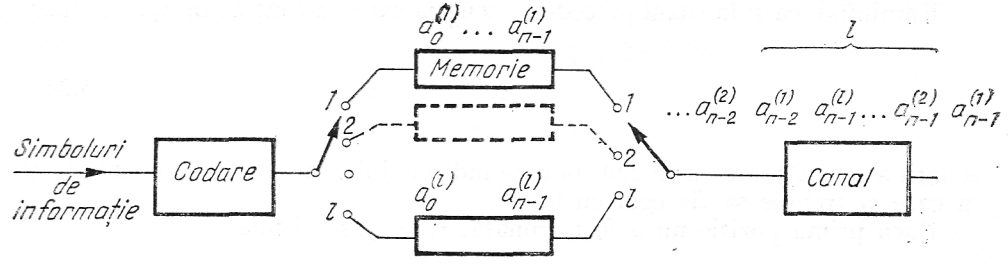


Fig. 5.26. Procedeu de întrețesere.

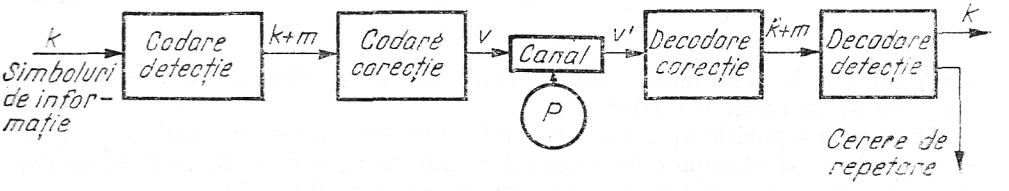


Fig. 5.27. Detecție globală de erori.

În primul rînd se introduc simboluri de control pentru detecția de erori, apoi cuvîntul astfel format se codifică din nou adăugînd simboluri de control pentru corecția erorilor. La recepție se fac operațiile în ordine inversă, respectiv se face decodificarea pentru corecția erorilor apoi decodificarea pentru detecția erorilor și în cazul prezenței acestora se cere retransmisia mesajului.

5.8. Sisteme de criptare

Primele texte cifrate cunoscute datează de cca 3 500 ani și au fost destinate să păstreze secretul unor date cu aspect politic, militar, economic sau religios.

În prezent în legătură cu utilizarea tot mai largă a calculatoarelor se simte tot mai mult nevoia menținerii secretului datelor stocate sau transmise.

Sistemele electronice de criptare pot fi grupate în două categorii:

— *criptare cu cheie aleatoare;*

— *criptare cu cheie pseudoaleatoare.*

În principiu, criptarea se realizează adunînd modulo 2 un cuvînt de cod care conține simboluri de informație $\mathbf{V}_{inf}$ cu un cuvînt numit **cheie** „*C*" obținîndu-se astfel informația codată $\mathbf{I}_c$:

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{V}_{inf} \oplus \mathbf{C} \tag{5.254}$$

La recepție se adună modulo-2 cheia „C" la cuvîntul $\mathbf{I}_c$ și se obține textul clar, respectiv textul inițial $\mathbf{V}_{inf}$:

$$\mathbf{V}_{inf} = \mathbf{I}_c \oplus \mathbf{C} \tag{5.255}$$

5.8.1. Criptare cu cheie aleatoare

Principiul acestei criptări se bazează pe faptul că *însumarea unei secvențe care transportă informație, cu o secvență aleatoare dă ca rezultat tot o secvență aleatoare.*

Semnalul care transmite informația este codificat într-o succesiune de simboluri binare.

Cheia aleatoare este formată dintr-o succesiune de simboluri binare obținute de la o sursă de zgomote aleatoare, și imprimată pe bandă magnetică sau bandă de hîrtie perforată (fig. 5.28).

Banda aleatoare (cheia) de la recepție trebuie să fie identică cu cea de la emisie și să înceapă din același punct.

Pentru asigurarea unui secret absolut, banda aleatoare trebuie să îndeplinească *următoarele condiții*:

— să fie într-adevăr aleatoare adică, în nici un caz, să nu poată fi reprodusă;

— să fie de lungime cel puțin cît textul clar;

— să fie folosită o singură dată.

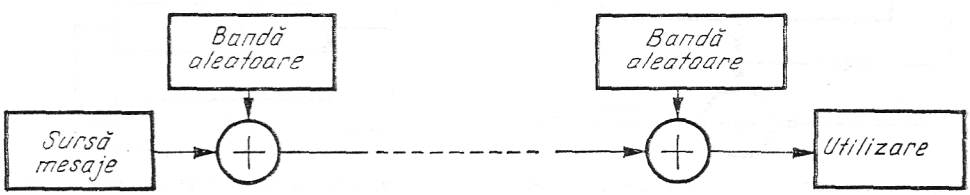


Fig. 5.28. Cifrare cu bandă aleatoare.

Cînd aceste condiții sînt îndeplinite, descifrarea nu este posibilă chiar dacă se utilizează cele mai puternice calculatoare.

Sistemul este utilizat pentru transmiterea unor informații de foarte mare importanță. El are marele dezavantaj că o copie după banda aleatoare utilizată la emisie trebuie transmisă la recepție.

5.8.2. Criptare cu cheie pseudoaleatoare

În cazurile în care nu se dorește obținerea unui secret absolut, în loc de bandă aleatoare se poate folosi un generator de secvențe foarte lungi, numite **secvențe pseudoaleatoare.**

Generatorii de secvențe pseudoaleatoare sînt formați din unul sau mai multe registre de deplasare cu reacție, avînd conexiuni în conformitate cu coeficienții unor polinoame primitive, (C_2) astfel încît generează cicluri de lungime maximă.

Prin schimbarea coeficienților polinoamelor C_2 și a stării inițiale a registrului (C_1) (fig. 5.29) se pot obține secvențe pe care un decriptor neautorizat cu greu le-ar putea reproduce.

La recepție un generator identic, în sincronism cu cel de la emisie, cu cheile c_1 și c_2 în aceleași poziții, generează o secvență pseudoaleatoare identică cu cea de la emisie, care adunată modulo-2 cu secvența recepționată, ne dă secvența inițială.

Principiul este arătat în fig. 5.28, unde benzile aleatoare trebuie înlocuite cu generatori de secvențe pseudo-aleatoare. Sistemul are dezavantajul că dacă se cunoaște un text clar de m simboluri (m = gradul polinomului caracteristic al registrului), atunci descifrarea devine foarte simplă.

Generatoarele de secvențe foarte lungi se pot obține prin însumarea modulo-2 a ieșirilor din două sau mai multe registre de deplasare cu reacție (fig. 5.30).

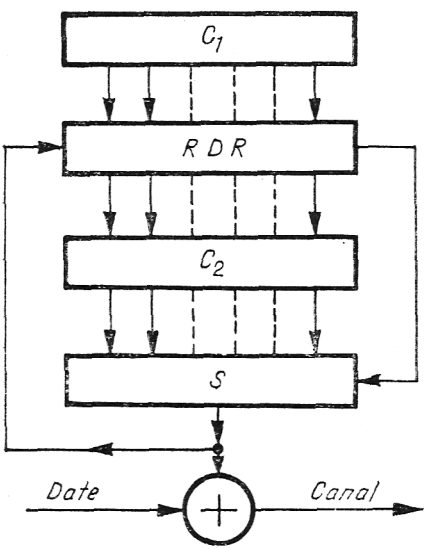


Fig. 5.29. Generator de secvențe pseudo-aleatoare.

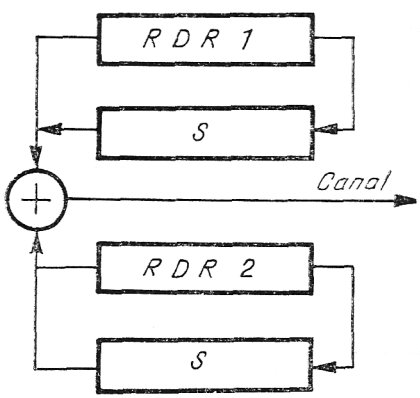


Fig. 5.30. Generator de secvențe pseudo-aleatoare cu două registre.

Fie $\mathbf{T}_1$ și $\mathbf{T}_2$ matricele caracteristice a două registre și U_1 și U_2 stările inițiale.

Ieșirea din registru se poate face în orice punct, determinat de o matrice $\boldsymbol{\sigma}$ numită **matricea de selecție**, care în cazul fig. 5.30 este:

$$\boldsymbol{\sigma} = [0 \ldots 0 \ 1) \tag{5.256}$$

indicînd faptul că s-a selecționat simbolul din celula C_{m-1} a registrului (vezi 3.4.5.1).

Secvența rezultantă este:

$$\mathbf{S} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ldots \alpha_n]$$

unde:

$$\alpha_i = \sigma_1 \mathbf{T}_1^i \mathbf{U}_1 + \sigma_2 \mathbf{T}_2^i \mathbf{U}_2 \tag{5.257}$$

Să notăm cu N perioada de repetiție a acestei secvențe:

$$\alpha_{i+N} = \alpha_i \qquad \forall\, i$$

respectiv:

$$\sigma_1 \mathbf{T}_1^{i+N} \mathbf{U}_1 + \sigma_2 \mathbf{T}_2^{i+N} \mathbf{U}_2 = \sigma_1 \mathbf{T}_1^i \mathbf{U}_1 + \sigma_2 \mathbf{T}_2^i \mathbf{U}_2 \tag{5.258}$$

dar

$$\mathbf{T}_1^{n_1} = \mathbf{I}_1 \quad \text{și} \quad \mathbf{T}_2^{n_2} = \mathbf{I}_2 \tag{5.259}$$

unde $\mathbf{I}_1$ și $\mathbf{I}_2$ sînt matrice identice.

Ca relația (5.258) să fie satisfăcută trebuie ca:

$$\mathbf{T}_1^N = \mathbf{I}_1 \quad \text{și} \quad \mathbf{T}_2^N = \mathbf{I}_2 \tag{5.260}$$

Cel mai mic număr N care satisface această condiție este c.m.m.m.c. al numerelor n_1 și n_2. Dacă acestea sînt numere prime atunci:

$$N = n_1 n_2$$

Ca exemplu să considerăm registrele cu polinoame primitive de grad $m_1 = 17$ și $m_2 = 20$ respectiv cu $n_1 = 2^{m_1} - 1 = 131071$ și $n_2 = 2^{m_2} - 1 = 1.048.575$ care nu au divizori comuni, deci $N = n_1 \cdot n_2$.

Dacă se consideră o frecvență de tact $f = 1$ kHz, atunci secvența se repetă după $\tau = \frac{1}{f} N = 1\,600$ zile $= 4$ 1/2 ani.

În cazul rețelelor în care sînt mai mulți utilizatori și mai multe bănci de date, se pune problema ca utilizatorul să se asigure că a intrat în banca dorită, iar calculatorul trebuie să se asigure că corespondentul este cel autorizat să aibă acces la respectiva bancă de date. În acest scop utilizatorul își dă identitatea A în clar și compune arbitrar o secvență scurtă de date X pe care o cifrează cu propria lui cheie. Calculatorul cunoaște cheia care-i corespunde lui A și descifrează secvența X cu această cheie. La această secvență descifrată calculatorul adaugă propria lui secvență arbitrară Y și cifrează ambele secvențe cu cheia lui A, transmițînd secvențele cifrate lui A. La descifrarea mesajului, A compară secvența X recepționată cu secvența X transmisă și se asigură de identitatea calculatorului.

În mesajele ulterioare transmise de A, acesta adaugă secvență Y pe care a descifrat-o, cifrează totul cu cheia lui și transmite calculatorului. Acesta compară secvența Y descifrată cu cea inițial transmisă de el și se asigură de identitatea corespondentului.

CAPITOLUL 6

SPAȚIUL SEMNALELOR

Definițiile spațiului au un caracter axiomatic, în sensul că o mulțime V este un spațiu cînd verifică anumite axiome.

De regulă într-un spațiu avem două structuri matematice: una *topologică* (de vecinătăți) și una *algebrică*.

Formînd o mulțime cu semnale care au o anumită proprietate comună (de exemplu, amplitudine limitată), se pune problema să examinăm diferitele caracteristici distinctive ale elementelor (semnalelor) din această mulțime (energii, lărgimi de bandă, durate etc.).

Acest lucru poate fi realizat dacă fiecărei perechi de elemente ale mulțimii facem să-i corespundă un număr real, pe care-l interpretăm ca fiind „distanța" între respectivele elemente, adică o măsură a deosebirilor existente între ele. *Mulțimea* considerată *în care definim în mod convenabil* (în funcție de aplicațiile dorite) *o distanță între elemente* o numim **spațiul semnalului.**

6.1. Spații metrice

O mulțime V se numește **spațiu metric** *dacă fiecărei perechi de puncte $x, y \in V$ i se asociază un număr real $d(x, y) \in \mathbb{R}$, numit distanță, care are proprietățile:*

1. $d(x, y) > 0 \quad \forall\, x \neq y$ (6.1)
2. $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$ (6.2)
3. $d(x, y) = d(y, x), \qquad \forall\, x, y \in V$ (6.3)
4. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in V$ (6.4)

Pentru a da cîteva exemple de distanță să considerăm două semnale $\mathbf{x} = [\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n]$ și $\mathbf{y} = [\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n]$, determinat de parametrii $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. În acest caz următoarele expresii sînt exemple de distanță:

1. $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$ (6.5)
2. $d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$ (6.6)
3. $d_3(x, y) = max\{|\alpha_i - \beta_i|; \quad i = \overline{1, n}\}$ (6.7)

Metrica $d_2(x, y)$ se numește **metrică euclidiană.**

Aceste metrici pot fi generalizate la cazul cînd α_i, β_i sînt numere complexe sau cînd n tinde către infinit.

O altă distanță care a fost utilizată în cap. 5 este **distanța Hamming**;

$$d_4(x, y) = \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i \oplus \beta_i] \text{ unde } \alpha_i, \beta_i \in GF(2) \tag{6.8}$$

Metrici analoage cazurilor 1, 2, 3 pot fi definite cînd elementele spațiului sînt date ca funcții de timp, definite pe intervalul D:

$$1.\ d_1(x, y) = \int_D |\, x(t) - y(t)\,|\, dt \tag{6.9}$$

$$2.\ d_2(x, y) = \left[\int_D |\, x(t) - y(t)\,|^2\, dt\right]^{1/2} \tag{6.10}$$

$$3.\ d_3(x, y) = sup\,\{|\, x(t) - y(t)\,|\,;\quad t \in D\} \tag{6.11}$$

unde *sup* înseamnă supremum adică cea mai mică margine superioară.

Trebuie să subliniem faptul că două metrici diferite pe aceeași mulțime de elemente formează două spații metrice diferite.

● **Convergență.** În unele probleme avem de-a face cu șiruri infinite de elemente $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ selecționate dintr-o mulțime X. Conceptul de distanță din spațiul metric ne permite să examinăm o proprietate fundamentală a acestor șiruri, numită convergență.

Spunem că *șirul* $\{x_n;\ x_n \in X,\ n = 1, 2, ...\}$ *este* **convergent** *dacă există un* $x \in X$ *astfel încît pentru* $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_0 > 0$ *astfel încît pentru* $(\forall)\ n \geqslant n_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$; acest lucru se scrie prescurtat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Intuitiv este clar că punctele succesive într-un șir convergent, în cele din urmă tind să devină din ce în ce mai apropiate pe măsură ce n crește.

Un șir cu această proprietate se numește *șir Cauchy*. Mai exact, pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$; $(\exists)\ n_0$ astfel încît pentru $(\forall)\ n, m \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Din inegalitatea triunghiului $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x)$ rezultă că orice șir convergent este un șir Cauchy. Invers, un șir Cauchy poate să nu fie convergent de exemplu pentru simplul motiv că elementul spre care tinde la limită șirul, poate să nu fie în mulțimea X.

Spațiul metric în care orice șir Cauchy este convergent se numește **spațiu metric complet.**

Exemplu. Fie $X = C$, mulțimea semnalelor reale continue definite pe un interval D și fie matricea asociată $d_2(x, y)$ din (6.10). Să considerăm șirul x_n arătat în fig. 6.1.

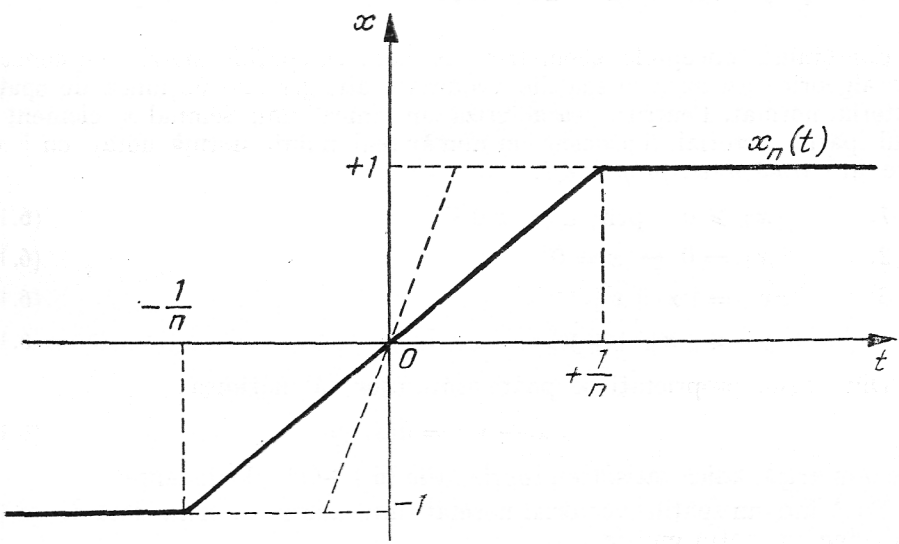


Fig. 6.1. Șir Cauchy.

Luăm $D = [-1\ 1]$ și calculăm

$$d_2(x_m, x_n) = \left[\int_{-1}^{+1} |x_m(t) - x_n(t)|^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3n}}\left(1 - \frac{n}{m}\right) \quad \text{pentru } m > n$$

Deci șirul x_n este un șir Cauchy, dar el tinde la limită către funcția discontinuă $sgn\ t = \frac{t}{|t|}$, deci spațiul metric (C, d_2) nu este complet.

Aceeași secvență de elemente în funcție de metrica asociată poate forma sau nu un șir Cauchy convergent. Faptul este evident dacă ținem seamă că deși avem aceleași elemente, ne găsim în spații metrice diferite.

6.2. Spații vectoriale

Spațiul semnalului devine o noțiune mai utilă dacă i se adaugă o structură algebrică simplă. *Dacă alegem structura de grup și în plus definim și operația de multiplicare cu un scalar spunem că avem de-a face cu un* **spațiu vectorial** *sau* **spațiu liniar,** pe care îl notăm în general cu V. Dacă scalarul este un număr real, spațiul se numește *real,* iar dacă scalarul este un număr complex, spațiul se numește *spațiu vectorial complex.* Elementele spațiului le numim vectori.

Fie $\{\varphi_k\}$ un set de N vectori liniari independenți, astfel încît pentru $(\forall)\ v \in V$ se poate scrie:

$$v = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \tag{6.12}$$

În acest caz spunem că N este dimensiunea spațiului, iar α_k sînt componentele vectorului v pe vectorii bază φ_k.

6.3. Spații vectoriale normate

Combinînd conceptele geometrice asociate cu spațiile metrice cu conceptele algebrice asociate cu spațiile vectoriale ajungem la noțiunea de **spațiu vectorial normat.** Pentru a caracteriza „mărimea" unui semnal x, element al unui spațiu vectorial, îi asociem un număr real numit **normă** notat cu $\|x\|$ care are *următoarele proprietăți*:

1. $\|x\| \geqslant 0$ pentru $(\forall)\ x \in V$ (6.13)
2. $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$ (6.14)
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ (6.15)
4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (6.16)

Din aceste proprietăți se poate arăta ușor că mărimea

$$\|x - y\| = d(x, y) \tag{6.17}$$

este o metrică, adică satisface proprietățile (6.1÷6.4) ale distanței.

Dacă într-un spațiu vectorial normat introducem metrica dată de (6.17) el devine un spațiu metric.

Din (6.17) se observă că norma unui vector este distanța sa de la origine:

$$d(x, 0) = \| x \| \tag{6.18}$$

Un *spațiu vectorial normat care este* de asemenea *complet ca spațiu metric* se numește **spațiu Banach.**

Metricele exemplificate în § 6.1 pot fi interpretate ca fiind induse de normă. Astfel, de exemplu putem defini o normă în R^n sau C^n prin:

$$\| x \| = \left[\sum_{i=1}^{n} | \alpha_i |^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.19}$$

iar pentru semnale definite pe durata D:

$$\| x \| = \left[\int_D | x(t) |^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.20}$$

În felul acesta, interpretăm norma semnalului la pătrat ca fiind energia semnalului.

Mulțimea tuturor semnalelor definite pe D a căror normă (6.20) este finită este numită spațiul funcțiilor de pătrat integrabil și se notează cu $L^2(D)$.

6.4. Spații cu produs scalar

Pentru a face o ultimă completare la spațiul semnalului prezentat în paragrafele anterioare îi mai adăugăm o structură geometrică sub forma de produs scalar între doi vectori. Ne vom referi la spații vectoriale complexe, spațiile reale fiind un caz particular al acestora.

Oricărei perechi de elemente $x, y \in V$ i se asociază un număr complex notat cu $\langle x, y \rangle$, numit produs scalar al lui x și y cu *următoarele proprietăți*:

1. $\langle x, x \rangle = \| x \|^2 \geqslant 0$ și $\langle x. x \rangle = 0 \leftrightarrow x = 0$ (6.21)
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ (6.22)
3. $\langle \alpha x, \beta y \rangle = \alpha \beta^* \langle x, y \rangle$ (6.23)
4. $\langle x + y, v + w \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, w \rangle + \langle y, v \rangle + \langle y, w \rangle$ (6.24)

Din (6.21) rezultă că produsul scalar induce o normă, normă care la rîndul ei, conform (6.17), induce o distanță, deci *spațiul cu produs scalar este un spațiu metric cu o metrică particulară. Un spațiu cu produs scalar care este complet ca spațiu metric se numește* **spațiu Hilbert.**

Se spune că doi vectori x și y sînt *ortogonali* dacă

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = 0$$

Setul de vectori $\{\varphi_k\}$ se spune că este *ortonormal* dacă

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \delta_{kj}$$

unde:

$$\delta_{kj} = 1 \text{ dacă } k = j, \quad \delta_{kj} = 0 \text{ dacă } k \neq j$$

6.4.1. Produsul scalar în funcție de componente

Fie:

$$v = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \quad \text{și} \quad w = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \varphi_j \tag{6.25}$$

unde:

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \delta_{kj}.$$

Conform relațiilor (6.23) și (6.24) avem:

$$\langle v, w \rangle = \langle \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k, \sum_{j=1}^{N} \beta_j \varphi_j \rangle = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left[\sum_{j=1}^{N} \beta_j^* \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \right]$$

respectiv:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_k^* \tag{6.26}$$

în mod analog

$$\langle w, v \rangle = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \alpha_k^* \tag{6.27}$$

6.4.2. Forma integrală a produsului scalar

Prin definiție sistemul $\{\varphi_k(t)\}$ definit pe intervalul $(0, D)$ este ortonormal dacă:

$$\int_0^D \varphi_k(t)\, \varphi_j^*(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^D \varphi_k^*(t)\, \varphi_j(t)\, \mathrm{d}t = \delta_{kj} \tag{6.28}$$

Să considerăm două semnale definite pe $(0, D)$

$$v(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(t) \quad \text{și} \quad w(t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \varphi_j(t)$$

și să evaluăm integrala:

$$\int_0^D v(t)\, w^*(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^D \left[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(t) \right] \left[\sum_{j=1}^{N} \beta_j^* \varphi_j^*(t) \right] \mathrm{d}t$$

se obține

$$\int_0^D v(t)\, w^*(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_k^* = \langle v, w \rangle \tag{6.29}$$

și în mod analog:

$$\int_0^D w(t) v^*(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \alpha_k^* = \langle w, v \rangle \tag{6.30}$$

Rezultă că produsul scalar $\langle v, w \rangle$ poate fi pus sau sub formă de sumă a produsului componentelor sau sub formă de integrală a produsului semnalelor.

Ținînd seama de inegalitatea lui Schwartz:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \| x \| \, \| y \| \tag{6.31}$$

se poate defini un unghi între doi vectori x și y într-un spațiu real

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\| x \| \| y \|} \leqslant 1 \tag{6.32}$$

Doi vectori sînt ortogonali dacă:

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \text{deci} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Noțiunea de ortogonalitate este *foarte utilă* în multe cazuri:

● Astfel, *în reprezentarea semnalului* v prin componentele sale (6.25) este util să considerăm o bază ortonormală:

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \delta_{kj} \tag{6.33}$$

fiindcă în acest caz componentele se determină foarte ușor:

$$\alpha_k = \langle v, \varphi_k \rangle \tag{6.34}$$

● Dacă considerăm doi vectori v, w ortogonali ($\langle v, w \rangle = 0$) atunci și $\langle v, w \rangle^* = 0$ iar:

$$\| v + w \|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \| v \|^2 + \langle v, w \rangle + \langle v, w \rangle^* + \| w \|^2$$

respectiv

$$\| v + w \|^2 = \| v \|^2 + \| w \|^2 \tag{6.35}$$

relație importantă care, după cum se va vedea ulterior, este valabilă *în cazul însumării a două semnale statistic independente.*

● Fie o funcție reală $x(t) \in L^2(-\infty, \infty)$ și o replică a sa decalată cu timpul τ, $x_\tau(t) = x(t + \tau)$. Pentru a măsura gradul în care cele două funcții se deosebesc, vom evalua distanța între ele. Dacă funcția $x(t)$ are variații rapide în timp, ea se va deosebi mai mult de $x_\tau(t)$, iar dacă variațiile sînt lente, deosebirile vor fi mai mici. Ne așteptăm deci ca în primul caz distanța să fie mai mare, iar în cazul al doilea mai mică

$$d^2(x, x_\tau) = \| x - x_\tau \|^2 = \langle x - x_\tau, x - x_\tau \rangle =$$
$$= \| x \|^2 - \langle x, x_\tau \rangle - \langle x_\tau, x \rangle + \| x_\tau \|^2$$

respectiv:

$$d^2(x, x_\tau) = \| x \|^2 + \| x_\tau \|^2 - 2 \langle x, x_\tau \rangle \tag{6.36}$$

Fiindcă energia semnalului nu este afectată de translația de-a lungul axei timpului $\| x \|^2 = \| x_\tau \|^2$ obținem

$$d^2(x, x_\tau) = 2 [\| x \|^2 - \langle x, x_\tau \rangle]$$

Conform relației (6.29) avem:

$$\langle x, x_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t + \tau)\, dt \tag{6.37}$$

Notăm cu $R(\tau)$ și o numim *funcție de autocorelație* a semnalului $x(t)$ funcția:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t + \tau)\, dt \tag{6.38}$$

Cu această notație distanța din (6.37) poate fi scrisă:

$$d^2(x, x_\tau) = 2\,[R(0) - R(\tau)] \tag{6.39}$$

relație din care se vede că *cu cît funcția de autocorelație* $R(\tau)$ *scade mai repede cu argumentul* τ, cu atît distanța $d(x, x_\tau)$ crește, ceea ce înseamnă că *în semnal avem variații rapide în timp care fac să apară diferențe mari între* $x(t)$ *și replica sa întîrziată.*

Aceleași considerații pot fi făcute în cazul a două semnale diferite $x(t)$ și $y(t + \tau) = y_\tau$ definind o *funcție de corelație mutuală*

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y(t + \tau)\, \mathrm{d}t = \langle x, y_\tau \rangle \tag{6.40}$$

6.5. Reprezentări în spațiul semnalului și transformări ortogonale

Un semnal poate fi reprezentat în spațiul semnalului prin componentele sale:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \tag{6.41}$$

unde, dacă φ_k sînt vectori ortonormali, avem:

$$\alpha_k = \langle x, \varphi_k \rangle \tag{6.42}$$

Sistemul de vectori $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ formează un sistem complet de vectori ortogonali dacă nu există alt vector $\neq 0$ ortogonal pe toți $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$. În acest caz:

$$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | \alpha_k |^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | \langle x, \varphi_k \rangle |^2 \tag{6.43}$$

Fiindcă am convenit ca un semnal $x(t)$ să fie reprezentat în spațiul semnalului ca un punct sau ca un vector x, în cele ce urmează notațiile $x(t)$ sau x sînt echivalente, la fel ca și notațiile $\varphi(t)$ și φ. Prin urmare, relațiile (6.41) și (6.42) pot fi scrise:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t) \tag{6.44}$$

unde

$$\alpha_k = \int_0^D x(t)\, \varphi_k^*(t)\, \mathrm{d}t \tag{6.45}$$

Dacă funcțiile $\{\Phi_k(t)\}$ sînt ortogonale, dar nu sînt normale:

$$\int_0^D \Phi_k(t)\, \Phi_j(t)\, \mathrm{d}t = a\delta_{kj}$$

atunci

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \Phi_k(t)$$

și

$$\alpha_k = \frac{1}{a}\int_0^D x(t)\,\Phi_k^*(t)\,dt$$

iar norma:

$$\| x \|^2 = \langle x, x \rangle = a\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_k^* = a\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \tag{6.46}$$

6.5.1. Reprezentarea semnalelor în spațiul primar

În conformitate cu teorema eșantionării, un semnal $x(t)$ de durată infinită și de lărgime de bandă W care pentru generalitate poate fi și complex poate să fie reprezentat sub forma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, sinc\, \frac{\pi}{T}(t - nT) \tag{6.47}$$

unde:

$$sinc\, \frac{\pi}{T}(t - nT) = \frac{sin\, \frac{\pi}{T}(t - nT)}{\frac{\pi}{T}(t - nT)}$$

iar T este intervalul de eșantionare $T = \dfrac{1}{2W}$

Introducem notația

$$sinc_n\, t = sinc\, \frac{\pi}{T}(t - nT) \tag{6.48}$$

și înlocuind în (6.47) se obține:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, sinc_n\, t \tag{6.49}$$

unde $\{sinc_n\, t\}$ este o familie de funcții ortogonale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc_n\, t\, sinc_m\, t\, dt = T\delta_{mn} \tag{6.50}$$

Fiindcă în realitate semnalele au o durată finită D, ele sînt determinate de un număr N de eșantioane,

$$N = \frac{D}{T} = 2WD \tag{6.51}$$

și relația (6.49) poate fi scrisă aproximativ:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\, sinc_n\, t \tag{6.52}$$

deci semnalul poate fi reprezentat într-un spațiu cu N dimensiuni, $x(nT)$ respectiv eșantioane (care pot fi complexe), fiind componentele semnalului $x(t)$; funcțiile de reconstrucție sînt funcțiile $sinc_n\, t$. Numim această reprezentare în domeniul timp, *reprezentare în* **spațiul primar.** Se introduce această

denumire deoarece toate celelalte reprezentări vor fi făcute cu referire la acest spațiu care are proprietatea importantă că *eșantioanele unui semnal sînt componentele lui* în acest spațiu. În cele ce urmează considerăm că semnalele sînt reale. Norma semnalului în acest spațiu conform relației (6.46) este:

$$\| x \| = \sqrt{T \sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT)} = \sqrt{T \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2} \tag{6.53}$$

unde s-a notat $x_n = x(nT)$.
Pe de altă parte, energia semnalului ținînd seama de (6.52) și (6.50) este:

$$E_D = \int_0^D x^2(t)\, dt = T \sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2 = \| x \|^2 \tag{6.54}$$

iar puterea medie pe durata D este:

$$P_D = \frac{T}{D} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT) = \frac{1}{D} \| x \|^2 \tag{6.55}$$

de unde:

$$\| x \| = \sqrt{DP_D} \tag{6.56}$$

Rezultă că toate semnalele de aceeași putere medie și durată, limitate la lărgimea de bandă $\frac{1}{T} = 2W$ sînt reprezentate de puncte pe o sferă N dimensională de rază $\| x \|$ (respectiv de vectori cu vîrful pe această sferă).
Distanța dintre semnalele $y(t)$ și $x(t)$ este dată de relația (6.17) și este

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{T \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - y_n)^2} \tag{6.57}$$

Produsul scalar între vectorii $x(t)$ și $y(t)$ este

$$\langle x, y \rangle = T \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n = \int_0^D x(t)\, y(t)\, dt \tag{6.58}$$

Dacă vectorii sînt otrogonali în conformitate cu (6.35) și (6.56) avem

$$P_{x+y} = P_x + P_y \tag{6.59}$$

unde P_{x+y} este puterea sumei semnalelor $x(t) + y(t)$;
P_x — puterea semnalului $x(t)$;
P_y — puterea semnalului $y(t)$.

În concluzie, *spațiul primar este un spațiu metric, cu o metrică euclideană, și este un spațiu cu produs scalar.*

6.5.2. Transformări ortogonale

Transformările ortogonale joacă un rol deosebit de important în prelucrări de semnale.

În spațiul primar energia semnalului este uniform distribuită pe componentele (eșantioanele) *sale.* În spațiul transformat noile componente ale sem-

nalului vor avea energie diferită, concentrată în general pe un număr mic de componente, permițînd astfel să se efectueze compresii de date și alte prelucrări de mare interes practic. După efectuarea prelucrărilor se revine la spațiul primar.

Să considerăm semnalul $x(t)$ reprezentat de relațiile (6.44) și (6.45):

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \varphi_k(t) \tag{6.60}$$

unde:

$$\alpha_k = \int_0^D x(t)\, \varphi_k^*(t)\, \mathrm{d}t \tag{6.61}$$

Reprezentările lui $x(t)$ în diferite sisteme $\{\varphi_k(t)\}$ de funcții ortonormale, cu excepția funcțiilor $\left\{\frac{sinc_k\, t}{\sqrt{T}}\right\}$, le numim *reprezentări în* **spații secundare.**

Pentru a marca acest lucru, pentru reprezentările în spații secundare introducem notația:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \varphi_k(t) \tag{6.62}$$

unde

$$X(k) = \int_0^D x(t)\, \varphi_k^*(t)\, \mathrm{d}t \tag{6.63}$$

respectiv:

$$X(k) = \langle x, \varphi_k \rangle$$

Dacă funcțiile de reconstrucție sînt ortogonale, dar nu sînt normale:

$$\int_0^D \Phi_k(t)\, \Phi_j^*(t)\, \mathrm{d}t = a\delta_{ij}$$

unde a este o constantă.

În acest caz $$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Phi_k(t) \tag{6.64}$$

iar relațiile (6.62) și (6.63) devin:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \Phi_k(t) \tag{6.65}$$

unde

$$X(k) = \frac{1}{a} \int_0^D x(t)\, \Phi_k^*(t)\, \mathrm{d}t$$

Considerăm semnalele $x(t)$ și $\varphi_k(t)$ în spațiul primar; punînd $T = 1$ pentru normalizare ele sînt determinate de componentele $x(mT) = x(m)$, respectiv de componentele $\varphi_k(mT) = \varphi_k(m)$ și introducem notația:

$$\varphi_k(m) = \varphi_{km}$$

unde primul indice indică ordinul funcției ortogonale iar al doilea, ordinul eșantionului, respectiv numărul de ordine al axei din spațiul primar N dimensional pe care este proiectată $\varphi_k(t)$.

Cu alte cuvinte, φ_{km} este componenta funcției $\varphi_k(t)$ pe axa m din spațiul primar, respectiv eșantionul $\varphi_k(m)$.

Cu aceste notații, produsul scalar (6.63) poate fi scris, conform (6.29)

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, \varphi^*_{km} \qquad k = \overline{1, N-1} \tag{6.66}$$

Dacă în relația (6.62) considerăm eșantionul de ordin m avem $t = mT = m$, respectiv:

$$x(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \varphi_{km} \qquad m = \overline{1, N-1} \tag{6.67}$$

După cum s-a văzut, parametrii $X(k)$ caracterizează semnalul $x(t)$ într-un spațiu secundar (6.62), iar parametrii $x(m)$ caracterizează semnalul $x(t)$ în spațiul de bază. Relațiile (6.66) și (6.67) ne permit să trecem de la un set de parametri la celălalt, ele reprezentînd forma cea mai generală a unor transformări ortogonale discrete.

Relațiile (6.66) pot fi scrise sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^*_{00} & \varphi^*_{01} & \cdots & \varphi^*_{0,\,N-1} \\ \varphi^*_{10} & \varphi^*_{11} & \cdots & \varphi^*_{1,\,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi^*_{N-1,\,0} & \varphi^*_{N-1,\,1} & \cdots & \varphi^*_{N-1,\,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix} \tag{6.68}$$

Notăm cu $\mathbf{T}$ matricea transformării:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \varphi^*_{00} & \varphi^*_{01} & \cdots & \varphi^*_{0,\,N-1} \\ \varphi^*_{10} & \varphi^*_{11} & \cdots & \varphi^*_{1,\,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi^*_{N-1,\,0} & \varphi^*_{N-1,\,1} & \cdots & \varphi^*_{N-1,\,N-1} \end{bmatrix} \tag{6.69}$$

Sub formă prescurtată putem scrie:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{x} \tag{6.70}$$

unde $\mathbf{X}$ este matrice coloană cu elementele $X(k)$ iar $\mathbf{x}$ este matrice coloană cu elementele $x(m)$.

În mod analog avem pentru relațiile (6.67):

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{10} & \cdots & \varphi_{N-1,\,0} \\ \varphi_{01} & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{N-1,\,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{0,\,N-1} & \varphi_{1,\,N-1} & \cdots & \varphi_{N-1,\,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} \tag{6.71}$$

Ținînd seama de (6.70), (6.69) și (6.71) avem

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{*T}$$

relație care definește o transformare ortogonală.

În consecință, setul de relații (6.66) și (6.67) reprezintă o formă generală de transformări ortogonale. Matricea transformării are ca elemente eșantioanele funcțiilor de reconstrucție și anume linia k are ca elemente eșantioanele lui $\varphi^*_k(t)$ ș.a.m.d.

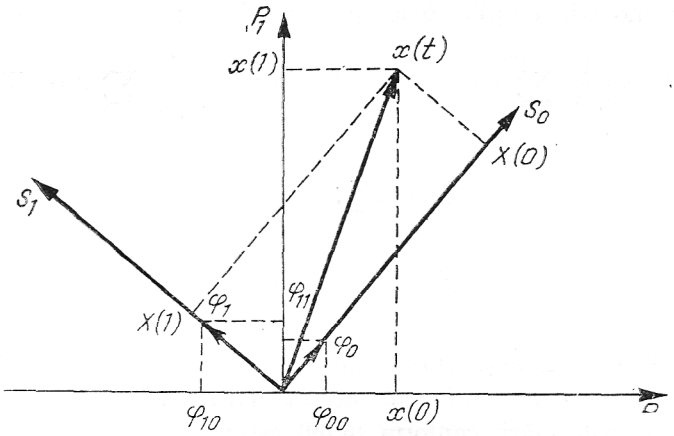


Fig. 6.2. Schimbare de bază într-un spațiu bidimensional.

Exemplu: Considerăm cazul $N = 2$ și spațiul secundar real. Din fig. 6.2 unde P_0, P_1 sînt axele spațiului primar, iar S_0, S_1 sînt axele spațiului secundar, se deduce:

$$\begin{aligned} X(0) &= \langle x, \varphi_0 \rangle = x(0)\,\varphi_{00} + x(1)\,\varphi_{01} \\ X(1) &= \langle x, \varphi_1 \rangle = x(0)\,\varphi_{10} + x(1)\,\varphi_{11} \end{aligned} \tag{6.72}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

Ținînd seama că $\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = 0$ și că $\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 1$ obținem $\mathbf{T}\,\mathbf{T}^T = \mathbf{I}$, respectiv $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$, respectiv relația de definiție a unei transformări ortogonale.

6.5.2.1. **Transformata Fourier discretă** *(T.F.D.)*

În acest caz funcțiile ortonormale sînt:

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{D}}\, e^{jk\omega_0 t} \tag{6.73}$$

unde D este durata semnalului, iar $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{D}$. Coeficienții φ_{km} se obțin din eșantionarea în momentele $t = \dfrac{m}{2w}$ a lui $\varphi_k(t)$ și sînt

$$\varphi_{km} = \frac{1}{\sqrt{D}}\, e^{jk\frac{2\pi}{D}\frac{m}{2w}} = \frac{1}{\sqrt{D}}\, e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \tag{6.74}$$

sau dacă $T = \dfrac{1}{2w} = 1$, atunci $D = N$.

Notăm:

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \tag{6.75}$$

Introducînd în (6.74) avem:

$$\varphi_{km} = \frac{1}{\sqrt{N}}\, W^{-km} \tag{6.76}$$

Cu aceste notații relațiile (6.66) și (6.67) devin:

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, W^{km} \quad \text{și} \quad x(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W^{-km} \tag{6.77}$$

sau:

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, W^{km} \tag{6.78}$$

$$x(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W^{-km} \tag{6.79}$$

Relația (6.78) se numește *transformata Fourier discretă* (T.F.D.), iar relația (6.79) *transformata Fourier discretă inversă* (T.F.D.I.).

Matricea transformării conform (6.69) este:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ 1 & W & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)\,(N-1)} \end{bmatrix} \tag{6.80}$$

în care elementele unei linii k sînt cele N eșantioane ale funcției de reconstrucție $\varphi_k^*(t)$.

Transformata (T.F.D.) are algoritmi de calcul rapid.

Transformata Fourier discretă bidimensională. Relația (6.77) poate fi generalizată la două dimensiuni:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} x(m_1, m_2)\, W_1^{k_1 m_1} W_2^{k_2 m_2} \tag{6.81}$$

unde:

$$W_1 = e^{-j\frac{2\pi}{N_1}}; \quad W_2 = e^{-j\frac{2\pi}{N_2}}; \quad m_1,\ k_1 = \overline{0_1(N_1 - 1)}; \quad m_2 k_2 = \overline{0,\ (N_2 - 1)}$$

Matricea de date este:

$$[x(m_1, m_2)] = \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \dots & x(0, N_2-1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \dots & x(1, N_2-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(N_1-1, 0) & x(N_1-1, 1) & \dots & x(N_1-1, N_2-1) \end{bmatrix} \tag{6.82}$$

Din suma dublă (6.81) să considerăm suma interioară pe care o notăm:

$$X_2(k_1, m_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} x(m_1, m_2)\, W_1^{k_1 m_1} \tag{6.83}$$

și care este T.F.D. a coloanei m_2 din matricea de date.

Coeficienții $X_2(k_1, m_2)$ pot fi scriși sub formă de matrice $(N_1 \times N_2)$

$$[X_2(k_1, m_2)] = \begin{bmatrix} X_2(0, 0) & X_2(0, 1) & \dots & X_2(0, N_2-1) \\ X_2(1, 0) & X_2(1, 1) & \dots & X_2(1, N_2-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_2(k_1, 0) & X_2(k_1, 1) & \dots & X_2(k_1, N_2-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_2(N_1-1, 0) & X_2(N_1-1, 1) & \dots & X_2(N_1-1, N_2-1) \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

Înlocuind (6.83) în (6.81) se obține:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{m_2=0}^{N_2-1} X_2(k_1, m_2)\, W_2^{k_2 m_2} \quad (6.85)$$

care este T.F.D. a liniei k_1 din matricea (6.84). Sub formă matriceală relația (6.85) se scrie:

$$[X(k_1, k_2)] = \begin{bmatrix} X(0, 0) & X(0, 1) & \dots & X(0, N_2-1) \\ X(1, 0) & X(1, 1) & \dots & X(1, N_2-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X(N_1-1, 0) & X(N_1-1, 1) & \dots & X(N_1-1, N_2-1) \end{bmatrix} \quad (6.86)$$

Din cele precedente rezultă că matricea coeficienților în spațiul transformat $X(k_1, k_2)$ se obține utilizînd T.F.D. unidimensională de $N_2 \times N_1$ ori, după cum urmează:

— cu $N = N_1$ se aplică T.F.D. pentru fiecare coloană din (6.82) și se obține matricea (6.84);

— cu $N = N_2$ se aplică T.F.D. pentru fiecare linie din matricea (6.84), și se obține matricea coeficienților transformării (6.86).

Operațiile precedente pot fi scrise sub o formă concisă cu ajutorul matricelor:

$[T_1]$ = matrice cu $N_1 \times N_1$ elemente $\alpha_{rs} = W_1^{rs}$; $r, s = \overline{0, N_1-1}$ și

$[T_2]$ = matrice cu $N_2 \times N_2$ elemente $\beta_{rs} = W_2^{rs}$, $r, s = \overline{0, N_2-1}$

Cu aceste notații matricea coeficienților în spațiul transformat este:

$$[X(k_1, k_2)] = [T_1]\, [x(m_1, m_2)]\, [T_2]$$

T.F.D. bidimensională este în mod curent utilizată în domeniul prelucrărilor de imagini.

Transformarea inversă este:

$$x(m_1, m_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2)\, W_1^{-k_1 m_1} W_2^{-k_2 m_2} \quad (6.87)$$

6.5.2.2. **Transformata Walsh-Hadamard discretă** *(T.W.H.D.)*

Semnalul $x(t)$ poate fi reprezentat cu ajutorul unor funcții de reconstrucție ortogonale, de formă rectangulară, cunoscute sub numele de **funcții Walsh.**

Înainte de a descrie funcțiile Walsh este util să generalizăm noțiunea de frecvență și la tipuri de funcții care nu sînt armonice. Se definește o *frecvență generalizată* numită **secvență,** ca fiind *jumătate din numărul de „schimbări de semn" pe unitatea de timp* (*indiferent de faptul că aceste intersecții cu axa zero sînt sau nu sînt uniform distribuite*). Definiția secvenței coincide cu cea a frecvenței în cazul funcțiilor armonice.

Exemplu. Funcțiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sînt definite pe intervalul semideschis [0, 1), fig. 6.3. Dacă numărul de „intersecții zero" este un număr par: n, secvența este $\frac{n}{2}$, dacă numărul de „intersecții zero" este impar: n, atunci secvența este $\frac{n+1}{2}$. Cu această convenție, secvența semnalelor eșantionate $f_1^*(t)$ și $f_2^*(t)$ care provin din $f_1(t)$ și $f_2(t)$ prin eșantionare în opt puncte echidistante este egală cu 2, ca și a funcțiilor din care provin (adică prin eșantionare nu se modifică secvența).

În adevăr, la $f_1^*(t)$ avem 3 schimbări de sens, deci secvența este $\frac{3+1}{2} = 2$.

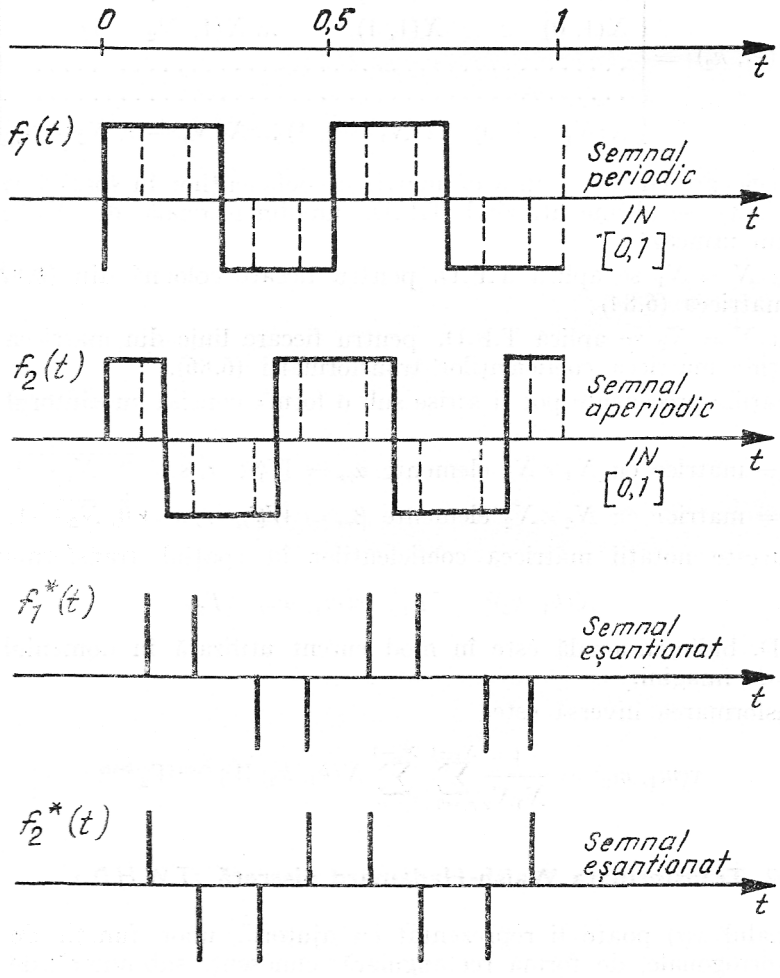


Fig. 6.3. Semnale de aceeași frecvență.

Funcțiile Walsh formează un set complet ortonormal de funcții rectangulare. Există trei grupuri de funcții Walsh care diferă între ele numai prin modul de ordonare a lor și anume:

— *ordonare pe bază de secvență (Walsh)*;
— *ordonare naturală (Hadamard)*;
— *ordonare diadică (Paley)*.

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de primele două categorii de ordonări.

Ca și la funcțiile armonice, $e^{j\omega t}$, care sînt funcții de doi parametri și funcțiile Walsh sînt funcții de doi parametri și se notează cu $wal_w(i, t)$ în ordonarea Walsh și cu $wal_h(i, t)$ în ordonarea Hadamard și sînt definite pe intervalul semiînchis $t \in [0, 1)$.

Indiferent de ordonare un semnal $x(t) \in L^2$ definit pe $t \in [0, 1)$ poate fi reprezentat sub formă de serie:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} W(k)\, wal(k, t) \tag{6.88}$$

și

$$W(k) = \int_0^1 x(t)\, wal(k, t)\, \mathrm{d}t \tag{6.89}$$

unde $wal(k, t)$ sînt funcții Walsh în notare generală, fără a specifica tipul ordonării.

Sau, în conformitate cu relațiile (6.66) și (6.67) și ținînd seamă că funcțiile Walsh sînt reale, avem transformata discretă:

$$\left.\begin{aligned} x(m) &= \sum_{k=0}^{N-1} W(k)\, wal(k, m) \\ \text{și} \qquad W(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, wal(k, m) \end{aligned}\right\} \tag{6.90}$$

numită *transformarea Walsh Hadamard discretă*.

Funcțiile Walsh în ordonarea Walsh se notează cu $wal_w(i, t)$, unde parametrul i este legat de secvența s_i a funcției după cum urmează:

$$s_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \dfrac{i}{2} & i = \text{par} \\ \dfrac{i+1}{2} & i = \text{impar} \end{cases} \tag{6.91}$$

Funcțiile $wal_w(i, t)$ pentru i par se notează cu:

$$cal(s_i, t) = wal_w(i, t) \qquad i = \text{par} \tag{6.92}$$

iar pentru i impar se notează:

$$sal(s_i, t) = wal_w(i, t) \qquad i = \text{impar} \tag{6.93}$$

sau ținînd seama de (6.91):

$$cal(i, t) = wal_w(2i, t) \tag{6.94}$$

$$sal(i, t) = wal_w(2i - 1, t) \tag{6.95}$$

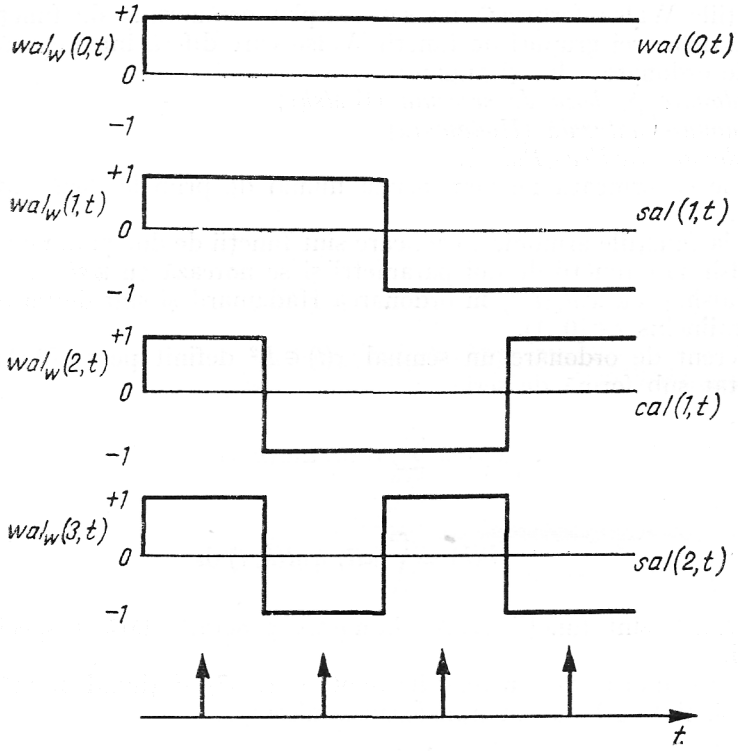


Fig. 6.4. Funcții Walsh.

În fig. 6.4 sînt reprezentate primele patru funcții Walsh și sînt indicate și momentele eșantionării.

Aceste funcții sînt determinate de relațiile:

$$wal_w(0,\ t) = 1 \qquad 0 \leqslant t < 1$$

$$wal_w(1,\ t) = 1 \qquad 0 \leqslant t < \frac{1}{2}$$

$$= -1 \qquad \frac{1}{2} < t < 1$$

$$wal_w(2,\ t) = 1 \qquad 0 \leqslant t < \frac{1}{4};\ \frac{3}{4} < t < 1$$

$$= -1 \qquad \frac{1}{4} < t < \frac{3}{4}$$

$$wal_w(3,\ t) = 1 \qquad 0 \leqslant t < \frac{1}{4};\ \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4}$$

$$= -1 \qquad \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2};\ \frac{3}{4} < t < 1$$

Expresia generală a funcțiilor Walsh este complexă și nu se dă în prezenta lucrare.

În conformitate cu cele stabilite în § 6.5.2, matricea transformării Walsh Hadamard în ordonare Walsh are ca elemente eșantioanele funcțiilor $wal_w(i, t)$. Pentru cazul particular arătat în fig. 6.3, matricea transformării este:

$$\mathbf{H}_w(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.96}$$

Am introdus notația **H** fiindcă această matrice se poate obține prin reordonarea liniilor unei clase de matrice numite **matrice Hadamard.**

În general, dacă scriem $\mathbf{H}_w(n)$ înseamnă că matricea are $N = 2^n$ linii, respectiv coloane.

Matricea $\mathbf{H}_w(n)$ are *următoarele proprietăți* care caracterizează o transformare ortogonală:

— $\mathbf{H}_w(n)$ *este simetrică*:

$$\mathbf{H}_w^T(n) = \mathbf{H}_w(n) \tag{6.97}$$

— $\mathbf{H}_w(n)$ *este ortogonală*:

$$\mathbf{H}_w^T(n)\, \mathbf{H}_w(n) = N\, \mathbf{I}\,(N) \tag{6.98}$$

unde **I** este matricea identitate de ordin $N = 2^n$

$\mathbf{H}_w(n)$ are o inversă egală cu ea însăși:

$$\mathbf{H}_w^{-1}(n) = \frac{1}{N}\, \mathbf{H}_w(n) \tag{6.99}$$

Cu aceste notații, transformarea Walsh-Hadamard discretă, ordonată Walsh (T.W.H.D.)$_w$, se poate scrie conform (6.70) și (6.69):

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}_w(n)\, \mathbf{x} \tag{6.100}$$

unde:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W(0) \\ W(1) \\ \vdots \\ W(N-1) \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Transformarea inversă este:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}_w^{-1}(n)\, \mathbf{W} \tag{6.101}$$

sau conform (6.99):

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\, \mathbf{H}_w(n)\mathbf{W} \tag{6.102}$$

Uneori este mai comod să se lucreze cu matrice Hadamard care au proprietatea că pot fi formate după cum urmează:

$$\mathbf{H}_1 = [+1] \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \quad \text{ș.a.m.d.}$$

Acestei clase de matrice Hadamard îi corespunde o altă ordonare a funcțiilor Walsh, numită *ordonare Hadamard*, astfel încît eșantioanele acestor funcții să fie tocmai elementele matricelor Hadamard.

În acest caz, funcțiile Walsh se notează cu $wal_h(i, t)$, iar matricea transformării cu $\mathbf{H}_h(n)$.

Această matrice are toate proprietățile matricei $\mathbf{H}_w(n)$.

Importanța deosebită a transformărilor Walsh-Hadamard constă în faptul că elementele matricei de transformare sînt numai —1 și 1, deci operațiile de multiplicare se reduc la operații de adunare simplificînd în mod apreciabil construcția echipamentului de prelucrare.

Ca și transformata Fourier discretă, (T.W.H.D.) are algoritmi de calcul rapid.

În concluzie putem afirma că **utilitatea transformărilor ortogonale** derivă din următoarele proprietăți:

— *matricea transformării inverse* $\mathbf{T}^{-1}$ *este transpusa matricei transformării directe* $\mathbf{T}$, *adică* $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$;

— *transformarea ortogonală conservă norma*:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{x},\ \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \| X \|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \| x \|^2;$$

— *transformarea ortogonală conservă entropia* (§. 3.3);

— *transformarea ortogonală realizează o decorelare a componentelor din spațiul de bază, respectiv o concentrare a energiei în spațiul transformat pe un număr mai mic de elemente.*

CAPITOLUL 7

SEMNALE ALEATOARE

7.1. Noțiunea de semnal aleator

Un **semnal aleator** este un *proces care se desfășoară în timp și este guvernat*, cel puțin în parte, *de legi probabilistice*. Din punct de vedere matematic, un semnal aleator, respectiv un proces stochastic, este o *funcție de două variabile* $\xi(k, t) = \xi^{(k)}(t)$ unde k ia valori în spațiul eșantioanelor, iar t ia valori pe axa reală a timpului. Pentru orice valoare particulară a lui $t = t_1$, $\xi(k, t_1) = \xi^{(k)}(t_1)$ este o variabilă aleatoare definită pe mulțimea numerelor k. *Semnalele la care întîmplarea intervine prin intermediul unui parametru* cum ar fi $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ se numesc **condiționat deterministe.** Cunoașterea unei valori particulare a variabilei aleatoare φ determină semnalul pe întreaga axă a timpului. Semnalele aleatoare $\xi(t)$ nu pot fi reprezentate prin funcții de timp.

Funcția $\xi^{(k)}(t)$ face parte din mulțimea $\xi(t)$ și se numește o *„realizare particulară"* a procesului $\xi(t)$ sau o *„reprezentare"* a procesului $\xi(t)$.

Realizările particulare pot fi definite pentru momente discrete $t_1, t_2 \ldots t_n \ldots$ sau pot fi definite pentru o mulțime continuă de valori ale lui t. În primul caz se numesc *serii aleatoare* iar în cazul al doilea *procese aleatoare*. Convenim în cele ce urmează ca variabilele aleatoare să le notăm cu litere grecești, iar valorile particulare pe care le iau aceste variabile să le notăm cu litere latine.

Pentru a caracteriza proprietățile statistice ale semnalelor aleatoare trebuie să introducem noțiunea de **probabilitate.**

Să considerăm N realizări (fig. 7.1) ale semnalului aleatoriu.

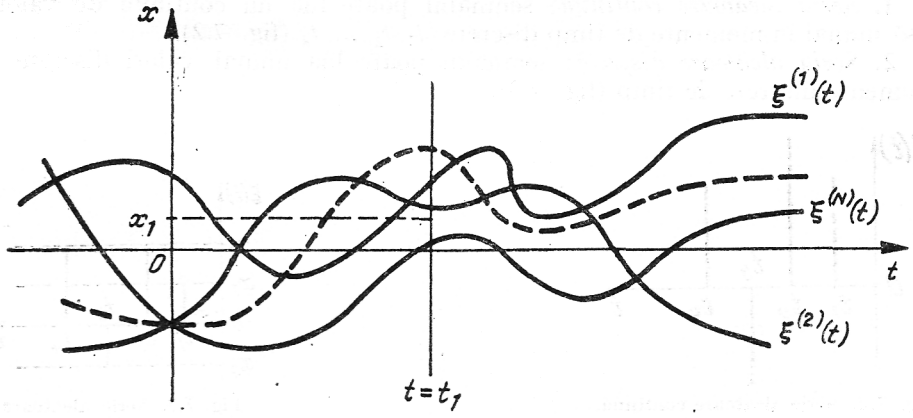


Fig. 7.1. Determinarea funcției de repartiție.

Presupunem că n_1 dintre aceste realizări în momentul dat $t = t_1$ au valori mai mici sau egale cu numărul x_1. Raportul $\frac{n_1}{N}$, cînd N tinde către infinit, este probabilitatea ca valoarea lui $\xi(t)$, în momentul $t = t_1$, să fie mai mică decît x_1:

$$P\{\xi(t_1) \leqslant x_1\}$$

Această probabilitate, în general, depinde atît de timpul t_1 cît și de valoarea x_1, adică este o funcție de două variabile.

Această funcție se notează prin:

$$F_1(x_1, t_1) = P\{\xi(t_1) \leqslant x_1\} \tag{7.1}$$

și se numește *funcție de repartiție a probabilităților de ordinul întîi*, sau pe scurt, *funcție de repartiție*.

Cu ajutorul ei se definește *densitatea de probabilitate*:

$$w_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} \tag{7.2}$$

În mod analog, trecînd la un număr mai mare de variabile avem funcția de repartiție de ordinul n

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P\{\xi(t_1) \leqslant x_1, \ \xi(t_2) \leqslant x_2 \ldots \xi(t_n) \leqslant x_n\} \tag{7.3}$$

și densitatea de probabilitate de ordinul n

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} \tag{7.4}$$

Cu cît numărul n este mai mare, cu atît descrierea procesului este mai completă.

7.2. Tipuri de semnale aleatoare

Semnalele aleatoare pot fi împărțite în următoarele clase expuse în continuare.

1. *Seria aleatoare continuă*: semnalul poate lua un continuu de valori, însă numai în momente de timp discrete: $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (fig. 7.2).

2. *Seria aleatoare discretă*: semnalul poate lua numai valori discrete la momente discrete de timp (fig. 7.3).

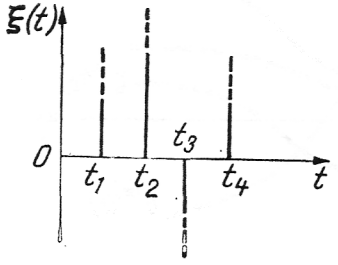


Fig. 7.2. Serie aleatoare continuă.

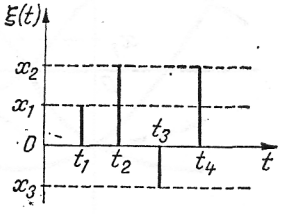


Fig. 7.3. Serie aleatoare discretă.

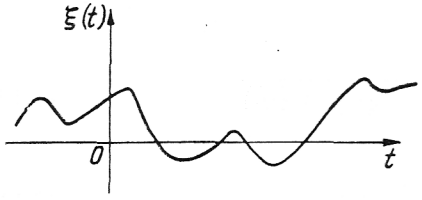


Fig. 7.4. Proces aleator continuu.

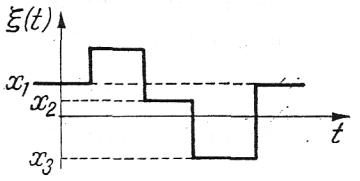


Fig. 7.5. Proces aleator discret.

3. *Procesul aleator continuu:* semnalul poate lua un continuu de valori pentru un continuu de timp (fig. 7.4).

4. *Procesul aleator discret:* semnalul poate lua numai valori discrete, iar parametrul t ia toate valorile continuului (fig. 7.5).

În cele ce urmează ne vom ocupa în special de procese aleatoare continue și de serii aleatoare continue.

7.3. Valori medii statistice și valori medii temporale ale semnalelor aleatoare

Semnalele aleatoare nu pot fi cunoscute în detaliu, pentru caracterizarea lor se evaluează valorile medii de diferite ordine.

7.3.1. Valori medii statistice (medii pe mulțimi)

În acest caz se ia valoarea medie probabilistică pe mulțimea realizărilor posibile $\xi(t)$ la momente de timp alese arbitrar $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ Valorile medii statistice care prezintă interes pentru aplicații sînt:

1. **Valoarea medie (momentul de ordinul unu):**

$$\overline{\xi(t_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w_1(x_1, t_1)\, \mathrm{d}x_1 \tag{7.5}$$

2. **Valoarea pătratică medie:**

$$\overline{\xi^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 w_1(x_1, t_1)\, \mathrm{d}x_1 \tag{7.6}$$

3. **Funcția de autocorelație**

$$B_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\, \xi(t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \tag{7.7}$$

4. **Funcția de corelație mutuală**

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\, \eta(t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2, t_1, t_2)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y_2 \tag{7.8}$$

5. **Dispersia**

$$\sigma^2(t_1) = \overline{[\xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)}]^2} = \overline{\xi(t_1)^2} - [\overline{\xi(t_1)}]^2 \tag{7.9}$$

6. **Funcția de covariație**

a. *funcția de autovariație:*

$$K_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \overline{[\xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)}]\,[\xi(t_2) - \overline{\xi(t_2)}]} \tag{7.10}$$

b. *funcția de covariație mutuală:*

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \overline{[\xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)}]\,[\eta(t_2) - \overline{\eta(t_2)}]} \tag{7.11}$$

În cazul particular, cînd valorile medii ale V.A. sînt nule:

$$\overline{\xi(t_1)} = 0, \qquad \overline{\eta(t_2)} = 0$$

și cînd aceste variabile sînt independente statistic, atunci:

$$w_2(x_1, y_2;\ t_1, t_2) = w_{11}(x_1;\ t_1)\, w_{12}(y_2,\ t_2)$$

și relația (7.8) devine:

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)}\ \overline{\eta(t_2)} = 0$$

Cu alte cuvinte, *funcția de corelație mutuală a semnalelor statistic independente este nulă dacă valorile medii respective sînt nule.*

Funcția de covariație mutuală este și ea nulă în cazul semnalelor statistic independente, chiar dacă valorile medii nu sînt nule.

7.3.2. Valori medii temporale

În acest caz din mulțimea realizărilor $\xi(t)$ se consideră o realizare particulară $\xi^{(k)}(t)$ și se ia media acesteia în timp.

Valorile medii în timp care prezintă interes pentru aplicații sînt:

1. **Valoarea medie:**

$$\widetilde{\xi^{(k)}(t_0 + t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \xi^{(k)}(t_0 + t)\, \mathrm{d}t \tag{7.12}$$

Valoarea medie temporală nu depinde de originea timpului t_0. Într-adevăr dacă se înlocuiește: $t_0 + t = t'$

$$\widetilde{\xi^{(k)}(t_0 + t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} \xi^{(k)}(t')\, \mathrm{d}t' = \widetilde{\xi^{(k)}(t)},$$ care nu depinde de originea t_0.

Valoarea medie reprezintă *componenta continuă a semnalului.*

2. **Valoarea pătratică medie:**

$$\widetilde{[\xi^{(k)}(t_0 + t)]^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(k)}(t_0 + t)]^2\, \mathrm{d}t = \widetilde{\xi^{(k)}(t)^2} \tag{7.13}$$

Valoarea pătratică medie *nu depinde de originea timpului și reprezintă puterea medie a semnalului pe sarcina unitate.*

3. **Funcția de autocorelație în timp:**

$$R_\xi^{(k)}(t_1, t_2) = \widetilde{\xi^{(k)}(t_1 + t)\,\xi^{(k)}(t_2 + t)} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \xi^{(k)}(t_1 + t)\,\xi^{(k)}(t_2 + t)\,\mathrm{d}t = R_\xi^{(k)}(t_2 - t_1) \quad (7.14)$$

care *nu depinde de origina timpului, ci numai de diferența de timp* $(t_1 - t_2)$.

În adevăr dacă se înlocuiește $t = -t_1 + t'$ se obține:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_1-T/2}^{t_1+T/2} \xi^{(k)}(t')\,\xi^{(k)}(t_2 - t_1 + t')\,\mathrm{d}t' = R_\xi^{(k)}(t_2 - t_1)$$

Dacă se înlocuiește $t = -t_2 + t'$ se obține:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_2-T/2}^{t_2+T/2} \xi^{(k)}(t_1 - t_2 + t')\,\xi^{(k)}(t')\,\mathrm{d}t' = R_\xi^{(k)}(t_1 - t_2),$$

deci

$$R_\xi^{(k)}(t_2 - t_1) = R_\xi^{(k)}(t_1 - t_2).$$

4. **Funcția de corelație mutuală în timp:**

$$R_{\xi\eta}^{(k)}(t_1, t_2) = \xi^{(k)}(t_1 + t)\,\eta^{(k)}(t_2 + t) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \xi^{(k)}(t_1 + t)\,\eta^{(k)}(t_2 + t)\,\mathrm{d}t = R_{\xi\eta}^{(k)}(t_2 - t_1). \quad (7.15)$$

Ca și în cazul precedent se poate arăta că ea nu depinde de originea timpului, ci numai de diferența de timp $\tau = t_2 - t_1$

În general $R_{\xi\eta}^{(k)}(\tau) \neq R_{\xi\eta}^{(k)}(-\tau)$

dar

$$R_{\xi\eta}^{(\tau)} = R_{\eta\xi}(-\tau) \quad (7.16)$$

7.4. Semnale staționare

Se numesc **semnale staționare**, semnalele ale căror *proprietăți statistice sînt invariante la schimbarea arbitrară a originii timpului*

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n;$$

$$t_1 + \tau,\ t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau) \quad \forall\, \tau \in R \quad (7.17)$$

În acest caz, proprietățile statistice depind numai de diferențele dintre momentele de observare. Astfel dacă în relația (7.17) se înlocuiește $\tau = -t_1$, se obține:

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n;$$

$$0,\ t_2 - t_1,\ t_3 - t_1, \ldots, t_n - t_1) \quad (7.18)$$

Procesele care au proprietățile (7.17) sau (7.18) se numesc *procese staționare în sens strict.*

Dacă în relația (7.18) facem pe $n = 1$, se obține:

$$w(x_1; t_1) = w_1(x_1) \quad (7.19)$$

adică *densitatea de probabilitate de ordinul întîi nu depinde de timp*. Dacă în relația (7.18) facem pe $n = 2$ se obține:

$$w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = w_2(x_1, x_2, t_2 - t_1), \tag{7.20}$$

adică *densitatea de probabilitate de ordinul doi depinde numai de diferența de timp*.

Dacă în relația (7.5) se introduce $w_1(x_1 t_1)$ dat de relația (7.19) se obține:

$$\overline{\xi(t_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w_1(x_1)\, \mathrm{d}x_1 = a \tag{7.21}$$

adică *valoarea medie nu depinde de timp*.

Dacă în medierea din relația (7.9) se introduce $w_1(x_1 t_1)$ dat de relația 7.19) se obține:

$$\overline{[\xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)}]^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2\, w_1(x)\, \mathrm{d}x = \sigma^2 \tag{7.22}$$

adică *dispersia nu depinde de timp*.

Din relațiile (7.7) și (7.20) se obține:

$$\overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_2 - t_1)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 = B(t_2 - t_1) \tag{7.23}$$

adică *funcția de autocorelație depinde numai de diferența de timp* $t_2 - t_1$. În acest caz și *funcția de covariație va depinde numai de diferența de timp*.

Relațiile (7.21), (7.22) și (7.23) sînt consecințe ale faptului că semnalul este staționar. În multe aplicații practice intervin numai momente pînă la ordinul doi. Teoria care se ocupă cu semnalele care sînt descrise complet de cunoașterea momentelor de ordinul întîi și doi se numește *teoria corelației proceselor staționare*.

Semnalele care satisfac aceste relații se numesc *staționare în sens larg* sau *staționare pînă la ordinul doi. Procesele staționare în sens strict sînt staționare și în sens larg. Reciproca nu este totdeauna adevărată*. În general procesele staționare în sens larg nu sînt staționare în sens strict. O excepție o face procesul normal (gaussian) staționar în sens larg care este complet descris de cunoașterea momentelor de ordinul întîi și doi și care în consecință este staționar și în sens strict.

Procesele staționare în sens larg sau strict, așa cum au fost definite, sînt idealizări, fiindcă nici un semnal nu începe la $t = -\infty$ și nu durează pînă la $t = +\infty$. În realitate semnalele durează un timp finit D. Dacă pe acest interval, proprietățile care caracterizează staționaritatea se mențin, se poate considera că vor fi valabile cu aproximație satisfăcătoare și rezultatele bazate pe teoria proceselor staționare.

7.5. Clasificarea semnalelor aleatoare

Ținînd seama de structura lor statistică, pentru necesitățile prezentei lucrări este utilă următoarea clasificare a semnalelor aleatoare:

7.5.1. Semnalul aleator pur

Cel mai simplu tip de semnal aleator este semnalul numit **pur aleatoriu,** la care *valorile succesive ale lui* ξ *luate la intervale oricît de mici sînt independente,* ceea ce poate fi scris sub forma:

$$w_n(x_n;\, t_n/x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1};\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_{n-1}) = w_1(x_n;\, t_n) \tag{7.24}$$

unde $w_n(x_n;\, t_n/x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1};\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_{n-1})\,\mathrm{d}x_n$ este probabilitatea ca $\xi(t)$ să ia o valoare cuprinsă între x_n și $x_n + \mathrm{d}x_n$ în momentul t_n, dacă ia valorile $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1}$ la momentele $t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_{n-1}$, iar $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{n-1}$.

Dacă se înlocuiește $n = 2$, se obține:

$$w_2(x_2;\, t_2/x_1;\, t_1) = w_1(x_2;\, t_2), \tag{7.25}$$

de unde

$$w_2(x_1,\, x_2;\, t_1,\, t_2) = w_1(x_1,\, t_1)\, w_2(x_2;\, t_2/x_1;\, t_1) = w_1(x_1;\, t_1) \cdot w_1(x_2;\, t_2), \tag{7.26}$$

și la fel pentru orice n:

$$w_n(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n;\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n) = \prod_{k=1}^{n} w_1(x_k;\, t_k) \tag{7.27}$$

(Valorile $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ sînt independente pentru orice $t_1 \neq t_2 \neq \ldots \neq t_n$.)

În cazurile acestea, procesul este complet descris de densitatea de probabilitate de ordinul întîi, deoarece conform relației (7.27) se poate obține densitatea de probabilitate de ordinul n cunoscînd densitatea de probabilitate de ordinul întîi.

Procesele aleatoare pure sînt un caz limită care *nu se întîlnește niciodată în realitate.* În cazurile realizate fizic $\xi(t_1)$ și $\xi(t_2)$ sînt întotdeauna corelate dacă t_1 se apropie mult de t_2. Situația cea mai apropiată de cazul ideal se găsește la zgomotul de bandă largă, care aproximează zgomotul alb (zgomot cu spectru uniform) care are o funcție de autocorelație $R(\tau) = \delta(\tau)$.

7.5.2. Procese Markov simple (de ordinul întîi)

Procesul imediat superior din punctul de vedere al complexității este procesul care este *descris în mod complet din punct de vedere statistic de densitatea de probabilitate de ordinul al doilea*:

$$w_2(x_1,\, x_2,\, t_1,\, t_2)$$

Aceste procese se numesc **procese Markov.** Importanța lor este deosebită deoarece o clasă mare de semnale și de zgomote sînt de acest tip. În cazul proceselor Markov simple valoarea x_n la momentul t_n depinde de valorile $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1};\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_{n-1})$ precedente, numai prin intermediul ultimei valori $(x_{n-1};\, t_{n-1})$, adică:

$$w_n(x_n,\, t_n/x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1};\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_{n-1}) = w_2(x_n,\, t_n/x_{n-1},\, t_{n-1}), \tag{7.28}$$

unde $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$.

Ținînd seama de definiția probabilității condiționate rezultă:

$$w_n(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n;\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n) = w_{n-1}(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1};\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_{n-1}) \cdot$$
$$\cdot\, w_2(x_n;\, t_n/x_{n-1};\, t_{n-1})$$

şi

$$w_{n-1}(x_1 \dots x_{n-1};\ t_1 \dots t_{n-1}) = w_{n-2}(x_1 \dots x_{n-2};\ t_1 \dots t_{n-2}) \cdot w_2(x_{n-1},\ t_{n-1}/x_{n-2},\ t_{n-2})$$

şi deci

$$w_n(x_1, x_2, \dots, x_n;\ t_1, t_2, \dots, t_n) = w_1(x_1, t_1) \prod_{k=2}^{n} w_2(x_k;\ t_k/x_{k-1};\ t_{k-1}) \qquad (7.29)$$

cu condiţia $n \geqslant 2$.

Se observă că dacă se cunoaşte densitatea de probabilitate de ordinul doi, procesul este descris complet. Într-adevăr:

$$w_1(x_1;\ t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x_1, x_2;\ t_1, t_2)\, \mathrm{d}x_2$$

$$w_2(x_2, t_2/x_1, t_1) = \frac{w_2(x_1, x_2;\ t_1, t_2)}{w_1(x_1, t_1)}$$

Extinzînd memoria procesului la două valori precedente, la trei etc. se obţin procese Markov de ordin superior.

În cazul proceselor Markov staţionare relaţia (7.28) devine:

$$w_n(x_n;\ t_n/x_1, \dots, x_{n-1};\ t_1, \dots, t_{n-1}) = w_n(x_n, t_n + \tau/x_1, x_2, \dots, x_{n-1};\ t_1 + \tau \dots t_{n-1} + \tau) = w_2(x_n, t_n + \tau/x_{n-1}, t_{n-1} + \tau)$$

iar pentru $\tau = -t_{n-1}$, şi cu notaţia $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ se obţine:

$$w_n(x_n;\ t_n/x_1 \dots x_{n-1};\ t_1 \dots t_{n-1}) = w_2(x_n;\ t_n - t_{n-1}/x_{n-1}) = w_2(x_n;\ \Delta t_n/x_{n-1})$$

Relaţia (7.29) devine:

$$w_n(x_1, x_2, \dots, x_n;\ t_1, t_2, \dots, t_n) = w_1(x_1) \prod_{k=2}^{n} w_2(x_k;\ \Delta t_k/x_{k-1}) \qquad (7.30)$$

unde numai diferenţele de timp Δt_k contează şi nu valorile $t_1, t_2, \dots, t_n$.

7.5.3. Procese ergodice

Pentru a trata problemele de transmisiune a informaţiei, în mod inevitabil trebuie să utilizăm metode probabilistice; însă experimental nu se dispune de toate realizările posibile $\xi(t)$, ci numai de cîte o realizare particulară $\xi^{(k)}(t)$. Din aceste realizări particulare se pot obţine valori medii temporale (v. 7.3.2).

Este foarte important pentru aplicaţii să se stabilească legătura ce există între valorile apriori deduse teoretic pe baze probabilistice şi valorile corespunzătoare deduse experimental, adică aposteriori, din observarea unei realizări particulare în decursul timpului. Cu alte cuvinte, trebuie să găsim legătura între valorile medii statistice şi valorile medii temporale.

Există o *clasă de semnale*, numită **ergodică,** *care are proprietatea că valorile medii statistice sînt egale cu valorile medii temporale.*

În ipoteza ergodică avem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x w(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, \mathrm{d}t \qquad (7.31)$$

sau

$$\overline{\xi(t)} = \widetilde{\xi^{(k)}(t)},$$

relație care specifică procesul ergodic.

Egalitatea trebuie înțeleasă în sensul convergenței în probabilitate:

$$\lim_{T\to\infty} P\{|\overline{\xi(t)} - \widetilde{\xi_T^{(k)}(t)}| < \varepsilon\} = 1,$$

pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar.

Acest fapt rămîne valabil și cînd ne referim la o funcție a semnalului $F[x(t)]$, adică

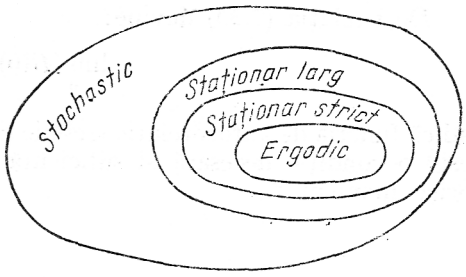


Fig. 7.6. Clasificarea semnalelor aleatoare.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, w(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} F[x(t)]\, dt \tag{7.32}$$

În particular, dacă $F(x) = x^2$ se obține:

$$\overline{[\xi(t)]^2} = \widetilde{[\xi^{(k)}(t)]^2}$$

adică *valoarea pătratică medie statistică este egală cu valoarea pătratică medie temporală.*

La fel se poate arăta că:

$$\overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)} = \widetilde{\xi^{(k)}(t_1 + t)\,\xi^{(k)}(t_2 + t)} \tag{7.33}$$

adică *funcția de autocorelație statistică este egală cu funcția de autocorelație în timp*, iar:

$$\overline{\xi(t_1)\,\eta(t_2)} = \widetilde{\xi^{(k)}(t_1 + t)\,\eta^{(k)}(t_2 + t)} \tag{7.34}$$

adică *funcția de corelație mutuală statistică este egală cu funcția de corelație mutuală în timp.*

Pentru ca procesul să fie ergodic condiția de staționaritate în sens strict este necesară, deoarece în caz contrar valorile medii pe mulțimi la diferite momente de timp t_1, t_2 ... ar avea în general valori diferite, ce nu pot fi egalate cu media în timp. Condiția de staționaritate în sens strict nu este însă suficientă. În cele ce urmează, dacă nu se specifică altfel, se consideră că semnalele sînt ergodice.

În fig. 7.6 este prezentată clasificarea proceselor stochastice.

7.6. Continuitatea semnalelor aleatoare

Un semnal aleator se numește *continuu în momentul t, în sens de medie pătratică*, dacă:

$$\lim_{\tau\to 0} \overline{[\xi(t+\tau) - \xi(t)]^2} = 0 \tag{7.35}$$

Dezvoltînd se obține:

$$\overline{[\xi(t+\tau) - \xi(t)]^2} = \overline{\xi^2(t+\tau)} - 2\overline{\xi(t+\tau)\,\xi(t)} + \overline{\xi^2(t)}$$

În cazul proceselor staționare:

$$\overline{[\xi(t+\tau) - \xi(t)]^2} = 2[\overline{\xi^2(t)} - \overline{\xi(t+\tau)\,\xi(t)}] = 2[B(0) - B(\tau)].$$

Deci relația (7.35) devine:

$$\lim_{\tau \to 0} [B(0) - B(\tau)] = 0 \tag{7.36}$$

adică funcția de autocorelație trebuie să fie continuă în punctul $\tau = 0$. Aceasta este o condiție necesară și suficientă pentru ca procesul să fie continuu în orice moment t.

7.6.1. Diferențierea semnalelor aleatoare

Semnalul aleatoriu $\xi(t)$ este derivabil în momentul t în sens de medie pătratică dacă există o funcție $\xi'(t)$ numită derivată, astfel că:

$$\lim_{\tau \to 0} \overline{\left[\frac{\xi(t+\tau) - \xi(t)}{\tau} - \xi'(t)\right]^2} = 0 \tag{7.37}$$

Proprietățile statistice ale derivatei $\xi'(t)$ se obțin din proprietățile statistice ale diferenței $\xi(t + \tau) - \xi(t)$, prin trecere la limită.

În cazul cînd ne referim la o realizare particulară $\xi^{(k)}(t)$, derivata are sensul dat în cazul funcțiilor deterministe.

$$[\xi^{(k)}(t)]' = \lim_{\tau \to 0} \frac{\xi^{(k)}(t+\tau) - \xi^{k}(t)}{\tau} \tag{7.38}$$

Dacă se consideră ansamblul realizărilor posibile, derivata semnalului aleatoriu devine o funcție aleatoare și se definește prin relația (7.37).

7.6.2. Integrarea semnalelor aleatoare

Dacă ne referim la o realizare particulară $\xi^{(k)}(t)$, integrarea semnalului este interpretată în sensul determinist:

$$\eta^{(k)} = \int_a^b \xi^{(k)}(t)\, dt, \tag{7.39}$$

valoarea integralei depinzînd de k, respectiv de realizarea particulară considerată.

Dacă se consideră ansamblul realizărilor posibile, valoarea integralei devine o variabilă aleatoare η care poate lua valorile $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ ... respectiv:

$$\eta = \int_a^b \xi(t)\, dt.$$

7.7. Funcții de distribuție a variabilelor aleatoare

În cele ce urmează se dau cîteva din cele mai uzuale distribuții ale variabilelor aleatoare (v.a.).

7.7.1. Distribuția uniformă

În acest caz *densitatea de probabilitate* este:

$$\left.\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{b-a} \quad \text{pt} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ w(x) &= 0 \quad\quad\;\; \text{pt} \quad x < a,\; x > b \end{aligned}\right\} \tag{7.40}$$

iar *funcția de repartiție*:

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{b-a}\int_a^x \mathrm{d}x = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{pt} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ F(x) &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\;\; \text{pt} \quad x < a \\ F(x) &= 1 \quad\quad\quad\quad\quad\;\; \text{pt} \quad x > b \end{aligned}\right\} \tag{7.41}$$

Aceste funcții sînt arătate în fig. 7.7.

Eșantioanele semnalului de televiziune pot fi considerate ca avînd o distribuție uniformă. De asemenea, o serie mare de semnale condiționat deterministe au faza φ uniform distribuită între 0 și 2π, cel mai simplu exemplu fiind:

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{7.42}$$

7.7.2. Distribuția normală

O variabilă aleatoare cu distribuție normală are *densitatea de probabilitate*:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2} \tag{7.43}$$

unde σ^2 este dispersia;

x_0 — valoarea medie.

Funcția de repartiție este

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-x_0}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}u \tag{7.44}$$

sau considerînd V.A. normalizată

$$\zeta = \frac{\xi - x_0}{\sigma} \quad \text{respectiv} \quad z = \frac{x - x_0}{\sigma} \tag{7.45}$$

$$F(x) = P\{\xi \leqslant x\} = P\left\{\frac{\xi - x_0}{\sigma} \leqslant \frac{x - x_0}{\sigma}\right\} = P\{\zeta \leqslant z\} = F(z) \tag{7.46}$$

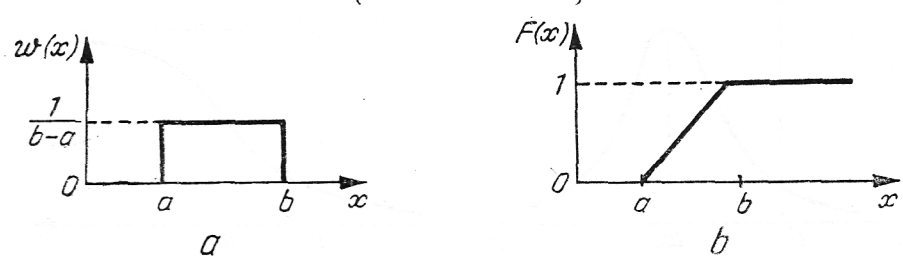


Fig. 7.7. Densitatea de probabilitate (*a*) și funcția de repartiție (*b*) a distribuției normale.

și

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \tag{7.47}$$

cu proprietatea:

$$F(-z) = 1 - F(z). \tag{7.48}$$

Valorile funcției $F(z)$ sînt date în tabele pentru valorile pozitive ale argumentului z. Valorile pentru argumentele negative se deduc din (7.48).

Pentru a da o interpretare dispersiei σ^2 este utilă relația:

$$P\left\{\left|\frac{\xi - x_0}{\sigma}\right| \leqslant 3\right\} = P\left\{-3 < \frac{\xi - x_0}{\sigma} \leqslant 3\right\} = F(3) - F(-3) = 0{,}997$$

Rezultă că V.A. ξ ia valori cu o probabilitate aproape egală cu unu într-un interval $\pm 3\sigma$ axat pe valoarea medie x_0.

În fig. 7.8 este arătată distribuția normală (gaussiană).

Distribuția normală este foarte răspîndită fiindcă ea poate să aproximeze o clasă foarte mare de distribuții. Într-adevăr, în conformitate cu teorema limită centrală, dacă:

1) $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ sînt V.A.

2) $\overline{\xi_1} = \overline{\xi_2} \ldots = \overline{\xi_n} = 0$

3) V.A. sînt necorelate cu distribuții oarecare

4) valoarea fiecărei V.A. ξ_k este neglijabilă față de suma lor (respectiv nici una din ele nu are o valoare dominantă), atunci:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

pentru n foarte mare are o densitate de probabilitate care tinde spre:

$$w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

În aplicații, în multe cazuri, putem să considerăm cu aproximație că suma are o distribuție gaussiană chiar dacă avem numai 3—4 termeni, fapt care justifică ipoteza unei distribuții normale într-un număr mare de cazuri.

Eșantioanele zgomotului de fluctuații, precum și acelea ale unei clase foarte largi de semnale au o distribuție normală.

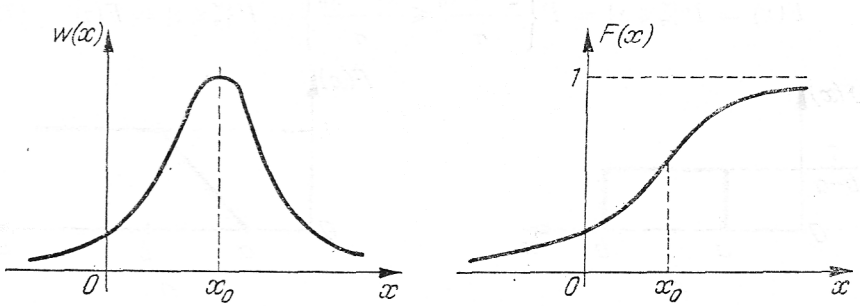


Fig. 7.8. Densitatea de probabilitate și funcție de repartiție a distribuției normale.

7.7.3. Distribuția Rayleigh

Distribuția Rayleigh are expresia:

$$W_\rho(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \qquad (7.49)$$

unde σ^2 este o dispersie care va fi definită în § 7.8.2.1, iar ρ sînt valorile pe care le ia o variabilă aleatoare η.

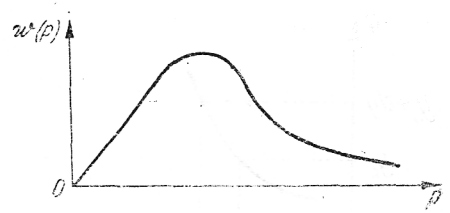


Fig. 7.9. Distribuția Rayleigh.

Distribuția Rayleigh este arătată în fig. 7.9.

Valoarea medie $$\overline{\eta_1} = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \qquad (7.50)$$

iar dispersia $$\sigma^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2. \qquad (7.51)$$

Printre alte semnale, anvelopa undelor radio reflectate de ionosferă are o distribuție Rayleigh. Anvelopa zgomotului de fluctuații are și ea o distribuție Rayleigh.

7.8. Funcții de variabile aleatoare

În cazul prelucrărilor de semnale de multe ori se pune problema determinării densității de probabilitate a variabilelor obținute din prelucrare cînd se cunosc densitățile de probabilitate ale V.A. inițiale.

7.8.1. Funcții de o singură variabilă aleatoare

Să presupunem că se cunoaște $w(x)$ densitatea de probabilitate a V.A. ξ și trebuie să determinăm densitatea $W(y)$ a V.A. η:

$$\eta = f(\xi), \text{ respectiv } y = f(x). \qquad (7.52)$$

Dacă transformarea (7.52) este biunivocă, $x = f^{-1}(y)$, conform fig. (7.10, *a*) atunci se poate scrie că:

dacă $$x_0 < \xi \leqslant x_0 + dx$$

atunci cu probabilitate unu:

$$y_0 < \eta \leqslant y_0 + dy$$

unde $y_0 = f(x_0)$, iar $dy = f'(x_0)\,dx$.

Probabilitatea de realizare a celor două inegalități este aceeași; deci se poate scrie:

$$|\,w(x)\,dx\,| = |\,W(y)\,dy\,|$$

de unde:

$$W(y) = w(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = w[f^{-1}(y)]\left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad (7.53)$$

(se ia modulul fiindcă $W(y)$ este nenegativă).

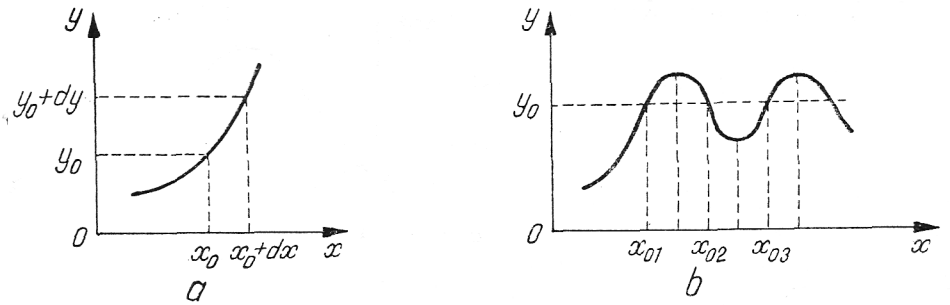


Fig. 7.10. Transformări de variabile aleatoare.

Dacă transformarea nu este biunivocă, se separă în arce monotone: fig. (7.10, *b*).

$$x_1(y),\ x_2(y)\ \ldots$$

și

$$|\,W(y)\,\mathrm{d}y\,| = |\,w(x_1)\,\mathrm{d}x_1\,| + |\,w(x_2)\,\mathrm{d}x_2\,| + \ldots$$

respectiv:

$$W(y) = w(x_1)\left|\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}y}\right| + w(x_2)\left|\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}y}\right| + \ldots \tag{7.54}$$

7.8.2. Funcții de două variabile aleatoare

Presupunem că între variabile aleatoare ξ_1, ξ_2 și η_1, η_2 există o corespondență biunivocă:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2) \\ \eta_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2) \\ \xi_1 &= \varphi_1(\eta_1, \eta_2) \\ \xi_2 &= \varphi_2(\eta_1, \eta_2) \end{aligned} \tag{7.55}$$

și că se cunoaște densitatea $w_2(x_1, x_2)$ și trebuie să determinăm densitatea $W_2(y_1, y_2)$ a V.A. η_1 și η_2.

Domeniului ΔX în jurul punctului $M(x_1, x_2)$ din planul x_1, x_2 îi corespunde domeniul ΔY în jurul punctului $M'(y_1, y_2)$ din planul y_1, y_2 (fig. 7.11)

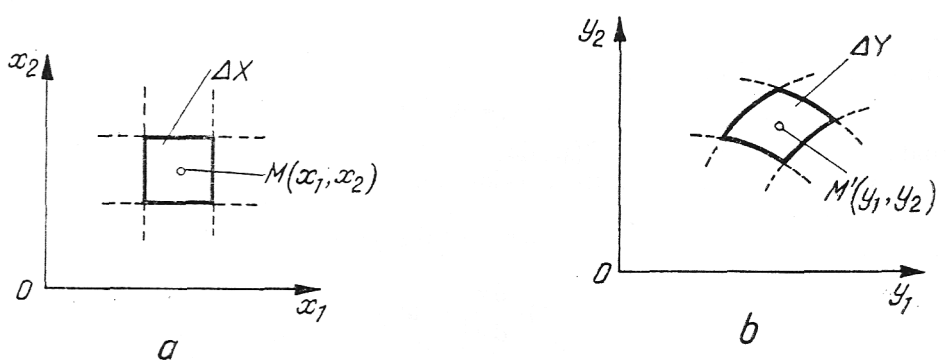


Fig. 7.11. Dependența funcțională a unor perechi de variabile aleatoare

Dacă ΔX este foarte mic avem aproximativ:

$$| w_2(x_1, x_2)\, \Delta X | = | W_2(y_1, y_2)\, \Delta Y |$$

sau

$$W_2(y_1, y_2) = \frac{1}{\left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right|} w_2(x_1, x_2)$$

dar

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \Delta \neq 0 \qquad (7.56)$$

Δ fiind determinantul funcțional (jacobianul) transformării (7.55).

Cu această notație avem:

$$W_2(y_1, y_2) = \frac{1}{|\Delta|} w_2(x_1, x_2) \qquad (7.57)$$

sau notînd:

$$D_2 = \frac{1}{\Delta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

se poate scrie

$$W_2(y_1, y_2) = | D_2 |\, w_2(x_1, x_2) \qquad (7.58)$$

sau în general în cazul a n variabile

$$W_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = | D_n |\, w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (7.59)$$

7.8.2.1. Transformarea din coordonate carteziene în coordonate polare

Să considerăm transformarea din fig. 7.12.

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \\ \eta_2 &= \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi_2}{\xi_1} \end{aligned}\right\} \qquad (7.60)$$

Transformarea este biunivocă fiindcă η_1 nu ia decît valori nenegative, iar η_2 ia valori între 0 și 2π.

Transformarea inversă este:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1 \cos \eta_2 \\ \xi_2 &= \eta_1 \sin \eta_2 \end{aligned}\right\} \qquad (7.61)$$

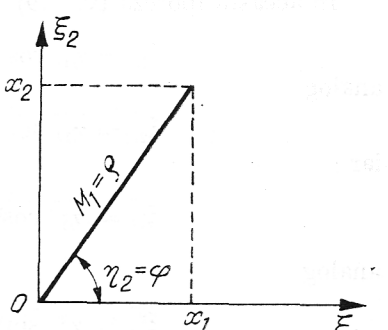


Fig. 7.12. Transformarea de coordonate carteziene la coordonate polare.

și

$$D_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

Deci densitatea de probabilitate în coordonate polare este

$$W_2(\rho, \varphi) = \rho w_2(x_1, x_2) \tag{7.62}$$

sau

$$W_2(\rho, \varphi) = \rho w_2(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \tag{7.63}$$

unde $\rho > 0$ și $\varphi(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ sînt valorile particulare pe care le iau V.A. η_1, respectiv η_2.

O aplicație importantă a acestei transformări se obține în cazul în care ξ_1 și ξ_2 sînt V.A. independente, normale, cu valoare medie nulă și cu aceeași dispersie σ^2. În acest caz:

$$w_2(x_1, x_2) = w_{11}(x_1)\, w_{12}(x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$$

$$W_2(\rho, \varphi) = \rho\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$$

iar $W(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$ este o distribuție Rayleigh

și $W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ este o distribuție uniformă.

7.8.2.2. Distribuția sumei unor fazori cu amplitudine și cu fază aleatoare

Să considerăm un număr de n fazori:

$$\eta_{1i} e^{j\eta_{2i}} = \xi_{1i} + j\xi_{2i} \tag{7.64}$$

unde η_{1i} și η_{2i} sînt V.A. independente, η_{1i} avînd o distribuție oarecare iar η_{2i} avînd o distribuție uniformă între 0 și 2π.

În această ipoteză (v. 7.9)

$$\overline{\xi_{1i}} = \overline{\eta_{1i}}\ \overline{\cos\eta_{2i}} = 0 \quad \text{fiindcă } \overline{\cos\eta_{2i}} = 0$$

analog

$$\overline{\xi_{2i}} = \overline{\eta_{1i}}\ \overline{\sin\eta_{2i}} = 0$$

iar

$$\overline{\xi_{1i}^2} = \overline{\eta_{1i}^2}\ \overline{\cos^2\eta_{2i}} = \frac{1}{2}\overline{\eta_{1i}^2} \quad \text{fiindcă } \overline{\cos^2\eta_{2i}} = \frac{1}{2}$$

analog

$$\overline{\xi_{2i}^2} = \overline{\eta_{1i}^2}\ \overline{\sin^2\eta_{2i}} = \frac{1}{2}\overline{\eta_{1i}^2}$$

Variabilele aleatoare ξ_{1i} și ξ_{2i} sînt necorelate fiindcă $\overline{\xi_{1i}\xi_{2i}} = 0$.

Să mai presupunem că nici unul din acești fazori nu are o valoare dominantă (cu alte cuvinte $\overline{\eta_{1i}^2}$ sînt de același ordin de mărime).

În aceste condiții suma ξ a acestor fazori (fig. 7.13) cade sub incidența *teoremei limită centrală*:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_{1i} + j \sum_{i=1}^{n} \xi_{2i} = \eta_1 \, e^{j\eta_2} \qquad (7.65)$$

notăm cu:

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{1i}; \qquad \xi_2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{2i}$$

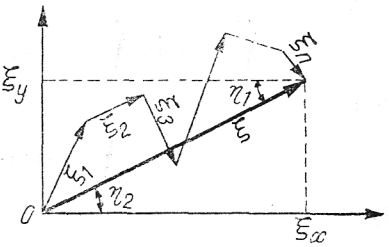


Fig. 7.13. Suma unor fazori cu amplitudine și cu fază aleatoare.

Variabilele ξ_1 și ξ_2 au o distribuție normală cu valoare medie nulă $\overline{\xi_1} = \overline{\xi_2} = 0$ și cu aceeași dispersie:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \overline{\eta_{1i}^2} = \frac{1}{2} \overline{\eta^2} \qquad (7.66)$$

Ca urmare distribuția modulului V.A. ξ:

$$\xi = \xi_1 + j\,\xi_2 = \sum_{i=1}^{n} \eta_{1i} \, e^{j\eta_{2i}}$$

este o distribuție Rayleigh.

7.9. Valori medii ale funcțiilor de variabile aleatoare

Să considerăm pentru început valoarea medie a funcției $\eta = f(\xi)$.

În conformitate cu definiția valorii medii avem:

$$\overline{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} y W(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, w(x)\, dx \qquad (7.67)$$

În cazul general, cînd:

$$\eta = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad (7.68)$$

$$\overline{\eta} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad (7.69)$$

fiindcă

$$W(y)\, dy = w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

7.9.1. Valoarea medie a unei sume de variabile aleatoare

Fie $\eta = \xi_1 \pm \xi_2$; în conformitate cu (7.69) avem

$$\overline{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 + x_2)\, w_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \qquad (7.70)$$

sau

$$\overline{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \, dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x_1, x_2) \, dx_2 \pm \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 \, dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x_1, x_2) \, dx_1$$

sau

$$\overline{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w_{11}(x_1) \, dx_1 \pm \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 w_{12}(x_2) \, dx_2 \tag{7.71}$$

Deci

$$\overline{\xi_1 \pm \xi_2} = \overline{\xi_1} + \overline{\xi_2} \tag{7.72}$$

Sau în general

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} \xi_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k} \tag{7.73}$$

adică *valoarea medie a unei sume de V.A. este egală cu suma valorilor medii ale acestor V.A., fără nici un fel de restricții.*

7.9.2. Valoarea medie a unui produs de variabile aleatoare

Dacă:

$$\eta = \xi_1 \xi_2 \tag{7.74}$$

avem

$$\overline{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 \tag{7.75}$$

Dacă V.A. sînt independente:

$$w_2(x_1, x_2) = w_{11}(x_1) \, w_{12}(x_2)$$

și introducînd în (7.75) se obține

$$\overline{\eta} = \overline{\xi_1} \, \overline{\xi_2} \tag{7.76}$$

sau în general

$$\overline{\prod_{k=1}^{n} \xi_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{\xi_k}$$

adică *valoarea medie a unui produs de V.A. independente este egală cu produsul valorilor medii.*

Dacă V.A ξ_1 și ξ_2 nu sînt independente, se face apel la funcția de covariație (7.11) în care s-a notat $\xi(t_1) = \xi_1$ și $\xi(t_2) = \xi_2$

$$K_{12} = \overline{[\xi_1 - \overline{\xi_1}] \, [\xi_2 - \overline{\xi_2}]} = \overline{\xi_1 \, \xi_2} - \overline{\xi_1} \, \overline{\xi_2} \tag{7.77}$$

de unde

$$\overline{\xi_1 \, \xi_2} = \overline{\xi_1} \, \overline{\xi_2} + K_{12} \tag{7.78}$$

În cazul în care V.A. sînt independente $K_{12} = 0$ și se obține relația precedentă.

7.9.3. Coeficientul de corelație

Coeficientul de corelație ρ este definit de relația

$$\rho \triangleq \frac{K_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{\overline{\xi_1\,\xi_2} - \overline{\xi_1}\,\overline{\xi_2}}{\sigma_1\sigma_2} \tag{7.79}$$

unde σ_1^2 și σ_2^2 sînt dispersiile V.A. ξ_1, respectiv ξ_2.

Se poate arăta că: $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

În multe cazuri este util să se poată stabili între V.A. ξ_1 și ξ_2 o legătură cît mai simplă, respectiv o relație liniară.

Cu alte cuvinte, se pune problema găsirii unei drepte care prezice „cel mai bine" valorile lui ξ_2 cînd valorile lui ξ_1 sînt cunoscute.

Această dreaptă se numește *linie de regresie* (fig. 7.14) a lui ξ_2 în raport cu ξ_1 și poate fi scrisă:

$$\eta_2 = a + b\xi_1 \tag{7.80}$$

unde η_2 aproximează „cel mai bine" pe ξ_2.

Dacă $\overline{\xi_1} = \overline{\xi_2} = 0$, atunci $a = 0$ și linia de regresie devine

$$\eta_2 = b\xi_1 \tag{7.81}$$

Aproximarea se face astfel ca eroarea medie patratică să fie minimă:

$$\varepsilon = \overline{(\xi_2 - \eta_2)^2} = min \tag{7.82}$$

Înlocuind pe η_2 din (7.81) în (7.82) și anulînd derivata lui ε în raport cu b se obține:

$$b = \frac{\overline{\xi_1\,\xi_2}}{\overline{\xi_1^2}} = \frac{\overline{\xi_1\,\xi_2}}{\sigma_1^2} \tag{8.83}$$

Sub o formă normalizată relația (7.81) ținînd seama de (7.83) se poate scrie

$$\frac{\eta_2}{\sigma_2} = \frac{\overline{\xi_1\,\xi_2}}{\sigma_1\sigma_2}\,\frac{\xi_1}{\sigma_1} \tag{7.84}$$

Introducînd variabilele normalizate

$$\beta = \frac{\eta_2}{\sigma_2} \quad \text{și} \quad \alpha = \frac{\xi_1}{\sigma_1} \quad \text{avem ecuația liniei de regresie:}$$

$$\beta = \rho\alpha \tag{7.85}$$

unde ρ este *coeficientul de corelație.*

În cazul general cînd valorile medii sînt nule, în relația (7.85) se înlocuiește:

$$\beta = \frac{\eta_2 - \overline{\xi_1}}{\sigma_2} \quad \text{și} \quad \alpha = \frac{\xi_1 - \overline{\xi_1}}{\sigma_1} \tag{7.86}$$

Dacă ξ_1 și ξ_2 sînt V.A. independente, $\rho = 0$.

Dacă $\rho = 0$ nu se poate spune că V.A. sînt independente, ci numai că între ele nu există o relație de dependență liniară.

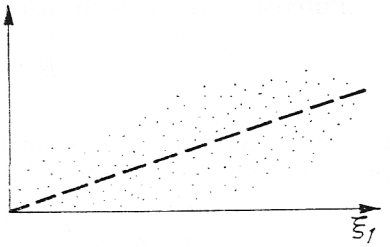


Fig. 7.14. Linia de regresie.

7.10. Densitatea spectrală de putere a semnalelor aleatoare (D.S.P.)

Analiza armonică a funcțiilor deterministe nu poate fi aplicată direct semnalelor aleatoare deoarece în acest caz în general:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | \xi^{(k)}(t)\, dt | \to \infty \tag{7.87}$$

Totuși și aici se poate introduce noțiunea de densitate spectrală și anume cea de *densitate spectrală de putere.*

Pentru a extinde analiza armonică la semnalele aleatoare cînd dezvoltarea obișnuită nu este valabilă, vom considera pentru început semnalul trunchiat $\xi_T^{(k)}(t)$ definit prin relațiile:

$$\left.\begin{aligned} \xi_T^{(k)}(t) &= \xi^{(k)}(t), \quad \text{pentru } |t| \leqslant \frac{T}{2} \\ \xi_T^{(k)}(t) &= 0, \quad \text{pentru } |t| > \frac{T}{2} \end{aligned}\right\} \tag{7.88}$$

Puterea medie a semnalului trunchiat este:

$$P_T^{(k)} = \frac{E_T^{(k)}}{T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(k)}(t)]^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} [\xi_T^{(k)}(t)]^2\, dt$$

Dacă se notează $X_T^{(k)}(\omega)$ transformata Fourier a semnalului trunchiat rezultă:

$$P_T^{(k)} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T^{(k)}(t)\, dt \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_T^{(k)}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

și deoarece $\xi_T^{(k)}$ este absolut sumabilă, inversînd ordinea de integrare se obține:

$$P_T^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} X_T^{(k)}(\omega) X_T^{*(k)}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T^{(k)}(\omega)|^2}{T}\, d\omega \tag{7.89}$$

Densitatea spectrală de putere a semnalului trunchiat se definește prin relația:

$$q_T^{(k)}(\omega) = \frac{|X_T^{(k)}(\omega)|^2}{T} \tag{7.90}$$

În acest caz, orice informație asupra fazei se pierde în $q_T^{(k)}(\omega)$.

Puterea medie a realizării particulare $\xi_T^{(k)}(t)$ este

$$P_T^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q_T^{(k)}(\omega)\, d\omega \tag{7.91}$$

Deoarece $|X_T^{(k)}(\omega)|^2$ este o funcție pară de ω, densitatea spectrală de putere poate fi definită în domeniul frecvențelor nenegative prin relația:

$$p_T^{(k)}(\omega) = \frac{2|X_T^{(k)}(\omega)|^2}{T} = 2q_T^{(k)}(\omega), \text{ pentru } \omega \geqslant 0 \tag{7.92}$$

În cazul cînd semnalul durează indefinit, se postulează existența limitei:

$$P^{(k)} = \lim_{T\to\infty} P_T^{(k)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q_T^{(k)}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{7.93}$$

Această presupunere este justificată de faptul că semnalul are totdeauna o putere finită.

Fiindcă nu ne interesează puterea unei realizări particulare, ci puterea medie înainte de a trece la limită, în relația (7.93) se efectuează o mediere statistică și obținem puterea medie:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{q_T^{(k)}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{7.94}$$

unde

$$q(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|X_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T} \tag{7.95}$$

este densitatea spectrală de putere (D.S.P).

Densitatea spectrală de putere definită numai pentru frecvențele nenegative, conform relației (7.92) poate fi scrisă

$$p(\omega) = 2q(\omega)\,U(\omega) \tag{7.96}$$

unde $U(\omega)$ este funcția treaptă unitate:

$$U(\omega) = 0 \text{ pentru } \omega < 0$$

$$U(\omega) = 1 \text{ pentru } \omega \geqslant 0.$$

Cu aceasta, densitatea se poate scrie:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} p(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{7.97}$$

7.10.1. Teorema Wiener Hincin

Teorema Wiener Hincin afirmă că *D.S.P* $q(\omega)$ *este transformata Fourier a funcției de autocorelație.*

Într-adevăr:

$$q(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,\frac{\overline{|X_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,\overline{X_T^{*(k)}(\omega)\,X_T(\omega)} \tag{7.98}$$

sau luînd transformata Fourier inversă:

$$q(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T^{(k)}(t_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_1}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T^{(k)}(t_2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_2}\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2}$$

sau:

$$q(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\xi_T^{(k)}(t_1)\,\xi_T^{(k)}(t_2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t_2-t_1)}}\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2$$

unde operația de mediere statistică se face după operația de integrare.

Medierea statistică fiind o operație de integrare, se poate schimba ordinea de integrare și se obține:

$$q(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} \overline{\xi^{(k)}(t_1)\, \xi^{(k)}(t_2)}\, e^{-j\omega(t_2-t_1)}\, dt_1\, dt_2 \tag{7.99}$$

ori

$$\overline{\xi^{(k)}(t_1)\, \xi^{(k)}(t_2)} = B_\xi(t_1, t_2) = B_\xi(t_2 - t_1) \tag{7.100}$$

deci

$$q(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} B_\xi(t_2 - t_1)\, e^{-j\omega(t_2-t_1)}\, dt_1\, dt_2 \tag{7.101}$$

Integrala este o integrală dublă pe domeniul format de patratul cu latura T (fig. 7.15) în variabilele t_1 și t_2 și reprezintă volumul cuprins între suprafața:

$$\Phi(t_2 - t_1) = B_\xi(t_2 - t_1)\, e^{-j\omega(t_2-t_1)} \tag{7.102}$$

și patratul cu latura T.

Această integrală poate fi transformată într-o integrală simplă dacă observăm că pentru $\tau = t_2 - t_1$ constant, funcția $\Phi(\tau)$ este constantă pe dreapta cu pantă unu:

$$t_2 = t_1 + \tau$$

Aria corespunzătoare suprafeței haşurate este: $BC\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, d\tau\right)$ iar $BC = \sqrt{2}AB$ iar $AB = \frac{T}{2} - \left(\tau - \frac{T}{2}\right) = T - \tau$, sau ținînd seama de faptul că τ poate lua și valori negative, avem: $AB = T - |\tau|$.

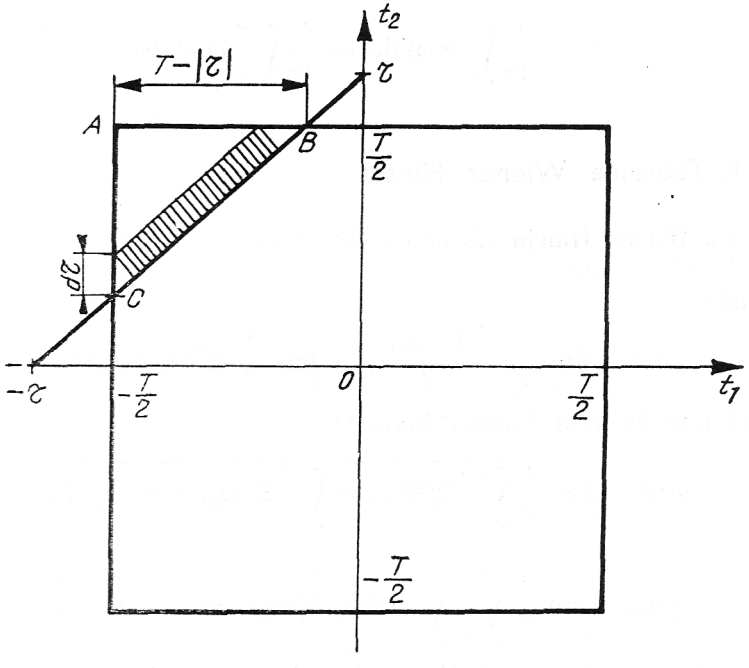


Fig. 7.15. Domeniul de variație ale variabilelor t_1, t_2.

Deci aria diferențială haşurată este:

$$\sqrt{2}\,(T-|\tau|)\frac{d\tau}{\sqrt{2}} = (T-|\tau|)\,d\tau$$

Cu notația (7.102) relația (7.101) devine:

$$q(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\int_{-T/2}^{+T/2}\Phi(t_2-t_1)\,dt_1\,dt_2 \tag{7.103}$$

Volumul reprezentat de integrala dublă (7.103) poate fi scris sub forma:

$$q(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T}\Phi(\tau)\,(T-|\tau|)\,d\tau \tag{7.104}$$

fiindcă τ variază de la $-T$ la $+T$ cînd t_1 și t_2 variază între $-\frac{T}{2}$ și $+\frac{T}{2}$.

Funcția $1-\frac{|\tau|}{T}$ este o funcție triunghiulară, care pentru $T\to\infty$, tinde spre 1 și, ca urmare, integrala de mai sus poate fi scrisă:

$$q(\omega) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{+T}\Phi(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\tau)\,d\tau \tag{7.105}$$

respectiv

$$q(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}B_\xi(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau \tag{7.106}$$

adică *densitatea spectrală de putere* $q(\omega)$ *este transformata Fourier a funcției de autocorelație.*

Fiindcă $q(\omega)$ este o funcție reală:

$$q(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}B(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \tag{7.107}$$

Funcția de autocorelație fiind o funcție pară, avem:

$$q(\omega) = 2\int_0^{\infty}B(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \tag{7.108}$$

sau

$$p(\omega) = 4\int_0^{\infty}B(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \tag{7.109}$$

Luînd transformata Fourier inversă se obține:

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}q(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega \tag{7.110}$$

sau

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}q(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega \tag{7.111}$$

sau

$$B(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}q(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}p(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega \tag{7.112}$$

În cazul semnalelor periodice:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t} \tag{7.113}$$

puterea semnalului este:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, C(n\omega_0)\,|^2 \tag{7.114}$$

iar densitatea spectrală de putere:

$$q(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, C(n\omega_0)\,|^2\, \delta(\omega - n\omega_0) \tag{7.115}$$

Într-adevăr, dacă înlocuim (7.115) în (7.97) se obține (7.114).

7.10.2. Densitate spectrală de putere de interacțiune

În mod analog densității spectrale de putere (7.95) se definește o *densitate spectrală de putere de interacțiune* între semnalele $\xi(t)$ și $\eta(t)$:

$$q_{\xi\eta}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{X_T^{*(k)}(\omega)\, Y_T^{(k)}(\omega)}}{T} \tag{7.116}$$

și

$$q_{\eta\xi}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{X_T^{(k)}(\omega)\, Y_T^{*(k)}(\omega)}}{T} \tag{7.117}$$

iar:

$$q_{\xi\eta}(\omega) = q_{\eta\xi}(-\omega) \quad \text{respectiv} \quad q_{\xi\eta}(\omega) = q^*_{\eta\xi}(\omega) \tag{7.118}$$

În conformitate cu teorema Wiener-Hincin considerînd semnalele ergodice, $B_{\xi\eta}(\tau) = R_{\xi\eta}(\tau)$ avem:

$$q_{\xi\eta}(\omega) = \mathfrak{F}\{R_{\xi\eta}(\tau)\} \quad \text{și} \quad q_{\eta\xi}(\omega) = \mathfrak{F}\{R_{\eta\xi}(\tau)\} \tag{7.119}$$

Conform relației (7.16) avem

$$R_{\xi\eta}(\tau) = R_{\eta\xi}(-\tau) \tag{7.120}$$

7.10.3. Densitate spectrală de energie și densitate spectrală de energie de interacțiune

Fie $x(t)$ un semnal de energie finită. Funcția de autocorelație a acestui semnal prin definiție este:

$$R_x(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt \tag{7.121}$$

Energia semnalului este $E = R(0)$
Densitatea spectrală de energie este:

$$e_x(\omega) \triangleq \overline{X^{(k}(\omega) X^{*(k)}(\omega)} = \overline{|X^{(k)}(\omega)\,|^2} \tag{7.122}$$

Conform teoremei Wiener-Hincin aplicată acestui caz avem relațiile:

$$e_x(\omega) = \mathfrak{F}\{R_x(\tau)\} \quad \text{și} \quad R_x(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}(\{e_x(\omega)\} \tag{7.123}$$

unde $e_x(\omega) = e_x(-\omega)$ și $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.

Dacă considerăm două semnale $x(t)$ și $y(t)$, ambele de energie finită avem:

$$e_{xy}(\omega) \triangleq \overline{X^{*(k)}(\omega)\, Y^{(k)}(\omega)}; \quad e_{yx}(\omega) \triangleq \overline{X^{(k)}(\omega)\, Y^{*(k)}(\omega)} \tag{7.124}$$

și

$$e_{xy}(\omega) = \mathfrak{F}\{R_{xy}(\tau)\}; \quad e_{yx}(\omega) = \mathfrak{F}\{R_{yx}(\tau)\} \tag{7.125}$$

unde

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y(t+\tau)\, dt; \quad R_{yx}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, y(t)\, dt \tag{7.126}$$

cu proprietățile:

$$e_{xy}(\omega) = e_{yx}^{*}(\omega); \quad R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \tag{7.127}$$

7.10.4. Densitatea spectrală de putere a derivatei și integralei semnalului

Să considerăm semnalul $\zeta(t)$ obținut din derivarea semnalului $\xi(t)$ staționar în sens larg

$$\zeta(t) = \frac{d\xi(t)}{dt} \tag{7.128}$$

Densitatea spectrală de putere a semnalului $\xi(t)$ în conformitate cu (7.95) este:

$$q(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|X_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T}$$

Ținînd seama de faptul că densitatea spectrală a semnalului trunchiat $\zeta_T^{(k)}(t)$ este:

$$Z_T^{(k)}(\omega) = j\omega X_T^{(k)}(\omega) \tag{7.129}$$

se poate scrie expresia densității spectrale de putere a semnalului $\zeta(t)$:

$$q_\zeta(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|Z_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|j\omega X_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T}$$

$$q_\zeta(\omega) = \lim_{T\to\infty} \omega^2 \frac{\overline{|X_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T} = \omega^2 q(\omega)$$

Deci densitatea spectrală de putere a derivatei semnalului este:

$$q_\zeta(\omega) = \omega^2 q(\omega) \tag{7.130}$$

Să considerăm acum integrala unui semnal aleator:

$$\eta_T(t) = \int_{-T/2}^{t} \xi_T(u)\, du = \int_{-T/2}^{t} \xi(u)\, du \quad \text{pt. } |t| < \frac{T}{2} \tag{7.131}$$

și

$$\eta(t) = \lim_{T\to\infty} \eta_T \tag{7.132}$$

analog cazului precedent avem:

$$q_\eta(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|Y_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{\left|\frac{1}{j\omega} X_T^{(k)}(\omega)\right|^2}}{T}$$

respectiv

$$q_\eta(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|X_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T} \tag{7.133}$$

sau

$$q_\eta(\omega) = \frac{1}{\omega^2} q(\omega) \tag{7.134}$$

Pentru ca $q_\eta(\omega)$ să existe pentru $\omega = 0$ trebuie ca semnalul să nu aibă componente continue în origine $q(0) = 0$.

7.11. Proprietăți ale funcției de autocorelație

Să considerăm ca și pînă acuma cazul semnalelor ergodice, cînd funcția de autocorelație în timp este egală cu funcția de autocorelație statistică

$$B(\tau) = R(\tau) = R(t_2 - t_1) = \overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)} = \overline{\tilde{\xi}^{(k)}(t_1 + t)\,\tilde{\xi}^{(k)}(t_2 + t)} \tag{7.135}$$

1. *Dacă presupunem că semnalul nu conține componente deterministe* (periodice) *și facem* $t_2 - t_1 = \tau \to \infty$, *legătura între variabilele aleatoare* $\xi(t_1)$ *și* $\xi(t_2)$ *devine din ce în ce mai slabă, și pentru* τ *foarte mare ele devin independente.*

În acest caz:

$$\overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)} = \overline{\xi(t_1)}\;\overline{\xi(t_2)} = a^2, \quad \text{pentru } t_2 - t_1 = \tau \to \infty,$$

unde a este valoarea medie.

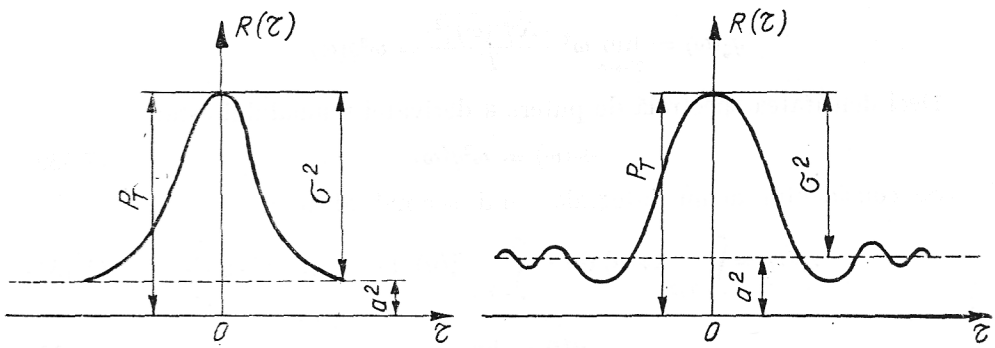
Deci:

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = a^2$$

sau:

$$a = \sqrt{R(\infty)} \tag{7.136}$$

Cînd $\tau \to \infty$, $R(\tau)$ se apropie asimptotic de a^2 fie monoton, fie prin oscilații în jurul valorii a^2 (fig. 7.16).



Fiig. 7.16. Funcția de corelație.

2. Din relația (7.110), pentru $\tau = 0$, rezultă:

$$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q(\omega)\, d\omega = P. \tag{7.137}$$

Deci *valoarea funcției de autocorelație în origine este egală cu puterea semnalului.*

Pe de altă parte:

$$\lim_{\tau \to 0} R(\tau) = \overline{\xi^2(t)} = R(0)$$

iar dispersia:

$$\sigma^2 = \overline{\xi^2(t)} - a^2 = R(0) - a^2$$

și deci:

$$\sigma^2 = R(0) - R(\infty) \tag{7.138}$$

3. Din relația (7.111) rezultă:

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

adică *funcția de autocorelație este o funcție pară.*

4. *Valoarea funcției de autocorelație în origine* $R(0)$ *nu poate fi întrecută de nici o valoare pentru* $\tau \neq 0$:

$$R(0) \geqslant |\, R(\tau)\,|$$

Pentru a demonstra această relație se consideră momentul inițial de ordinul doi:

$$\overline{[\xi(t) - \xi(t+\tau)]^2} = 2R(0) - 2R(\tau) \geqslant 0 \tag{7.139}$$

și deci:

$$R(0) \geqslant |\, R(\tau)\,|$$

Pe baza acestor proprietăți, cunoscînd funcția de autocorelație $R(\tau)$ se poate determina puterea totală a semnalului $R(0)$, componenta medie $\sqrt{R(\infty)}$, și dispersia $\sigma^2 = R(0) - R(\infty)$.

5. *Funcția de autocorelație a unor semnale periodice este o funcție periodică.* Într-adevăr, $\xi(t)$ fiind o funcție periodică, orice realizare particulară este o funcție periodică de aceeași perioadă. Să notăm cu $C^{(k)}(n\omega_0)$ coeficienții dezvoltării în serie Fourier a lui $\xi^{(k)}(t)$. Conform relației (7.115) avem

$$q^{(k)}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, C^{(k)}(n\omega_0)\,|^2\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

și

$$q(\omega) = \overline{q^{(k)}(\omega)} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{|\, C^{(k)}(n\omega_0)\,|^2}\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

Ținînd seama că

$$R(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{q(\omega)\}$$

se obține

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\, e^{jn\omega_0\tau} \tag{7.140}$$

unde

$$b_n = \overline{|\, C^{(k)}(n\omega_0)\,|^2}$$

7.11.1. Funcția de autocorelație a unei sume de semnale independente

Să considerăm semnalul:

$$r(t) = s(t) + n(t) \tag{7.141}$$

și

$$R(\tau) = \overbrace{r(t)\, r(t+\tau)} = \overbrace{[s(t) + n(t)]\,[s(t+\tau) + n(t+\tau)]}$$

sau

$$R(\tau) = R_s(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau) + R_n(\tau) \tag{7.142}$$

unde:

$R_s(\tau)$ este funcția de autocorelație a lui $s(t)$;
$R_n(\tau)$ — funcția de autocorelație a lui $n(t)$;
$R_{sn}(\tau)$, $R_{ns}(\tau)$ sînt funcții de corelație mutuală.

Ținînd seama de faptul că semnalele $s(t)$ și $n(t)$ sînt independente, cu valoare medie nulă avem:

$$R_{sn}(\tau) = R_{ns}(\tau) \equiv 0 \tag{7.143}$$

Rezultă că

$$R(\tau) = R_s(\tau) + R_n(\tau) \tag{7.144}$$

respectiv

$$R(0) = R_s(0) + R_n(0) \tag{7.145}$$

sau

$$P = P_s + P_n \tag{7.146}$$

unde

$P = R(0)$ este puterea totală;
$P_s = R_s(0)$ — puterea semnalului $s(t)$;
$P_n = R_n(0)$ — puterea semnalului $n(t)$.

Ținînd seama de relațiile (6.59), (6.56) și (6.35) rezultă că două semnale statistic independente au în spațiul semnalului un produs scalar nul

$$\langle s, n \rangle = 0 \tag{7.147}$$

deci *două semnale independente sînt ortogonale.*

Reciproca nu este totdeauna adevărată: se poate ca două semnale $x(t)$ și $y(t)$ să aibă un produs scalar nul (respectiv funcție de corelația mutuală să fie nulă), dar ele să nu fie independente statistic. Cînd $\langle x, y \rangle = 0$, respectiv *cînd semnalele sînt ortogonale* putem spune doar că semnalele sînt necorelate, adică *au funcția de corelație mutuală nulă.*

Considerațiile precedente pot fi utilizate în probleme de detecția semnalelor periodice acoperite de zgomot.

Semnalul și zgomotul fiind ortogonale, este valabilă relația (7.144) și funcțiile de autocorelație respective sînt arătate în fig. 7.17. Funcția de autocorelație

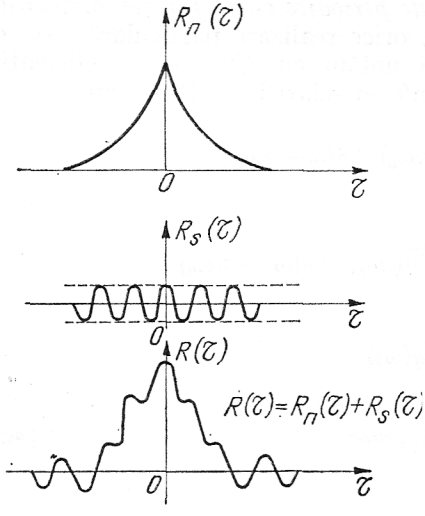


Fig. 7.17. Detecția semnalelor slabe.

a zgomotului este rapid descrescătoare cu τ, pe cînd funcția de autocorelație a semnalului este periodică cu τ. Rezultă că după un anumit timp de corelație τ, funcția de autocorelație a sumei devine egală cu cea a semnalului, adică periodică, dacă acesta este prezent. Cu cît semnalul este mai mic față de zgomot, cu atît va trebui un timp de corelație τ mai mare pentru a descoperi dacă semnalul este prezent sau nu.

7.12. Dezvoltarea în serie cu coeficienți necorelați (Karhunen-Loève)

În multe cazuri prezintă interes dezvoltarea unui semnal aleator $\xi(t)$ în serie cu coeficienți necorelați

$$\xi(t)=\text{l.i.m.}_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varphi_i(t) \qquad 0\leqslant t\leqslant D \tag{7.148}$$

unde limita este în sens de medie patratică

$$\lim_{N\to\infty}\overline{(\xi_N-\xi)^2}=0 \tag{7.149}$$

iar funcțiile $\{\varphi_i(t)\}$ sînt ortonormale:

$$\int_0^D \varphi_i(t)\,\varphi_j(t)\,\mathrm{d}t=\delta_{ij} \tag{7.150}$$

de unde rezultă:

$$\alpha_i=\int_0^D \xi(t)\,\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.151}$$

Considerînd că $\xi(t)$ nu are componente medii, respectiv

$\overline{\xi(t_i)}=0$ pentru $(\forall)\ i$, rezultă că $\overline{\alpha_i}=0$ pentru $(\forall)\ i$.

Coeficienți necorelați înseamnă:

$$\overline{\alpha_i\alpha_j}=\lambda_i\delta_{ij} \tag{7.152}$$

Înlocuind în (7.152) pe (7.151) obținem:

$$\overline{\alpha_i\alpha_j}=\overline{\int_0^D \xi(t)\,\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t\int_0^D \xi(u)\,\varphi_j(u)\,\mathrm{d}u} \tag{7.153}$$

respectiv

$$\overline{\alpha_i\alpha_j}=\int_0^D \varphi_i(t)\,\mathrm{d}t\int_0^D \overline{\xi(t)\,\xi(u)}\,\varphi_j(u)\,\mathrm{d}u \tag{7.154}$$

Dar:

$$\overline{\xi(t)\,\xi(u)}=K(t,u) \tag{7.155}$$

$K(t,u)$ fiind funcția de covariație (7.10).
Înlocuind (7.155) în (7.154) avem:

$$\overline{\alpha_i\alpha_j}=\int_0^D \varphi_i(t)\,\mathrm{d}t\int_0^D K(t,u)\,\varphi_j(u)\,\mathrm{d}u \tag{7.156}$$

Pentru a fi îndeplinită condiția (7.152) ținînd seama de (7.150) este suficient ca:

$$\int_0^D K(t, u)\, \varphi_j(u)\, du = \lambda_j \varphi_j(t) \tag{7.157}$$

Aceasta este o ecuație *integrală de tip Fredholm*, unde $K(t, u)$ este nucleul ecuației, $\varphi_j(t)$ sînt funcțiile proprii, iar λ_j sînt valorile proprii.

Cunoscînd proprietățile statistice ale semnalului se cunoaște funcția de covariație $K(t, u)$ și din ecuația (7.157) rezultă funcțiile ortogonale $\{\varphi_i(t)\}$ care duc la o dezvoltare cu coeficienți necorelați.

Dacă semnalul $\xi(t)$ este gaussian, atunci coeficienții dezvoltării α_i sînt nu numai necorelați, ci și independenți.

Notînd cu σ_i^2 dispersia V.A. α_i din (7.152) avem:

$$\sigma_i^2 = \overline{\alpha_i^2} = \lambda_i \tag{7.158}$$

Energia (medie) a semnalului este:

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \tag{7.159}$$

Pentru marea majoritate a semnalelor cu care avem de-a face, coeficienții λ_i de la un anumit ordin scad monoton cu indicele i.

Ca urmare, coeficienții cu indici mai mari decît un anumit ordin N pot fi neglijați:

$$\hat{\xi}(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(t) \tag{7.160}$$

unde $\hat{\xi}(t)$ înseamnă valoarea aproximativă (estimată) a lui $\xi(t)$.

Se poate demonstra că **eroarea medie patratică**:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{[\xi(t) - \hat{\xi}(t)]^2} \tag{7.161}$$

la transformarea Karhunen-Loève este mai mică decît la oricare altă transformare pentru același număr de termeni N. În acest sens se spune că *transformarea K—L este optimală.*

Acest fapt poate fi ușor de înțeles din punct de vedere informațional fiindcă coeficienții dezvoltării K—L fiind necorelați sau chiar independenți, cantitatea de informație transportată de ei va fi mai mare decît în cazul transformărilor cu coeficienți corelați. Rezultă că pentru transportul informației lui $\xi(t)$ la dezvoltarea K—L avem nevoie de un număr mai redus de coeficienți.

Transformata K—L este utilă în probleme de compresie de date.

Exemplu. O clasă largă de semnale au o funcție de covariație de forma;

$$K(t, u) = e^{-|t-u|} = K(\tau) \tag{7.162}$$

unde $\tau = t - u = t_1 - t_2$ este diferența de timp la care se evaluează corelația.

Înlocuind în (7.157) se obține:

$$\int_0^D e^{-|t-u|} \varphi_k(u)\, du = \lambda_k \varphi_k(t) \tag{7.163}$$

Ecuația (7.163) are soluția $\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ cu $\lambda_k = \dfrac{2}{1 + k^2\omega_0^2}$, de unde rezultă și interesul pentru dezvoltările în serie Fourier.

7.13. Semnale de bandă îngustă

Prin definiție, **semnalul de bandă îngustă** $x(t)$ *are o densitate spectrală de putere* $p(\omega)$ *concentrată în jurul lui* ω_0 *în lărgimea de bandă* $B \ll \omega_0$ (fig. 7.18).

Funcția de corelație a semnalului conform (7.112) este:

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} p(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega \tag{7.164}$$

Punem $\omega' = \omega - \omega_0$ și obținem:

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty} p(\omega_0+\omega')\cos(\omega_0+\omega')\tau\,d\omega'$$

notăm $p(\omega_0+\omega') = Q(\omega')$ care reprezintă *densitatea de putere transpusă la frecvențe joase*

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty} Q(\omega')\cos(\omega_0+\omega')\tau\,d\omega'$$

și fiindcă $Q(\omega')$ este nul pentru $\omega' < -\omega_0$ avem:

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega)\cos(\omega_0+\omega)\tau\,d\omega \tag{7.165}$$

respectiv:

$$B(\tau) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega\right]\cos\omega_0\tau - \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega\right]\sin\omega_0\tau \tag{7.166}$$

notăm:

$$b_c(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega \tag{7.167}$$

și

$$b_s(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega \tag{7.168}$$

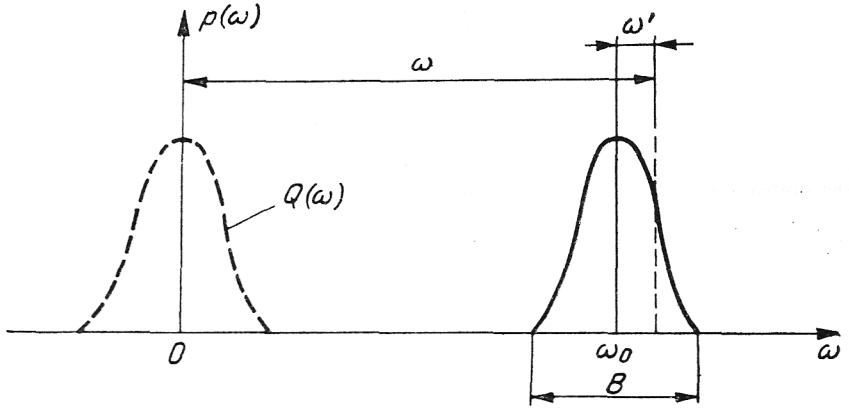


Fig. 7.18. Densitatea spectrală de putere a semnalului de bandă îngustă.

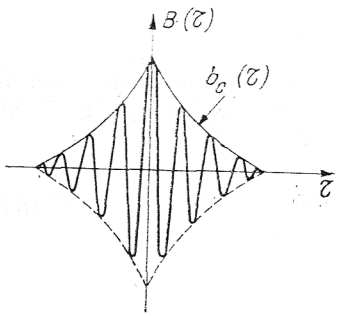


Fig. 7.19. Funcția de autocorelație a semnalelor de bandă îngustă.

Cu aceste notații:

$$B(\tau) = b_c(\tau) \cos \omega_0 \tau - b_s(\tau) \sin \omega_0 \tau \quad (7.169)$$

Dacă $p(\omega)$ este simetric în jurul lui ω_0, atunci $Q(\omega) = Q(-\omega)$ și $b_s(\tau) = 0$ iar:

$$B(\tau) = b_c(\tau) \cos \omega_0 \tau \quad (7.170)$$

adică este *funcția de corelație a semnalului transpus la frecvențele joase* $b_c(\tau)$ *multiplicată cu* $\cos \omega_0 \tau$ (fig. 7.19).

Relația (7.170) prezintă interes pentru toate sistemele de modulație care fac o transpunere la frecvențe înalte a spectrului mesajului. În acest caz $b_c(\tau)$ este funcția de autocorelație a mesajului.

Exemplu. Fie:

$$x(t) = A \cos (\omega_0 t + \varphi) \quad (7.171)$$

un semnal condiționat determinist, unde φ este o V.A. cu o distribuție uniformă.

Vom calcula funcția de autocorelație atit ca medie în timp cît și ca medie statistică pentru a se vedea că $s(t)$ este un semnal ergodic.

$$\text{a)}\ R(\tau) = \widetilde{x(t)\, x(t+\tau)} = \frac{A^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos (\omega_0 t + \varphi) \cos (\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi)\, \mathrm{d}t$$

prin transformări elementare se obține:

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \quad (7.172)$$

$$\text{b)}\ B(\tau) = \overline{x(t)\, x(t+\tau)} = A^2 \overline{\cos (\omega_0 t + \varphi) \cos (\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi)} =$$

$$= \frac{A^2}{2} \overline{\cos (2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi)} + \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

ori, primul termen este egal cu zero fiindcă:

$$\overline{\cos 2\varphi} = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2\varphi \, \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} = 0$$

$$\overline{\sin 2\varphi} = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2\varphi \, \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} = 0$$

deci

$$B(\tau) = R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \quad (7.173)$$

Densitatea spectrală de putere a semnalului $s(t)$ este

$$q(\omega) = \mathcal{F}\{B(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau\right\}$$

și aplicînd transformata Fourier se obține

$$q(\omega) = \pi \frac{A^2}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (7.174)$$

deci un spectru de linii fig. 7.20.

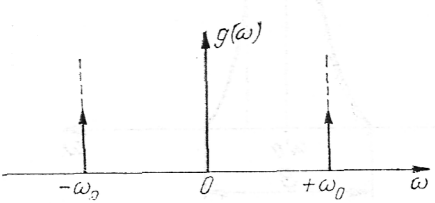


Fig. 7.20. Spectru de linii.

● **Expresia semnalului de bandă îngustă în domeniul timp.** Să considerăm semnalul de bandă îngustă $x(t)$ și semnalul analitic asociat:

$$z(t) = x(t) + \mathrm{j}y(t) \tag{7.175}$$

unde:

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi t} * x(t) + \frac{1}{\pi}\,\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(u)}{t-u}\,\mathrm{d}u \\ \text{și}\qquad x(t) &= \mathcal{H}\{y(t)\} = -\frac{1}{\pi}\,\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(u)}{t-u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}\right\} \tag{7.176}$$

$\mathcal{P}$ reprezintă partea principală a integralei obținută printr-un proces de trecere la limită peste punctul $u = t$, iar operatorul $\mathcal{H}\{\ \}$ reprezintă transformata Hilbert.

Relația (7.175) poate fi pusă sub forma:

$$z(t) = A(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi(t)} \tag{7.177}$$

respectiv

$$x(t) = Re\,z(t) = A(t)\cos\psi(t) \tag{7.178}$$

Dacă semnalul este de bandă îngustă, prin definiție se poate scrie:

$$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) \tag{7.179}$$

cu restricția ca $\varphi(t)$ să nu aibă variații prea rapide:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{max} \ll \omega_0 \tag{7.180}$$

În aceste condiții semnalul de bandă îngustă poate fi scris:

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \tag{7.181}$$

sau

$$x(t) = \alpha(t)\cos\omega_0 t + \beta(t)\sin\omega_0 t \tag{7.182}$$

unde:

$$\alpha(t) = A(t)\cos\varphi(t) \tag{7.183}$$

$$\beta(t) = A(t)\sin\varphi(t) \tag{7.184}$$

7.14. Semnale de bandă largă

Dacă densitatea spectrală de putere a semnalului este aproximativ constantă pe un domeniu mare de frecvență $\omega < \omega_0$, spunem că avem de-a face cu un **semnal de bandă largă** (fig. 7.21).

Presupunînd că densitatea spectrală de putere este constantă:

$$p(\omega) = N_0 \qquad 0 < \omega < \omega_0 \tag{7.185}$$

funcția de autocorelație este:

$$B(\tau) = \frac{N_0}{2\pi}\int_0^{\omega_0}\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\omega = \frac{\omega_0}{2\pi}N_0\,\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau} \tag{7.186}$$

sau

$$B(\tau) = B(0)\,\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau} \tag{7.187}$$

unde $B(0) = \dfrac{1}{2\pi}\,\omega_0 N_0$.

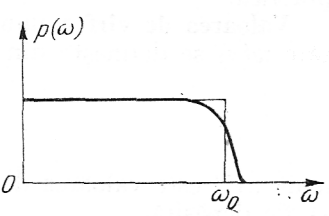


Fig. 7.21. Densitatea spectrală de putere idealizată a semnalului de bandă largă.

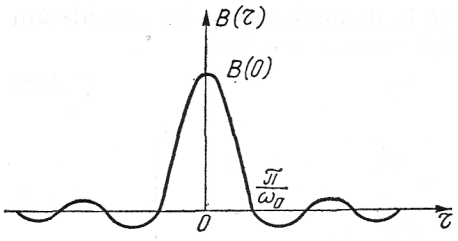


Fig. 7.22. Funcția de autocorelație a semnalului de bandă largă.

În fig. (7.22) este reprezentată funcția de autocorelație a semnalului de bandă largă.

Se observă că lobul principal al funcției de autocorelație are o durată egală cu $2\frac{\pi}{\omega_0}$, adică *corelația în semnal scade dacă lărgimea de bandă crește.*

Din relația (7.187) se poate obține expresia coeficientului de corelație:

$$\rho(\tau) = \frac{\overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)}}{\sigma^2} = \frac{B(\tau)}{B(0)} = \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} \tag{7.188}$$

unde s-a presupus că componentele medii sînt nule, deci $\sigma^2 = B(0)$.

Se observă că $\rho(\tau_0) = 0$ pt. $\tau_0 = \frac{k\pi}{\omega_0} = \frac{k}{2f_0}$, adică coeficientul de corelație în punctele de eșantionare (cu intervalul Nyquist) este nul, deci eșantioanele semnalului de bandă largă fără componentă medie sînt necorelate.

Dacă $\omega_0 \to \infty$ obținem un semnal idealizat numit *zgomot alb* definit de:

$$q(\omega) = \frac{1}{2} N_0 \quad \text{pt.} \quad -\infty < \omega < \infty \tag{7.189}$$

și

$$B(\tau) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau}\, d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \tag{7.190}$$

adică în cazul zgomotului alb valorile semnalului $\xi(t_1)$ și $\xi(t_2)$ nu sînt corelate oricît de aproape ar fi t_2 de t_1.

În acest caz $\rho(0) = 1$ și $\rho(\tau) = 0$ pt. $\tau \neq 0$.

Zgomotul alb este un semnal aleator pur.

7.15. Valoarea de vîrf a semnalelor aleatoare

Semnalele aleatoare avînd valori pe întreaga axă reală, se pune problema de ordin practic de a limita valorile luate în considerare la o așa-numită „valoare de vîrf" V. Valoarea de vîrf „V" trebuie astfel definită, încît probabilitatea ca să avem $|\xi(t)| > |V|$ să fie neglijabilă. În felul acesta neglijarea valorilor semnalului care depășesc valoarea de vîrf nu are nici o importanță practică.

Valoarea de vîrf a unui semnal aleator $\xi(t)$ cu o densitate de probabilitate $w(x)$ se definește din următoarea relație:

$$p_v = 1 - \int_{-|V|}^{+|V|} w(x)\, dx \tag{7.191}$$

unde „V" este valoarea de vîrf, iar p_v este probabilitatea ca această valoare să fie depășită.

Luînd o valoare convenabil de mică pentru p_v, din relația (7.191) se poate determina V.

În cazul semnalelor cu distribuție normală, cu valoare medie nulă, relația (7.191) devine:

$$p_v = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-|V|}^{+|V|} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \tag{7.192}$$

sau fiindcă semnalul este ergodic, dispersia σ^2 este egală cu E_{ef}^2, adică cu valoarea eficace la patrat — făcîndu-se presupunerea că rezistența de sarcină este egală cu unitatea — deci E_{ef}^2 reprezintă puterea semnalului evaluată ca o medie în timp.

În acest caz relația (7.192) devine:

$$p_v = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi E_{ef}^2}} \int_{-|V|}^{+|V|} e^{-\frac{x^2}{2E_{ef}^2}} dx \tag{7.193}$$

unde pentru a obține pentru V o valoare rotundă se ia $p_v = 0{,}32 \times 10^{-4}$, adică o probabilitate extrem de mică de a depăși valoarea de vîrf.

În aceste condiții:

$$V = 4E_{ef} \tag{7.194}$$

relație care definește valoarea de vîrf pentru semnalele cu o distribuție normală sau apropiată de cea normală.

7.16. Semnalul telefonic

Semnalul telefonic $s(t)$ este un *semnal aleator nestaționar* și ca urmare descrierea lui în termeni probabilistici este extrem de dificilă.

Principalii parametri ai semnalului sînt:

— *tensiunea eficace:*

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{D} \int_0^D s^2(t)\, dt \tag{7.195}$$

unde intervalul D de mediere este stabilit de normele C.C.I.T.T. (Comitetul Internațional de Telegrafie și Telefonie)

— *puterea:*

$$P = \frac{U_{ef}^2}{R} \tag{7.196}$$

care se măsoară în unități logaritmice.

$$y = 10 \log_{10} \frac{P}{P_0} \tag{7.197}$$

unde P_0 este puterea de referință $P_0 = 1$ mW.

Parametrul y este denumit *nivel dinamic* sau *volum* al semnalului și se măsoară în decibeli-miliwați — dB m.

Densitatea de probabilitate a lui y poate fi considerată gaussiană:

$$w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{7.198}$$

unde: $\sigma^2 = 4 \div 8$ dB m iar $y_0 = (-18) \div (-8)$ dB m.

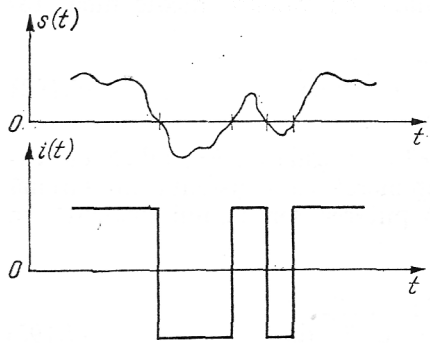


Fig. 7.23. Semnalul telefonic amplificat și limitat.

Dacă ne referim la conținutul informațional al semnalului vorbirii, se constată că cea mai mare cantitate de informație privind inteligibilitatea vorbirii se găsește în poziția punctelor de trecere a semnalului prin zero.

Acest fapt sugerează posibilitatea unei prelucrări simple, care să permită transmiterea și stocarea semnalului într-un sistem binar simplu.

Conform fig. 7.23, semnalul $s(t)$ este amplificat și apoi limitat, obținîndu-se un semnal discret $i(t)$ care apoi este eșantionat cu o frecvență suficient de ridicată ca să poată fi redate și intervalele mici. Semnalele binare obținute se transmit prin canale binare sau se stochează în memorii digitale, recuperarea semnalului la utilizator făcîndu-se printr-o filtrare trece-jos, obținîndu-se un semnal destul de diferit de cel inițial, însă inteligibil.

7.17. Semnalul de televiziune

Semnalul de televiziune are o structură complexă avînd un *spectru de linii, dat de procedeele de baleiere cu frecvența liniilor* f_L și *a cadrelor* f_c, precum *și un spectru continuu, dat de conținutul informațional* al semnalului de televiziune.

În fig. (7.24) este arătat spectrul de linii al semnalului de televiziune.

Densitatea de probabilitate a eșantioanelor semnalului de televiziune (în intervalele active) poate fi în general considerată *uniformă*, adică toate nivelele semnalului de la limita inferioară (negru) la cea superioară (alb) sînt egal probabile.

Între eșantioanele alăturate există însă o dependență statistică foarte mare, care face ca *redundanța* să fie *mare*, deci eficiența transmisiunii mică.

Pentru mărirea eficienței, respectiv pentru reducerea spectrului trebuie micșorată această redundanță, prin metode care vor fi expuse în capitolele ulterioare.

Funcția de autocorelație este aproximativ de formă exponențială:

$$R(\tau) = R(0)\, e^{-\alpha |\tau|} \qquad (7.199)$$

unde $\alpha > 0$.

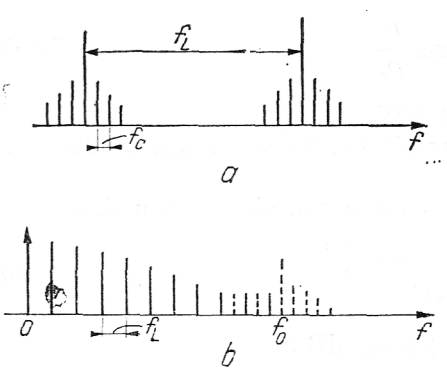


Fig. 7.24. *a* — Detaliu al spectrului de linii în care apar și liniile care se repetă cu frecvența cadrelor f_c; *b* — Ansamblul spectrului de linii cu liniile semnalului de crominanță indicate punctat. Spectrul de linii al semnalului de televiziune.

Spectrul de putere este conform (7.109)

$$p(\omega) = 4\int_0^{\infty} R(0)\, e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau \, d\tau$$

respectiv: $p(\omega) = R(0)\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ (7.200)

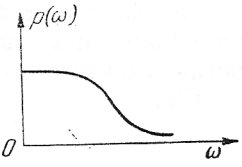


Fig. 7.25. Densitatea spectrală a semnalului de televiziune.

Din această relație se vede că dacă *corelația este mai puternică*, respectiv α mai mic, *spectrul se îndepărtează mai mult de spectrul unui semnal de bandă largă* (fig. 7.25).

● **Conținutul informațional al semnalului de televiziune.** Pentru a calcula debitul de informație H_t al sursei de imagini facem ipoteza extremă că eșantioanele semnalului sînt independente și să cuantizăm aceste eșantioane.

Distribuția semnalului fiind uniformă, toate nivelele de cuantizare $M = 2^Q$ sînt egal probabile, deci cantitatea de informație pe eșantion este $i = \log M = Q$.

În timpul D avem $2wD$ eșantioane, deci o cantitate de informație $2WDQ$, iar debitul de informație este:

$$H_t = 2WQ \text{ biți/s} \qquad (7.201)$$

Aproximativ, considerînd că $W = 5$ MHz și $Q = 8$ se obține $H_t = 80$ Mbit/s.

Dacă ne referim la o imagine descompusă în N_0 elemente pe orizontală și N_v elemente pe verticală, fiecare element fiind cuantizat cu Q biți și considerînd elementele de imagine (pixel) ca fiind independente, cantitatea de informație a imaginei este:

$$H = N_0 N_v Q \qquad (7.202)$$

Dacă considerăm aproximativ $N_0 = N_v = 600$, iar pentru imagini de foarte bună calitate $Q = 8$, se obține $H = 3$ M bit/imagine.

Considerînd că avem 25 de imagini pe secundă rezultă $H_t = 25 \times 3 = 75$ Mb/s., cifră apropiată de precedenta (nu identică din cauza cifrelor aproximativ luate).

Sistemele clasice de transmisiune sînt destinate să transmită această cantitate uriașă de informație pe care nici o sursă reală nu o transmite și care în nici un caz nu poate fi prelucrată de sistemul vizual.

7.18. Prelucrări liniare ale semnalelor aleatoare

În cele ce urmează se vor expune prelucrările realizate cu filtre liniare idealizate.

7.18.1. Trecerea semnalelor aleatoare prin sisteme liniare

Dacă la intrarea unui sistem liniar se aplică un semnal aleator $\xi(t)$, la ieșire apare semnalul aleator

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t - \tau)\, h(\tau)\, d\tau \qquad (7.203)$$

unde $h(t)$ este răspunsul sistemului la impulsul unitate.

Din această relație se poate determina funcția de autocorelație și densitatea spectrală a semnalului la ieșire dacă se cunosc aceste funcții pentru semnalul la intrare.

În cele ce urmează vom determina densitatea de putere a semnalelor trunchiate cînd analiza Fourier este valabilă, apoi prin trecere la limită obținem un rezultat valabil pentru semnalele aleatoare.

Fie:

$$q_\xi(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|X_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T} \tag{7.204}$$

la ieșire avem:

$$Y_T^{(k)}(\omega) = H(\omega)\, X_T^{(k)}(\omega) \tag{7.205}$$

unde $H(\omega)$ este funcția de transfer a sistemului.

Deci:

$$q_\eta(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|Y_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T} = |H(\omega)|^2 \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|X_T^{(k)}(\omega)|^2}}{T} \tag{7.206}$$

deci:

$$q_\eta(\omega) = |H(\omega)|^2\, q_\xi(\omega) = A^2(\omega)\, q_\xi(\omega) \tag{7.207}$$

unde $A(\omega)$ este modulul funcției de transfer.

Din teorema Wiener-Hincin avem:

$$B_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\omega)\, q_\xi(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{7.208}$$

unde $B_\eta(\tau)$ este funcția de autocorelație a semnalului la ieșire din filtru.

Ținînd seama de relația (7.203) se poate afirma că *distribuția semnalului aleator la ieșire, $\eta(t)$, este gaussiană dacă distribuția semnalului aleator la intrare, $\xi(t)$, este gaussiană.*

7.18.1.1. Trecerea zgomotului alb prin sisteme liniare

În acest caz $q_\xi(\omega)$ = constant:

$$q_\xi(\omega) = \frac{1}{2} N_0 \tag{7.209}$$

iar funcția de autocorelație este conform rel. (7.190).

$$B_\xi(\tau) = \frac{1}{2} N_0 \delta(\tau) \tag{7.210}$$

La ieșirea din sistemul liniar avem:

$$q_\eta(\omega) = \frac{1}{2} N_0 A^2(\omega) \tag{7.211}$$

$$B_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{7.212}$$

Coeficientul de corelație, ținînd seama că valoarea medie a zgomotului alb este nulă, este

$$\rho_\eta(\tau) = \frac{B_\eta(\tau)}{B_\eta(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\omega)\, d\omega} \tag{7.213}$$

Se observă că există valori ale lui $\tau \neq 0$ pentru care acest coeficient este diferit de zero, cu alte cuvinte la trecerea zgomotului alb prin sisteme liniare se introduce o corelație între valorile semnalului la ieșire și anume: *la trecerea unui semnal aleator printr-un sistem liniar se introduce o corelație între valorile semnalului de ieșire, care este cu atît mai mare cu cît lărgimea de bandă a sistemului este mai mică.*

Această afirmație va fi demonstrată pentru cazul particular al filtrelor ideale.

7.18.1.2. Trecerea semnalelor aleatoare prin filtrul ideal trece-jos

Filtrul ideal trece-jos este caracterizat de funcția de transfer:

$$H(\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} \tag{7.214}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} A(\omega) &= A \qquad \text{pt. } |\omega| \leqslant \omega_1 \\ A(\omega) &= 0 \qquad \text{pt. } |\omega| > \omega_1 \end{aligned}\right\} \tag{7.215}$$

iar $\varphi(\omega) = -\omega t_0$

și de funcția de pondere:

$$h(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(\omega)\} = A\frac{\omega_1}{\pi}\operatorname{sinc}[\omega_1(t-t_0)] \tag{7.216}$$

Ambele funcții sînt arătate în fig. (7.26).

Dacă la intrare în filtru se aplică treapta unitate $u(t)$, la ieșire se obține (fig. 7.27):

$$y(t) = \frac{A}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}[\omega_1(t-t_0)]\right\} \tag{7.217}$$

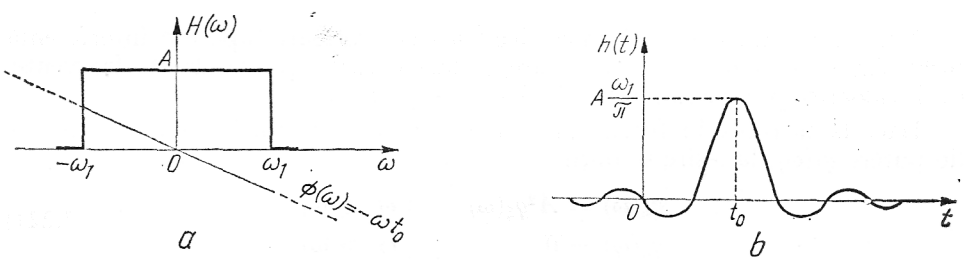


Fig. 7.26. *a* — **Caracteristica amplitudinii** $A(\omega)$ **și caracteristica de fază** $\varphi(\omega)$ **a unui filtru trece-jos ideal.** *b* — **Răspunsul unui filtru trece-jos ideal a impulsului unitate.**

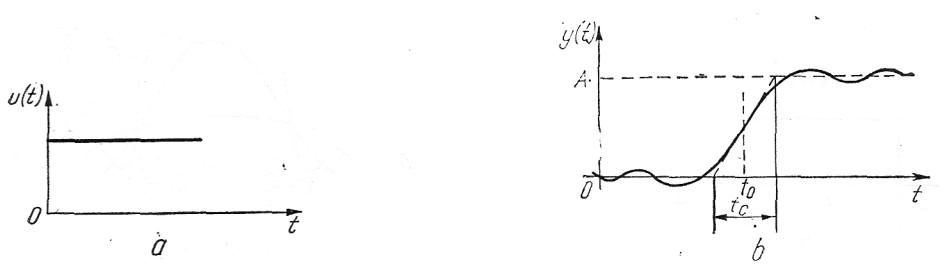


Fig. 7.27. *a* — **Semnalul treaptă unitate** (*a*) **și răspunsul unui filtru trece-jos ideal la un semnal treaptă unitate** (*b*).

unde

$$\mathrm{Si}\,(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Evaluînd derivata în punctul $t = t_0$ se obține:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \frac{\omega_1 A}{\pi} = \frac{A}{t_c} \tag{7.218}$$

de unde

$$t_c = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{1}{2f_1}$$

Această valoare a timpului de trecere va fi luată în considerare în cele ce urmează ori de cîte ori avem de-a face cu un filtru trece jos.

Dacă la intrarea în filtru se aplică un semnal rectangular

$$x(t) = u\left(t + \frac{\alpha}{2}\right) - u\left(t - \frac{\alpha}{2}\right)$$

la ieșire se obține

$$y(t) = \frac{A}{\pi}\left\{\mathrm{Si}\left[\omega_1\left(t - t_0 + \frac{\alpha}{2}\right)\right] - \mathrm{Si}\left[\omega_1\left(t - t_0 - \frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\} \tag{7.219}$$

În fig. 7.28 este arătat răspunsul pentru diferite frecvențe de tăiere.

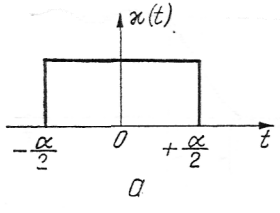
În legătură cu transmisiunile numerice se va considera că între durata α a semnalului și lărgimea de bandă a canalului există relația:

$$f_1 = \frac{1}{\alpha} \tag{7.220}$$

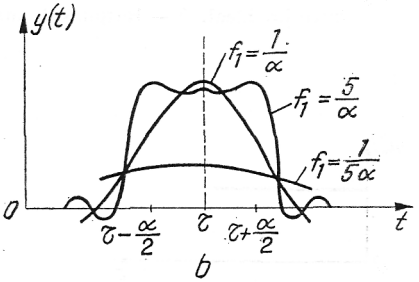
Dacă frecvența este mai mică decît această valoare, apare o interferență între simboluri, dacă este mai mare se face o risipă pe bandă de frecvențe, deci valoarea precedentă reprezintă un compromis.

Dacă la intrarea în filtru aplicăm un semnal aleator $\xi(t)$ cu o densitate de putere $q_\xi(\omega)$, la ieșire se obține:

$$\begin{aligned} q_\eta(\omega) &= A^2 q_\xi(\omega) \quad &|\,\omega\,| \leqslant \omega_1 \\ q_\eta(\omega) &= 0 \quad &|\,\omega\,| > \omega_1 \end{aligned} \tag{7.221}$$



a



b

Semnalul la ieșire

Fig. 7.28. Semnalul la intrare (a) și semnalul la ieșire (b). Răspunsul filtrului trece jos ideal la un impuls rectangular simetric în raport cu originea.

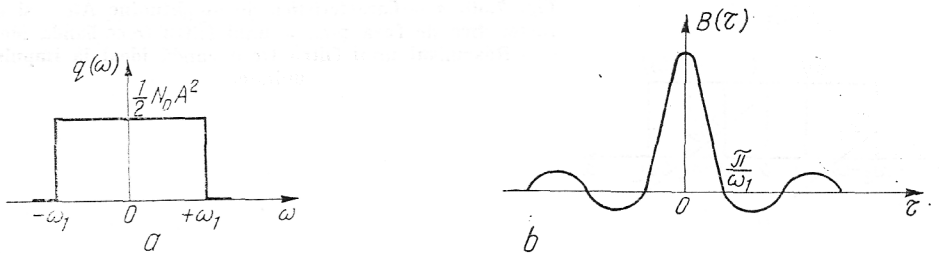


Fig 7.29. Densitatea spectrală de putere a semnalului la ieșirea dintr-un filtru trece-jos ideal, la intrarea căruia este aplicat un zgomot alb (*a*) și funcția de autocorelație a semnalului la ieșirea dintr-un filtru trece-jos, la intrarea căruia s-a aplicat un zgomot alb (*b*).

iar funcția de autocorelație la ieșire este:

$$B_\eta(\tau) = \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{+\omega_1} q_\xi(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{7.222}$$

În cazul particular cînd $\xi(t)$ este zgomot alb (fig. 7.29)

$$q_\xi(\omega) = \frac{1}{2} N_0 \tag{7.223}$$

iar

$$B_\eta(\tau) = B_\eta(0)\ \text{sinc}\ \omega_1\tau \tag{7.224}$$

unde

$$B_\eta(0) = \frac{A^2}{2\pi} N_0\omega_1$$

Din cele precedente rezultă că *la trecerea semnalelor aleatoare pure prin filtre se introduce o corelație în semnalul de ieșire.*

7.18.1.3. Trecerea semnalelor aleatoare prin filtru ideal trece-bandă

Filtrul trece-bandă ideal (fig. 7.30) are funcția de transfer:

$$H(\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} \tag{7.225}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} &A(\omega) = A \qquad \text{pt. } \omega_1 \leqslant |\,\omega\,| \leqslant \omega_2 \\ &A(\omega) = 0 \qquad \text{pt. } |\,\omega\,| < \omega_1 \text{ și } |\,\omega\,| > \omega_2 \\ &\varphi(\omega) = -(\omega - \omega_0)\, t_0 \qquad \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2 \\ &\varphi(\omega) = -(\omega + \omega_0)\, t_0 \qquad -\omega_2 \leqslant \omega \leqslant -\omega_1 \end{aligned}\right\} \tag{7.226}$$

și

Notăm cu ω_0 frecvența centrală a filtrului:

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

și cu $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, lărgimea de bandă a filtrului:

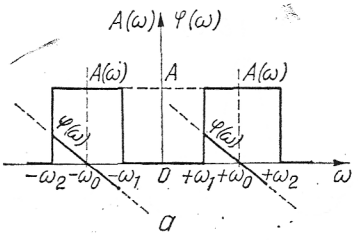
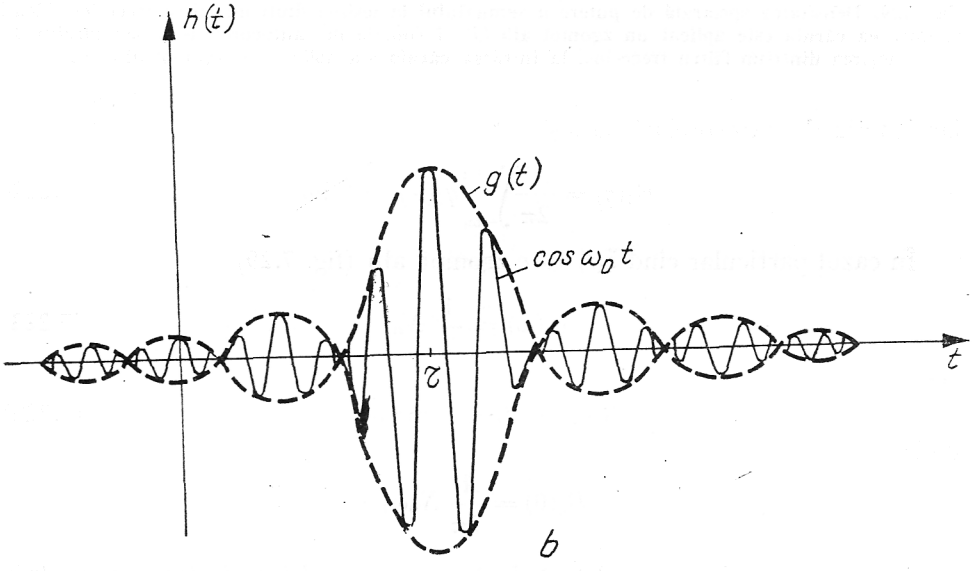


Fig. 7.30. *a* — Caracteristica de amplitudine A(ω) și caracteristica de fază φ(ω) a unui filtru trece-bandă ideal. *b* — Răspunsul unui filtru trece bandă ideal la impulsul unitate.



Funcția de pondere a filtrului este:

$$h(t) = g(t) \cos \omega_0 t \tag{7.227}$$

unde

$$g(t) = A \frac{\Delta\omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta\omega}{2}(t - t_0)\right] \tag{7.228}$$

Valoarea maximă a funcției de pondere este

$$h_{max} = A \frac{\Delta\omega}{\pi} \tag{7.229}$$

adică ea este direct proporțională cu lărgimea de bandă.

Dacă la intrare în filtru se aplică un zgomot alb cu $q_\xi(\omega) = \frac{1}{2} N_0$ la ieșire se obține (fig. 7.31):

$$\left.\begin{aligned} q_\eta(\omega) &= \frac{1}{2} N_0 A^2 \qquad \omega_1 \leqslant |\,\omega\,| \leqslant \omega_2 \\ q_\eta(\omega) &= 0 \qquad\qquad\quad \omega_2 < |\,\omega\,| < \omega_1 \end{aligned}\right\} \tag{7.230}$$

iar funcția de autocorelație la ieșire este:

$$B_\eta(\tau) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} N_0 A^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right) \cos \omega_0 \tau \tag{7.231}$$

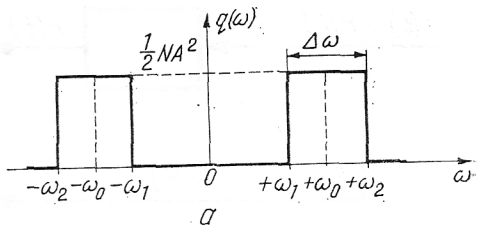
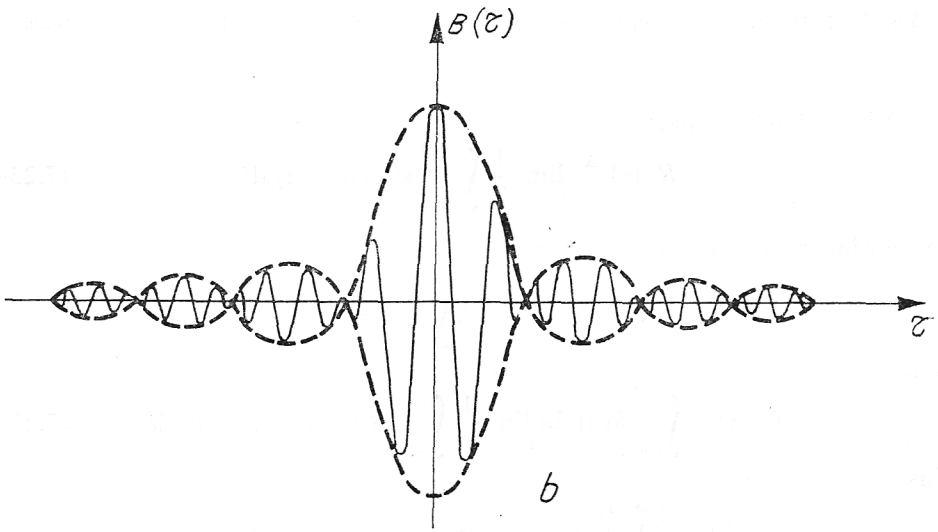


Fig. 7.31. Densitatea spectrală de putere a semnalului la ieșirea dintr-un filtru trece-bandă ideal, la intrarea căruia s-a aplicat un zgomot alb (*a*) și funcția de autocorelație a semnalului la ieșirea dintr-un filtru trece-bandă ideal, la intrarea căruia s-a aplicat un zgomot alb (*b*).



sau

$$B_\eta(\tau) = B_\eta(0)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)\cos\omega_0\tau \tag{7.232}$$

unde

$$B_\eta(0) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}A^2N_0$$

Dat fiind că funcția de autocorelație a semnalului la intrare este o funcție „δ", $B_\xi(\tau) = \frac{1}{2}N_0\delta(\tau)$, iar la ieșire este $B_\eta(\tau)$ dată de relația (7.232), rezultă că *pe măsură ce lărgimea de bandă* $\Delta\omega$ *scade, corelația în semnalul de la ieșire crește, ajungînd la limită*:

$$\lim_{\Delta\omega\to 0} B_\eta(\tau) = B_\eta(0)\cos\omega_0\tau \tag{7.233}$$

(adică se obține funcția de autocorelație a unui semnal condiționat determinist sinusoidal de frecvență ω_0).

7.18.1.4. Determinarea funcției de pondere a unui sistem liniar prin metoda de corelație

Fie $R_{sr}(\tau)$ funcția de corelație între semnalul $s(t)$ aplicat la intrarea unui sistem liniar cu o funcție de pondere $h(t)$ și semnalul $r(t)$ de la ieșirea acestui sistem (fig. 7.32).

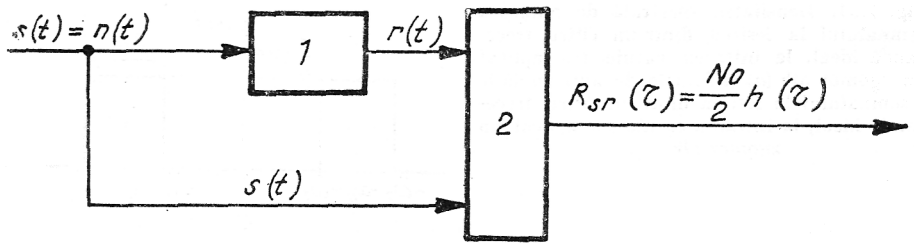


Fig. 7.32. Determinarea funcției de pondere a semnalului liniar, prin corelație mutuală: 1 — sistem liniar; 2 — corelator.

Prin definiție avem:

$$R_{sr}(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)\, r(t+\tau)\, \mathrm{d}t \tag{7.234}$$

exprimînd pe $r(t)$ printr-o integrală de convoluție:

$$R_{sr}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)\, \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, s(t+\tau-u)\, \mathrm{d}u$$

sau

$$R_{sr}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, \mathrm{d}u \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)\, s(t+\tau-u)\, \mathrm{d}t \tag{7.235}$$

însă

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)\, s(t+\tau-u)\, \mathrm{d}t = R_{ss}(\tau-u) \tag{7.236}$$

adică funcția de autocorelație a semnalului $s(t)$.
Înlocuind (7.236) în (7.235) se obține:

$$R_{sr}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, R_{ss}(\tau-u)\, \mathrm{d}u \tag{7.237}$$

Dacă semnalul aplicat la intrare este zgomot alb:

$$R_{ss}(\tau-u) = \frac{1}{2} N_0 \delta(\tau-u) \tag{7.238}$$

și înlocuind în (7.237) se obține:

$$R_{sr}(\tau) = \frac{1}{2} N_0 h(\tau)$$

respectiv

$$h(\tau) = \frac{2}{N_0} R_{rs}(\tau) \tag{7.239}$$

adică **funcția de pondere** *este egală cu funcția de corelație mutuală între intrare și ieșire, multiplicată cu o constantă.*

Față de metodele clasice de măsură, *această metodă are avantajul că nu introduce erori date de perturbații* (zgomot de rețea etc.) fiindcă acestea nu sînt corelate cu zgomotul alb aplicat la intrare.

7.18.2. Bandă echivalentă de zgomot

Banda echivalentă de zgomot *sau* **banda efectivă** $\Delta\omega$ este definită ca fiind *lărgimea de bandă a unui filtru ideal care transmite o putere egală cu puterea transmisă de filtrul real, dacă la intrare se aplică zgomot alb*

$$\Delta\omega = \frac{\int_0^\infty A^2(\omega)\,\mathrm{d}\omega}{A^2(\omega_0)} = \frac{2\pi B(0)}{N_0 A^2(\omega_0)}$$

unde $B(0)$ este valoarea în origine a funcției de autocorelație la ieșirea din filtrul real. Banda astfel definită diferă în general de lărgimea de bandă la 3 dB.

7.18.3. Medierea semnalelor aleatoare

Pentru a simplifica scrisul notăm cu $s(t) = \xi^{(k)}(t)$ o realizare particulară a unui semnal aleator.

Dacă timpul de integrare D este suficient de mare putem scrie aproximativ:

$$\widetilde{s(t)} \cong \frac{1}{D}\int_{t-D}^{t} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{7.240}$$

Referindu-ne la fig. (7.34) putem scrie

$$\widetilde{s(t)} \cong \frac{1}{D}\int_{t-D}^{t} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{D}\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{D}\int_{-\infty}^{t} s(\tau - D)\,\mathrm{d}\tau \tag{7.241}$$

sau

$$\widetilde{s(t)} \cong \frac{1}{D}\int_{-\infty}^{t} [s(\tau) - s(\tau - D)]\,\mathrm{d}\tau \tag{7.242}$$

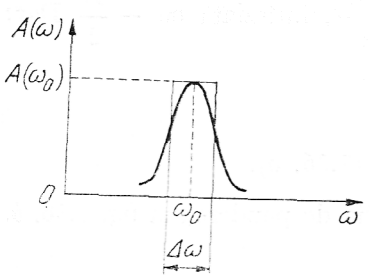


Fig. 7.33. Banda echivalentă de zgomot.

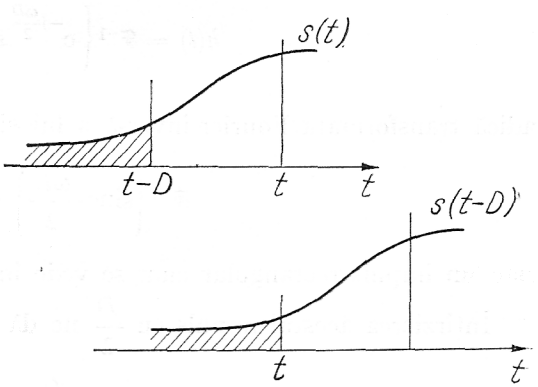


Fig. 7.34. Întîrzierea cu D a semnalului $s(t)$.

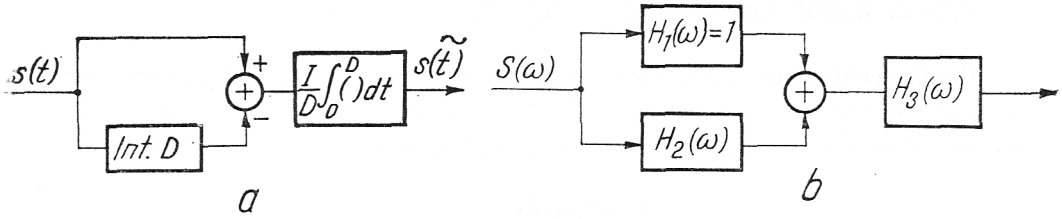


Fig. 7.35. Reprezentarea medierii în domeniul timp (*a*) și în domeniul frecvență (*b*).

În fig. 7.35,*a* este arătată realizarea acestei operații în domeniul timp, iar în fig. (7.35,*b*) în domeniul frecvență.

Semnalul întîrziat are o transformată Fourier:

$$\mathcal{F}\{-s(t-D)\} = -e^{-j\omega D}\mathcal{F}\{s(t)\} \tag{7.243}$$

deci:

$$H_2(\omega) = -e^{-j\omega D} \tag{7.244}$$

Operația de integrare este dată de:

$$H_3(\omega) = \frac{1}{D}\,\frac{1}{j\omega} = \frac{1}{j\omega D} \tag{7.245}$$

Funcția de transfer a filtrului de mediere este

$$H(\omega) = [H_1(\omega) + H_2(\omega)]\,H_3(\omega) \tag{7.246}$$

sau înlocuind:

$$H(\omega) = (1 - e^{-j\omega D})\frac{1}{j\omega D} = \frac{e^{-j\frac{\omega D}{2}}\left(e^{+j\frac{\omega D}{2}} - e^{-j\frac{\omega D}{2}}\right)}{j\omega D}$$

de unde:

$$H(\omega) = e^{-j\frac{\omega D}{2}}\,\mathrm{sinc}\frac{\omega D}{2} \tag{7.247}$$

Funcție de pondere a acestui filtru este

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-j\frac{\omega D}{2}}\,\mathrm{sinc}\frac{\omega D}{2}\right\} \tag{7.248}$$

adică transformata Fourier inversă a lui $\mathrm{sinc}\frac{\omega D}{2}$, întîrziată cu $-\frac{D}{2}$. Dar:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathrm{sinc}\frac{\omega D}{2}\right\} = a(t)$$

este un impuls rectangular cum se vede în fig. (7.36, *a*).

Întîrzierea acestui impuls cu $\frac{D}{2}$ ne dă funcția de pondere din fig. 7.36, *b*.

$$h(t) = a\left(t - \frac{D}{2}\right) \tag{7.249}$$

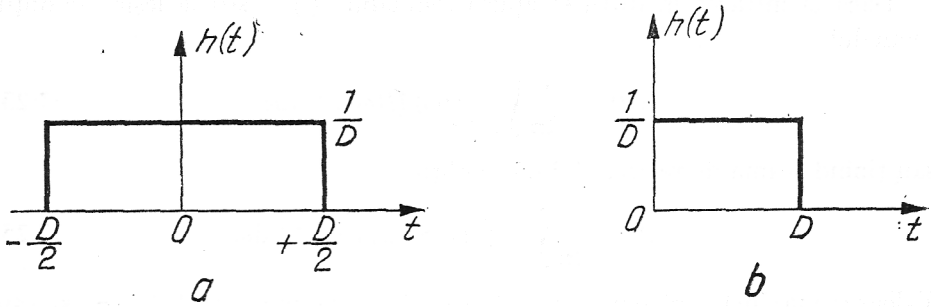


Fig. 7.36. Funcția de pondere a filtrului de mediere.

Această funcție de pondere este realizată de circuitele denumite *„zero hold"*, însă *toate sistemele RLC care au o funcție de pondere ce se aseamănă într-o măsură cît de mică cu* $h(t)$ *dat de* (7.249) *efectuează o oarecare mediere.* În această categorie intră circuitele de integrare *RC*, filtrele trece-jos etc.

7.18.4. Filtrul adaptat la forma semnalului

Se spune că un filtru este adaptat la forma semnalului $s(t)$ (fig. 7.37) sau pe scurt că este un filtru adaptat dacă funcția de pondere $h(t)$ este:

$$h(t) = ks[-(t-\tau_0)] \tag{7.250}$$

unde k și τ_0 sînt constante.

În cele ce urmează presupunem $k = 1$.

Funcția de transfer a filtrului adaptat este:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s[-(t-\tau_0)]\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{7.251}$$

sau

$$H(\omega) = e^{-j\omega\tau_0} S^*(\omega) \tag{7.252}$$

unde $S^*(\omega)$ este conjugata densității spectrale $S(\omega)$.

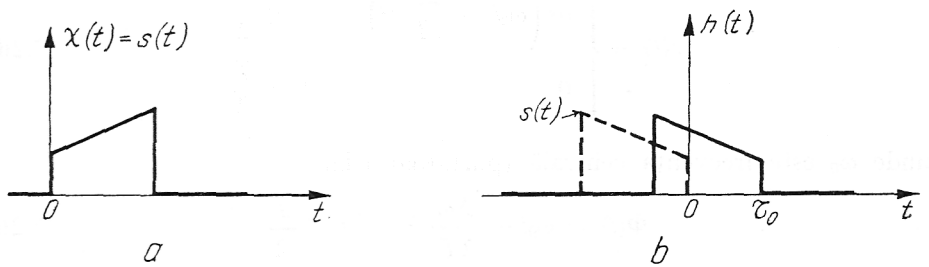


Fig. 7.37. Semnalul la intrare (*a*) și răspunsul la impulsul unitate (*b*). Filtru adaptat.

Dacă la intrarea în filtru se aplică semnalul $x(t) = s(t)$ la ieșire se obține semnalul:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{7.253}$$

sau ținînd seama de relația (7.252) se obține:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, S^*(\omega)\, e^{j\omega(t-\tau_0)}\, d\omega \tag{7.254}$$

Valoarea maximă a răspunsului $y(t)$ se obține la momentul $t = \tau_0$ și este:

$$y_{max} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\, S(\omega)\,|^2\, d\omega = E \tag{7.255}$$

E fiind energia semnalului.

Răspunsul filtrului dacă la intrare se aplică $s(t)$ este:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \tag{7.256}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, s(\tau - t + \tau_0)\, d\tau \tag{7.257}$$

respectiv

$$y(t) = R_{ss}(t-\tau_0) \tag{7.258}$$

adică ieșirea din filtru este egală cu funcția de autocorelație a semnalului $s(t)$, deci *filtrul adaptat face operația de autocorelație.*

Dacă la intrarea în filtru se aplică semnalul $x(t) = r(t)$ la ieșire se obține:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)\, s(\tau - t + \tau_0)\, d\tau \tag{7.259}$$

adică

$$y(t) = R_{sr}(t-\tau_0) \tag{7.260}$$

respectiv funcția de corelație mutuală între semnalele $s(t)$ și $r(t)$.

● **Filtru adoptat la semnalul „Chirp".** *Semnalul Chirp* este un *semnal modulat în amplitudine și în frecvență* (fig. 7.38) definit de:

$$v(t) = \begin{cases} \cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\Delta\omega}{2T}\, t^2\right) & |\, t\,| \leqslant \dfrac{T}{2} \\ 0 & |\, t\,| > \dfrac{T}{2} \end{cases} \tag{7.261}$$

unde ω_0 este frecvența centrală (purtătoare) iar

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2T}\, t^2 \qquad |\, t\,| \leqslant \frac{T}{2} \tag{7.262}$$

este faza instantanee

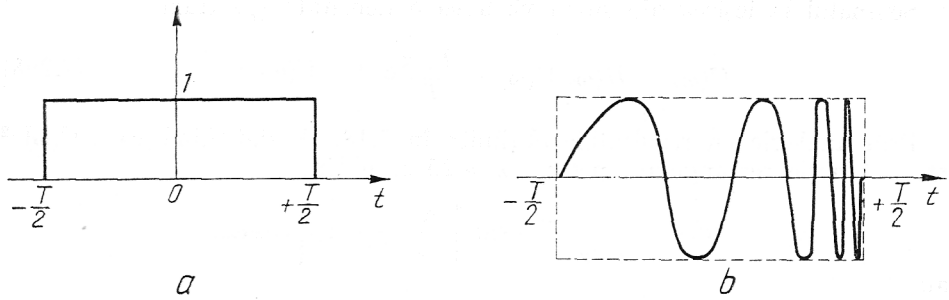


Fig. 7.38. Semnalul Chirp:
a — anvelope; *b* — desfășurarea în timp.

și:

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{T}\, t \qquad |t| \leqslant \frac{T}{2} \tag{7.263}$$

este frecvența instantanee (fig. 7.39).

Densitatea spectrală a semnalului Chirp este

$$V(\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2T}\, t^2\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, \mathrm{d}t \tag{7.264}$$

Calculul acestei integrale este dat în [13].

Dacă notăm cu α produsul durată lărgimea de bandă:

$$\alpha = \Delta f \cdot T = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\, T \tag{7.265}$$

atunci pentru $\alpha > 25$ se poate scrie aproximativ:

$$|V(\omega)| = \begin{cases} \dfrac{T}{2\sqrt{\alpha}} & \omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2} \leqslant \omega \leqslant \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & \text{în afară} \end{cases} \tag{7.266}$$

Funcția $|V(\omega)|$ pentru $\alpha > 25$ este reprezentată în fig. (7.40).

Filtrul adaptat la semnalul $v(t)$ are funcția de pondere:

$$H(\omega) = k\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau_0} V^*(\omega) \tag{7.267}$$

unde luăm $k = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{T}$ pentru ca modulul lui $H(\omega)$ să fie egal cu 1.

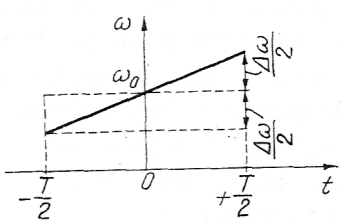


Fig. 7.39. Variația frecvenței semnalului Chirp.

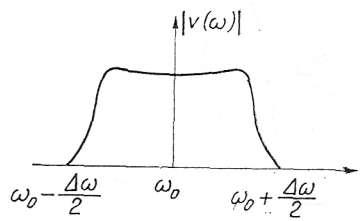


Fig. 7.40. Densitatea spectrală a semnalului Chirp.

Semnalul la ieșirea din filtru va avea o densitate spectrală

$$U(\omega) = H(\omega)\, V(\omega) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{T} e^{-j\omega\tau_0} |V(\omega)|^2 \tag{7.268}$$

Prin analogie cu rezultatele obținute în 7.18.1.3, dat fiind că $|V(\omega)|^2$ este o funcție rectangulară pentru $\alpha > 25$ se obține

$$u(t) = \frac{T}{2\sqrt{\alpha}} \frac{\Delta\omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta\omega}{2}(t-\tau_0)\right] \cos\omega_0 t$$

sau

$$u(t) = \sqrt{\alpha} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta\omega}{2}(t-\tau_0)\right] \cos\omega_0 t \tag{7.269}$$

Dacă ne referim la anvelopă, fiindcă aceasta ne interesează:

$$m(t) = \sqrt{\alpha} \operatorname{sinc}\left[\pi\Delta f(t-\tau_0)\right] \tag{7.270}$$

Valoarea de vîrf are loc la $t = \tau_0$ și este egală cu $\sqrt{\alpha}$.

Durata lobului principal (fig. 7.41) se consideră că este valoarea la care intensitatea semnalului a scăzut cu 4 dB. Această valoare este atinsă la momentele:

$$t' = \tau_0 \pm \frac{1}{2\Delta f}$$

Deci durata semnalului la ieșirea din filtrul adaptat este:

$$\Delta t = \tau_0 + \frac{1}{2\Delta f} - \left(\tau_0 - \frac{1}{2\Delta f}\right) = \frac{1}{\Delta f} \tag{7.271}$$

respectiv

$$\Delta t \Delta f = 1$$

unde

$$\Delta f = \frac{\alpha}{T}$$

În concluzie se poate spune că *dacă la intrarea în filtru avem un semnal de durată T și amplitudine 1, la ieșirea din filtrul adaptat se obține un semnal de durată $\Delta t = \frac{T}{\alpha}$ și de amplitudine $\sqrt{\alpha}$*, unde $\alpha = \Delta f T$ respectiv produsul bandă × durată la intrarea în filtru.

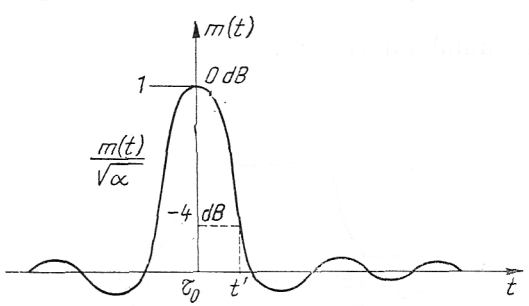


Fig. 7.41. Anvelopa răspunsului filtrului adaptat la semnalul Chirp.

Prin compresia care o realizează în domeniul timp, filtrul adaptat la semnalul chirp are aplicații în domeniul radarului, al sonarului și altele. Pentru a ajunge la distanțe mari, sau a pătrunde în medii cu pierderi mari, semnalul trebuie să aibă o energie mare, deci durată T mare. La recepție, pentru a avea rezoluție bună, este nevoie de semnale

cu o durată Δt mică, lucru care se realizează cu filtrul adaptat la semnalul chirp.

Această tehnică poate fi utilizată și în domeniul transmisiunilor de date în prezența unor perturbații puternice.

Filtrul adaptat la semnalul chirp este realizat cu circuit integrat cu o structură de filtru transversal.

7.18.5. Maximizarea raportului semnal/zgomot prin filtrare liniară

Să considerăm un sistem liniar cu funcția de transfer $H(\omega)$ la intrarea căruia se aplică semnalul util $x(t)$ plus perturbația $n(t)$ și la ieșire se obține un semnal util $y(t)$ și o perturbație $p(t)$ (fig. 7.42).

În absența perturbației la ieșire avem:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\, X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \tag{7.272}$$

unde $X(\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\}$

În absența semnalului util avem:

$$P(\omega) = |H(\omega)|^2 N(\omega) \tag{7.273}$$

unde $P(\omega)$ = D.S.P. a lui $p(t)$.

$N(\omega)$ = D.S.P. a lui $n(t)$

Puterea perturbației la ieșire este:

$$P_M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 N(\omega)\, d\omega \tag{7.274}$$

Dorim să maximizăm raportul:

$$\rho = \frac{|y(t_0)|^2}{P_M} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\, X(\omega)\, e^{j\omega t_0}\, d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 N(\omega)\, d\omega} \tag{7.275}$$

în funcție de $H(\omega)$, respectiv să găsim H_{opt}.

Apelăm la *inegalitatea lui Schwartz*:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) B^*(\omega)\, d\omega\right|^2 \leqslant \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |A(\omega)|^2\, d\omega\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |B(\omega)|^2\, d\omega\right] \tag{7.276}$$

unde avem egalitatea numai dacă $A(\omega) = KB(\omega)$, K fiind o constantă.

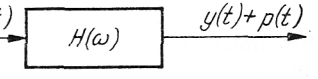


Fig. 7.42. Filtrare liniară.

Punem:

$$\left.\begin{aligned} A(\omega) &= H(\omega)N^{1/2}(\omega) \\ B^*(\omega) &= \frac{X(\omega)\,e^{j\omega t_0}}{N^{1/2}(\omega)} \\ B(\omega) &= \frac{X^*(\omega)\,e^{-j\omega t_0}}{N^{1/2}(\omega)} \end{aligned}\right\} \tag{7.277}$$

Înlocuind în (7.275) se obține

$$\rho = \frac{|\,y(t_0)\,|^2}{P_M} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\,B^*(\omega)\,d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\,A(\omega)\,|^2\,d\omega} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\,B(\omega)\,|^2\,d\omega \tag{7.278}$$

dacă $A(\omega) = KB(\omega)$ inegalitatea devine egalitate, respectiv raportul semnal perturbație ρ devine maxim și egal cu

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\,B(\omega)\,|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\,X(\omega)\,|^2}{N(\omega)}\,d\omega \tag{7.279}$$

Condiția $A(\omega) = KB(\omega)$ înseamnă:

$$H(\omega) = K\,\frac{X^*(\omega)\,e^{-j\omega t_0}}{N(\omega)} \tag{7.280}$$

Dacă perturbația la intrare este zgomot alb:

$$N(\omega) = \frac{1}{2}N_0 = K$$

K fiind constantă arbitrară, atunci

$$H(\omega) = X^*(\omega)\,e^{-j\omega t_0} \tag{7.281}$$

adică *filtrul care maximizează raportul semnal/perturbație*(la momentul t_0) *este filtrul adaptat la forma semnalului util* $x(t)$ *de la intrare.*

7.18.6. Funcția de coerență

În multe cazuri prezintă interes să știm în ce măsură semnalul $y(t)$ la ieșirea unui sistem liniar provine din semnalul $x(t)$ aplicat la intrare, luînd în considerare faptul că semnalul la ieșire poate să conțină și perturbații (care pot include și semnale utile din alte sisteme) (fig. 7.43). În acest scop se definește funcția de coerență:

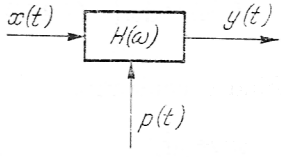


Fig. 7.43. Sistem liniar cu perturbații $p(t)$.

$$\Gamma^2_{xy}(\omega) = \frac{|\,q_{xy}(\omega)\,|^2}{q_x(\omega)\,q_y(\omega)} \tag{7.282}$$

unde: $q_{xy}(\omega)$ este D.S.P. de interacțiune;

$q_x(\omega)$ — D.S.P. a semnalului $x(t)$;

$q_y(\omega)$ — D.S.P. a semnalului $y(t)$.

Să considerăm cazul particular cînd nu avem perturbații $p(t) = 0$. În acest caz putem scrie:

$$q_{xy}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{X_T^{*(k)}(\omega) Y_T^{(k)}(\omega)}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{X^{*(k)}(\omega)\ H(\omega)\ X_T^{(k)}(\omega)}}{T} \tag{7.283}$$

sau

$$q_{xy}(\omega) = H(\omega)\, q_x(\omega) \tag{7.284}$$

iar:

$$q_y(\omega) = |\, H(\omega)\,|^2\, q_x(\omega) \tag{7.285}$$

Înlocuind în (7.282) se obține:

$$\Gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|\, H(\omega)\,|^2\, q_x^2(\omega)}{q_x(\omega)\,|\, H(\omega)\,|^2\, q_x(\omega)} = 1 \tag{7.286}$$

Conform așteptărilor, în *absența perturbațiilor funcția de coerență este egală cu 1 pentru toate frecvențele.*

În general, pentru unele domenii de frecvențe ea este mai mică decît 1, indicînd în acest fel că în acele domenii în semnalul $y(t)$ sînt și componente străine de semnalul de intrare $x(t)$.

Dacă funcția de coerență este nulă pentru orice ω, rezultă că și $p_{xy}(\omega)$ trebuie să fie nul pentru orice frecvență, deci și funcția de corelație mutuală care este transformata Fourier. În acest caz componentele lui $y(t)$ nu provin din $x(t)$, cele două semnale fiind ortogonale.

7.18.7. Kepstru

Denumirea de **kepstru** este utilizată în două accepțiuni diferite: *kepstru complex* și *kepstru de putere.*

„Kepstru complex" contrar numelui, *nu este o funcție complexă,* ci una reală, dar numele indică faptul că în definirea lui se pornește de la spectrul complex, fără să se piardă informația de fază, așa cum se pierde la kepstru de putere.

Din această cauză procesul prin care se obține kepstrul complex este reversibil, și deci este posibil să se revină la semnalul original după efectuarea unor operații de convoluție.

Să considerăm un semnal $x(t)$ de energie finită și:

$$\mathfrak{F}\{x(t)\} = X(\omega) = |\, X(\omega)\,|\, e^{j\Phi(\omega)} \tag{7.287}$$

Kepstrul complex este definit ca:

$$K_x(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{\ln X(\omega)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{\ln |\, X(\omega)\,| + j\Phi(\omega)\} \tag{7.288}$$

sau

$$K_x(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{\ln |\, X(\omega)\,|\} + \mathfrak{F}^{-1}\{j\Phi(\omega)\} \tag{7.289}$$

Noțiunea de kepstru este foarte utilă pentru a realiza operații de deconvoluție, fiindcă transformă operațiile de multiplicare în operații de adunare.

Astfel, în unele cazuri este necesar să determinăm semnalul $x(t)$ aplicat la intrarea unui sistem a cărui funcție de pondere este $h(t)$, dacă se cunoaște semnalul la ieșire $y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{7.290}$$

unde prin „$*$" s-a notat *produsul de convoluție.*

Deconvoluția se notează cu „$\overset{*}{*}$", respectiv

$$x(t) = y(t) \overset{*}{*} h(t) \tag{7.291}$$

Determinarea lui $h(t)$ poartă numele de *identificare a proceselor*

$$h(t) = y(t) \overset{*}{*} x(t) \tag{7.292}$$

Să considerăm kepstrul semnalului la ieșire

$$K_y(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{\ln | Y(\omega) |\} + \mathfrak{F}^{-1}\{j\Phi_y(\omega)\} \tag{7.293}$$

sau

$$K_y(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{\ln | X(\omega) |\} + \mathfrak{F}^{-1}\{\ln | H(\omega) |\} + \\ + \mathfrak{F}^{-1}\{j\Phi_x(\omega)\} + \mathfrak{F}^{-1}\{j\Phi_H(\omega)\} \tag{7.294}$$

unde

$$H(\omega) = | H(\omega) | e^{j\Phi_H(\omega)} = \mathfrak{F}\{h(t)\} \tag{7.295}$$

este funcția de transfer a sistemului.

Dacă cunoaștem kepstrul complex al sistemului de transmisiune

$$K_H(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{\ln | H(\omega) |\} + \mathfrak{F}^{-1}\{j\Phi_H(\omega)\} \tag{7.296}$$

atunci relația (7.294) devine:

$$K_y(\tau) = K_x(\tau) + K_H(\tau) \tag{7.297}$$

de unde:

$$K_x(\tau) = K_y(\tau) - K_H(\tau) \tag{7.298}$$

Cunoscînd astfel kepstrul $K_X(\tau)$ prin transformarea inversă se obține $x(t)$. În mod analog se obține $K_H(\tau)$.

Noțiunea de kepstru este utilă în diferite probleme de deconvoluție, în înlăturarea ecourilor, în analiza și sinteza semnalelor vorbirii, în analiza vibrațiilor etc.

În realizarea operațiilor mai sus amintite este utilă și noțiunea de *kepstru de putere*:

$$k_p(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{\log p(\omega)\} \tag{7.299}$$

unde $p(\omega)$ = D.S.P.

7.19. Perturbații

Perturbațiile sînt *semnale aleatoare care intervin în canal micșorînd capacitatea de transmisiune a acestuia.*

7.19.1. Clasificarea perturbațiilor

Perturbațiile pot fi clasificate în două clase mari: perturbații aditive și perturbații multiplicative.

Perturbații aditive. În acest caz semnalul și perturbația se însumează:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

unde

$n(t)$ este perturbația;
$s(t)$ — semnalul util;
$r(t)$ — semnalul recepționat, deformat de perturbații.

În categoria perturbațiilor aditive intră majoritatea perturbațiilor ce intervin în diferitele aplicații.

Perturbații multiplicative. În acest caz, semnalul și perturbația se multiplică:

$$r(t) = s(t) \cdot n(t) \tag{7.300}$$

Perturbațiile multiplicative apar dacă unul sau mai mulți din parametrii canalului de transmisiune variază în timp în mod aleator.

În canalele cu perturbații multiplicative apar, în general, și perturbații aditive. În acest caz, problema fiind foarte complexă, de obicei se tratează separat efectele celor două clase de perturbații.

7.19.2. Clasificarea perturbațiilor aditive

Perturbațiile aditive pot fi grupate în trei categorii: zgomote, diafonii și distorsiuni.

1. Zgomote se numesc acele *perturbații care nu sînt coherente cu nici unul din semnalele utile transmise.*

● *Zgomote ergodice* sînt perturbațiile reprezentate de procese ergodice. Ele sînt previzibile în medie, nu însă în detaliu.

● *Zgomote gaussiene* sînt zgomote avînd în orice moment o distribuție de probabilități normală, cu aceeași dispersie σ^2. Zgomotele gaussiene se mai numesc și zgomote de fluctuații. Zgomotul gaussian poate avea o densitate spectrală de putere constantă și în acest se numește *zgomot „alb"*.

Dacă densitatea spectrală de putere a zgomotului gaussian variază cu frecvența, se spune că apare *zgomot „colorat"*[1].

● *Zgomotele negaussiene* au o distribuție de probabilități diferită de cea normală.

Dacă densitatea spectrală de putere este constantă, zgomotul negaussian se numește „alb" iar dacă aceasta variază cu frecvența zgomotul se numește „colorat".

Clasificarea zgomotelor ergodice este următoarea:

Zgomot ergodic
- gaussian (fluctuații)
  - alb
  - colorat
- negaussian
  - alb
  - colorat

[1] Numirile de *alb* și *colorat* sînt luate prin analogie cu cazul radiațiilor luminoase, unde luminii albe îi corespunde un spectru constant, iar luminii colorate un spectru ce variază cu frecvența.

● *Zgomote neergodice* sînt perturbații ce nu pot fi caracterizate statistic de o singură realizare. Ele sînt:

— z g o m o t e n e e r g o d i c e r e g u l a t e, cînd pot fi reprezentate printr-o funcție periodică. În această categorie intră: zgomotul de sector, oscilații parazite la amplificatoare, zgomotul provocat de sistemele de aprindere ale motoarelor cu ardere internă etc.;

— z g o m o t e n e e r g o d i c e n e r e g u l a t e, cînd intervin în mod imprevizibil. În această categorie intră: perturbațiile provocate de descărcării atmosferice, comutări întîmplătoare de sarcini electrice etc.

2. Diafonii se numesc acele *perturbații care provin din semnalele utile ale altor canale.*

● *Diafonii inteligibile* sînt perturbații puternic coerente cu semnalele utile ale altor canale. În acest caz, perturbațiile sînt replica distorsionată, într-o măsură nu prea mare, a semnalelor utile din alte canale.

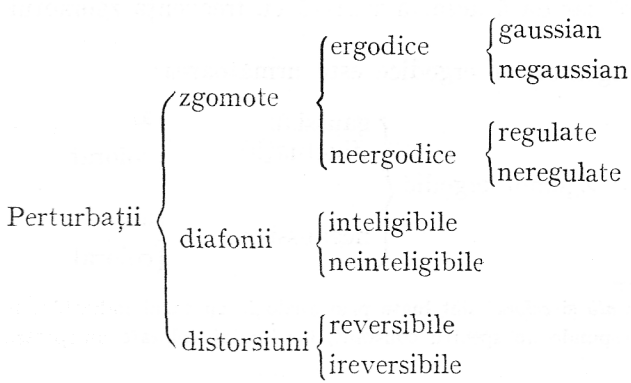
● *Diafonii neinteligibile* sînt perturbații coerente într-o măsură mai mică cu semnalele utile din alte canale, respectiv provin din acestea prin distorsionarea lor foarte puternică.

3. Distorsiuni sînt *perturbații coerente cu semnalul util din canalul considerat.*

● *Distorsiunile reversibile* sînt perturbații coherente cu semnalul util ce pot fi eliminate (teoretic cel puțin) trecînd semnalul printr-o rețea de corecție. Ele provin din transformările reversibile pe care le suferă semnalul. Aceste transformări fiind biunivoce, prin transformarea inversă distorsiunile pot fi înlăturate. În această categorie intră distorsiunile de frecvență, de fază de amplitudine etc. precum și distorsiunile date de variația unui parametru oarecare al canalului de transmisiune după o lege deterministă cunoscută.

● *Distorsiunile ireversibile* sînt perturbații provocate de o transformare neliniară univocă ce nu are pe tot domeniul de definiție o transformată inversă. În această categorie intră: distorsiunile de amplitudine produse de limitatoare, distorsiunile produse de reflexii etc., precum și distorsiunile date de variația aleatoare a unui parametru oarecare al canalului de transmisiune.

Clasificarea perturbațiilor este deci următoarea:



O altă clasificare este următoarea:

Perturbații { incoerente (zgomote) { zgomote ergodice; zgomote neergodice } ; coerente { distorsiuni; diafonii }

În paragrafele următoare se vor examina numai perturbațiile provocate de impulsuri și de fluctuații. Celelalte perturbații prezintă un interes secundar deoarece efectele lor pot fi reduse prin procedee relativ simple (filtrări, decuplări etc.).

7.19.3. Zgomotul de impulsuri și zgomotul de fluctuații

Zgomotul de impulsuri este caracterizat de faptul că *sursele acestui zgomot livrează energie nu în mod continuu, ci în „salturi" pe durată foarte scurtă.* Forma acestor impulsuri este foarte variată; dată fiind însă durata lor foarte scurtă, ele pot fi aproximate cu impulsuri rectangulare (fig. 7.44).

Dacă durata τ a impulsului este suficient de mică, astfel ca $\frac{2\pi}{\tau}$ să fie mult mai mare decît banda de trecere $\Delta\omega$ a receptorului, se poate considera că în interiorul acesteia spectrul este constant. În această situație, impulsul rectangular poate să fie substituit cu un impuls delta, cu un conținut ce dă aceeași energie din banda de trecere $\Delta\omega$, ca și impulsul rectangular ce aproximează perturbația.

Inspectînd spectrul impulsului rectangular din fig. 7.44 se poate trage concluzia că *la frecvențe foarte înalte, intensitatea perturbațiilor de impulsuri scade foarte mult,* astfel că *din punct de vedere practic în domeniul frecvențelor ultraînalte* (peste 150 MHz) *nu este cazul să se țină seama de aceste perturbații.*

Pentru caracterizarea statistică a zgomotului de impulsuri trebuie să se cunoască distribuția probabilității valorilor maxime, distribuția probabilității duratei impulsurilor și distribuția intervalelor de timp între impulsurile succesive. Pentru marea majoritate a cazurilor care interesează în aplicații, aceste distribuții nu sînt cunoscute.

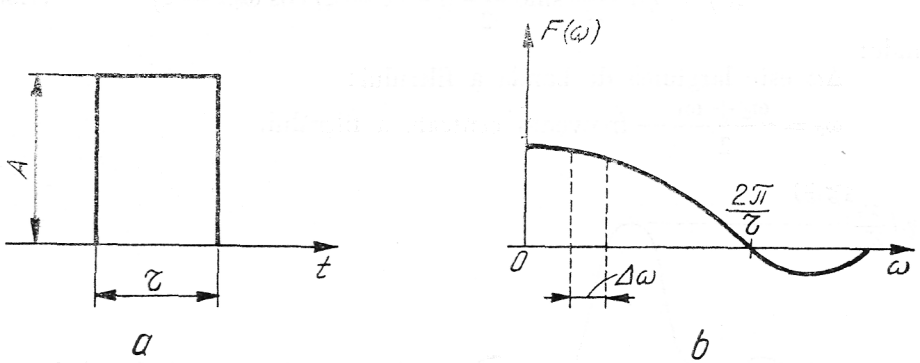


Fig. 7.44. Impuls rectangular (a) și densitatea sa spectrală (b).

7.19.3.1. Reprezentarea zgomotului de impulsuri

După cum s-a arătat, impulsurile perturbatoare pot fi considerate funcții delta, mai exact funcții delta de conținut η, care apar la momente $t = \xi$, respectiv

$$\zeta(t) = \eta\delta(t - \xi), \tag{7.301}$$

unde η și ξ sînt variabile aleatoare.

Spectrul impulsului reprezentat de relația (7.30) este constant și se întinde pe toată axa frecvențelor. Sistemul de transmisiune a informației este perturbat însă numai de acea porțiune din spectru care pătrunde în banda de trecere a sistemului. În legătură cu aceasta, trebuie considerate două cazuri:

1. *Intrarea receptorului este echivalentă cu un filtru trece-jos.* În acest caz la ieșirea din filtrul trece-jos, pe baza celor stabilite în 7.18.1.2, se obține perturbația:

$$\zeta(t) = \eta A \frac{\omega_1}{\pi} \operatorname{sinc} \omega_1(t - \tau - \xi) \tag{7.302}$$

unde:

A este modulul funcției de transfer a filtrului;
ω_1 — frecvența de tăiere a filtrului;
τ — timpul de întîrziere al filtrului.

Din punct de vedere practic, ceea ce deranjează este valoarea de vîrf în general mare pe care o are perturbația de impulsuri (fig. 7.45).

Valoarea maximă a perturbației dată de relația (7.303) are loc pentru:

$$t = \xi + \tau \tag{7.303}$$

și este:

$$\zeta_M = \eta A \frac{\omega_1}{\pi} \tag{7.304}$$

iar valoarea pătratică medie este:

$$\overline{\zeta_M^2} = \overline{\eta^2} A^2 \frac{\omega_1^2}{\pi^2} \tag{7.305}$$

unde $\overline{\eta^2}$ este valoarea patratică medie a conținutului impulsurilor perturbatoare.

2. *Intrarea receptorului este echivalentă cu un filtru trece-bandă.* În acest caz, la ieșirea din filtrul trece-bandă, pe baza celor stabilite în § 7.18.1.3, se obține perturbația:

$$\zeta(t) = \eta A \frac{\Delta\omega}{\pi} \operatorname{sinc} \frac{\Delta\omega}{2}(t - \tau - \xi) \cos \omega_0(t - \xi) \tag{7.306}$$

unde:

$\Delta\omega$ este lărgimea de bandă a filtrului;

$\omega_0 = \dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ — frecvența centrală a filtrului.

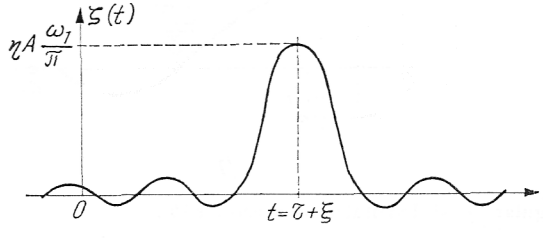


Fig. 7.45. Perturbația dată de impulsuri la ieșirea din filtrul trece-jos.

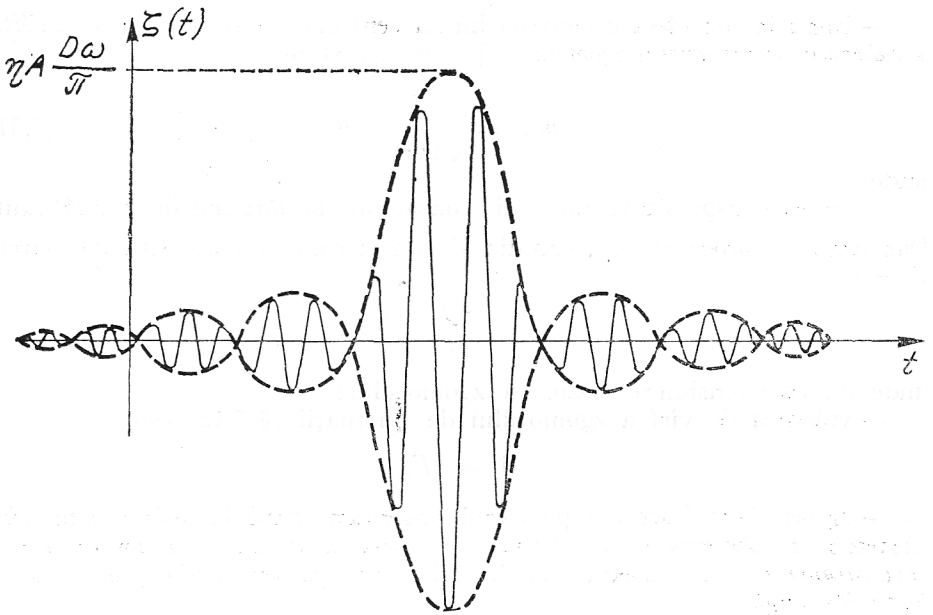


Fig. 7.46. Perturbația dată de impulsuri la ieșirea din filtrul trece-bandă.

Valoarea maximă a perturbației dată de relația (7.306) are loc (fig. 7.46) pentru:

$$t = \xi + \tau$$

și are valoarea:

$$\zeta_M = \eta_i A \frac{\Delta\omega}{\pi} \tag{7.307}$$

sau considerînd valoarea patratică medie:

$$\overline{\zeta_M^2} = \overline{\eta_i^2} A^2 \frac{\Delta\omega^2}{\pi^2} \tag{7.308}$$

7.19.3.2. Reprezentarea zgomotului de fluctuații

Zgomotul de fluctuații poate fi considerat ca fiind format din *însumarea unui număr foarte mare de perturbații de impulsuri de energie foarte mică* (fenomene de agitație termică în rezistențe, *deplasările aleatoare ale electronilor în dispozitivele semiconductoare etc.*). El poate fi reprezentat de expresia:

$$\xi(t) = \sum_k \Delta\eta_k \delta(t - \xi_k) \tag{7.309}$$

unde $\Delta\eta_k$ este conținutul impulsurilor elementare;
ξ_k — momentul de apariție a lor.

Se consideră că valoarea medie a V.A. $\Delta\eta_k$ este nulă $\overline{\Delta\eta_k} = 0$.

Ținînd seama de structura zgomotelor de fluctuații (7.309) se poate spune că:

— *densitatea spectrală de putere a zgomotului este constantă în întreaga bandă de frecvențe:*

$$q(\omega) = \frac{1}{2} N_0;$$

— luînd în considerare teorema limită centrală, *densitatea de probabilitate a valorilor instantanee a zgomotului* $\xi(t)$ *este gaussiană*

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{7.310}$$

unde:

σ^2 este dispersia zgomotului, considerat de lărgime de bandă finită. Dat fiind că procesul este ergodic și considerînd o rezistență de sarcină $R = 1$

$$\sigma^2 = \frac{E_{ef}^2}{R} = E_{ef}^2$$

unde E_{ef} este tensiunea eficace a zgomotului;

— valoarea de vîrf a zgomotului de fluctuații (§ 7.12) este

$$V = 4E_{ef}$$

— *zgomotul de fluctuații* pe care-l observăm, fiind la ieșirea unui filtru (sistemul de observare) *este format din suma unor fazori cu amplitudine și fază aleatoare și* în consecință (§ 7.8.2.2.) *anvelopa semnalului* ρ *are o distribuție Rayleigh*

$$w(\rho) = \frac{2\rho}{\sigma_\rho^2} e^{-\frac{\rho^2}{\sigma_\rho^2}}$$

unde $\sigma_\rho^2 = 2\sigma^2$, iar faza are o distribuție uniformă

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

Pentru a demonstra că anvelopa $\alpha(t)$ a zgomotului de fluctuații $\xi(t)$ are o distribuție Rayleigh, facem apel la noțiunea de semnal analitic:

$$\zeta(t)) = \xi(t) + j\mathcal{H}\{\xi(t)\} = \xi(t) + j\eta(t) = \alpha(t)\, e^{j\varphi(t)} \tag{7.311}$$

unde:

$$\xi(t) = \alpha(t) \cos \varphi(t); \tag{7.312}$$

iar:

$$\eta(t) = \mathcal{H}\{\xi(t)\} = \frac{1}{\pi t} * \xi(t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi(\tau)}{t - \tau} d\tau \tag{7.313}$$

este transformata Hilbert a semnalului $\xi(t)$ ($\mathcal{R}$ însemnînd evaluarea eliminînd punctul $\tau = t$).

$$\alpha(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}$$

este anvelopa semnalului care are următoarele proprietăți:

— anvelopa nu intersectează niciodată semnalul $|\alpha(t)| \geqslant \xi(t)$;

— la momentele cînd $\eta(t_i) = 0$

$$\alpha(t_i) = \xi(t_i) \quad \text{și} \quad \left.\frac{d\alpha(t)}{dt}\right|_{t=t_i} = \left.\frac{d\xi(t)}{dt}\right|_{t=t_i}$$

adică anvelopa și semnalul au aceeași tangentă în momentele de egalitate (rezultă din ridicarea la pătrat a relației (7.311).

Pentru ca anvelopa să aibă o distribuție Rayleigh, în conformitate cu § 7.8.2.2. trebuie ca:

a. $\xi(t)$ și $\eta(t)$ să fie procese gaussiene;

b. variabilele aleatoare $\xi(t_i)$ și $\eta(t_i)$ să fie independente;

c. variabilele aleatoare $\xi(t_i)$ și $\eta(t_i)$ să aibă aceeași dispersie.

● Condiția (*a*) este îndeplinită fiindcă $\eta(t)$ se obține din $\xi(t)$ printr-o transformare liniară (convoluție) echivalentă cu trecerea lui $\xi(t)$ printr-un filtru cu funcția de pondere $h(t) = \dfrac{1}{\pi t}$, respectiv funcția de transfer $H(\omega) = \mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{\pi t}\right\} = -\mathrm{j}\, sgn\,(\omega)$.

● Pentru a arăta că V.A. $\xi(t_i)$ și $\eta(t_i)$ sînt independente evaluăm media:

$$\overline{\xi(t_i)\,\eta(t_i)} = \frac{1}{\pi}\,\overline{\xi(t_i)\,\mathcal{R}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi(\tau)}{t_i-\tau}\,\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\pi}\,\mathcal{R}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\xi(t_i)\,\xi(\tau)}}{t_i-\tau}\,\mathrm{d}\tau \qquad (7.314)$$

Dar $\overline{\xi(t_i)\,\xi(\tau)}$ este funcția de autocorelație a zgomotului de fluctuații, care pentru lărgimi de bandă foarte mari poate să fie asimilat cu un semnal aleator pur, respectiv funcția lui de autocorelație poate fi aproximată cu:

$$\overline{\xi(t_i)\,\xi(\tau)} = \frac{1}{2}\,N_0\delta(t_i-\tau) \qquad (7.315)$$

Înlocuind în (7.314) se obține:

$$\overline{\xi(t_i)\,\eta(t_i)} = \frac{N_0}{2\pi}\,\mathcal{R}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(t_i-\tau)}{t_i-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{N_0}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{t_i-\xi}\frac{\delta(t_i-\tau)}{t_i-\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_i+\varepsilon}^{\infty}\frac{\delta(t_i-\tau)}{t_i-\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] = 0$$

fiindcă punctul $\tau = t_i$ pentru care $\delta(t_i-\tau)$ devine infinit a fost eliminat prin-procedeul de integrare care definește transformata Hilbert.

● Condiția (*c*) este îndeplinită fiindcă densitățile spectrale de putere sînt egale:

$$q_\eta(\omega) = |\,H(\omega)\,|^2\, q_\xi(\omega) = q_\xi(\omega)$$

unde $H(\omega) = -\mathrm{j}\, sgn\,(\omega)$.

Cea mai importantă sursă de fluctuație este agitația termică în rezistoare.

7.19.3.3. Zgomotul de agitație termică

Agitația termică a electronilor liberi dă naștere la zgomot de fluctuații care apare la bornele rezistenței.

Pentru a studia efectul zgomotului de agitație termică este necesară introducerea unui *circuit echivalent*. Acesta este *format* dintr-o *sursă de zgomot*, în care se concentrează tot zgomotul produs de rezistență și de o *rezistență fără zgomot* (fig. 7.47).

În cazul circuitului echivalent cu generator de tensiune constantă, valoarea tensiunii acestuia este dată de formula lui Nyquist:

$$E_{cf}^2 = 4kTR(f_2 - f_1) \qquad (7.316)$$

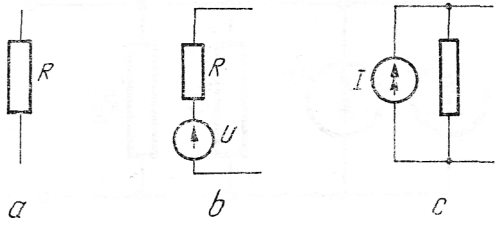


Fig. 7.47. Circuite echivalente.

unde:

E_{ef} — este tensiunea eficace de zgomot:

k — constanta lui Boltzman ($k = 1{,}37 \times 10^{-23}$ W · s · grad^{-1});

T — temperatura absolută;

$(f_2 - f_1)$ — lărgimea de bandă considerată.

În cazul circuitului cu generator de curent constant, valoarea curentului acestuia este dată de relația:

$$I_{ef}^2 = 4kTG(f_2 - f_1) \tag{7.317}$$

unde G este conductanța $G = \frac{1}{R}$.

Dacă două rezistențe sînt conectate în serie și se găsesc la aceeași temperatură (fig. 7.48), tensiunea de zgomot rezultantă se obține adunînd patratic cele două tensiuni, deoarece sursele E_1 și E_2 sînt independente:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2$$

sau: (7.318)

$$E^2 = 4kT(R_1 + R_2)(f_2 - f_1) = 4kTR(f_2 - f_1) \tag{7.319}$$

Dacă rezistențele sînt conectate în paralel (fig. 7.49) se obține:

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 \tag{7.320}$$

sau:

$$I^2 = 4kT(G_1 + G_2)(f_2 - f_1) = 4kTG(f_2 - f_1) \tag{7.321}$$

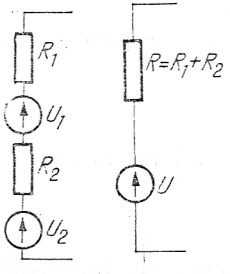


Fig. 7.48. Rezistențe în serie.

unde:

$$G_1 = \frac{1}{R_1}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2}$$

$$G = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

Tensiunea de zgomot la patrat la bornele celor două rezistențe este:

$$E^2 = R^2 I^2 = R^2 4kTG(f_2 - f_1) = 4kTR(f_2 - f_1).$$

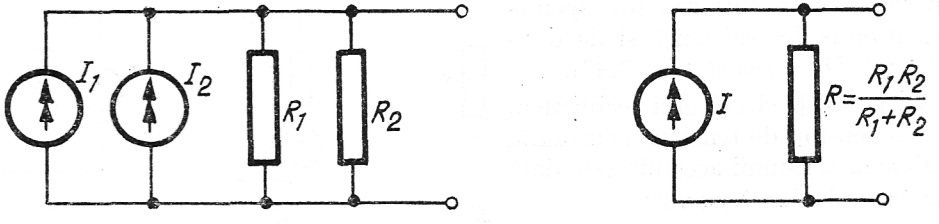


Fig. 7.49. Rezistențe în paralel.

Dacă între bornele la care trebuie să se evalueze zgomotul apar și componente reactive (fig. 7.50) va trebui evaluat zgomotul pentru fiecare bandă de frecvență infinit mică df și adunate patratic rezultatele.

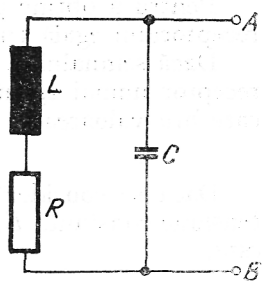


Fig. 7.50. Circuit cu componente reactive.

Dacă impedanța între punctele A și B este:

$$Z_{AB} = R_{AB} + \mathrm{j}X_{AB}$$

unde R_{AB} și X_{AB} sînt funcții de frecvență, zgomotul la borne, în banda de frecvențe $f_2 - f_1$, este:

$$E_{AB}^2 = 4kT\int_{f_1}^{f_2} R_{AB}\,df \qquad (7.322)$$

În general, *orice elemente capabile să disipe energie*, cum ar fi rezistențele, care transformă energia electrică în căldură în mod ireversibil, sau antenele care radiază energie fără ca aceasta să mai poată reveni în circuit — *sînt surse de zgomot de agitație termică.*

7.19.3.4. Factorul de zgomot

Zgomotele care perturbă transmisiunea informației sînt produse în general în canalul de transmisiune sau în primele etaje ale receptorului, unde nivelul semnalului util este mic. Zgomotul propriu al receptorului este produs de *agitația termică* din rezistențe și de *suflul tuburilor electronice* sau de *elementele semiconductoare* utilizate.

Zgomotul tuburilor sau al semiconductoarelor este tot zgomot gaussian însă colorat. Dacă lărgimea de bandă a receptorului este relativ mică, el poate fi considerat zgomot alb.

Factorul care limitează posibilitatea receptorului de a recepționa semnale slabe este **zgomotul.** În absența zgomotului s-ar putea realiza fără dificultăți principale amplificări oricît de mari, astfel încît să se poată recepționa semnale oricît de slabe. În acest caz, sensibilitatea receptorului ar depinde numai de amplificarea lui. În cazurile în care semnalul este mult mai mare decît zgomotul propriu al receptorului, sensibilitatea este o măsură a amplificării acestuia (receptoarele de radio obișnuite UL, UM, US).

În general, din motive economice se caută ca la emisie să se lucreze cu puteri mai mici, iar la recepție trebuie luate toate măsurile ca receptorul să fie capabil să recepționeze semnale cît mai slabe.

Cu cît zgomotul propriu al receptorului este mai mic, cu atît el va putea recepționa semnale mai slabe. Rezultă că *receptorul va fi cu atît mai sensibil cu cît zgomotul propriu va fi mai mic.*

Dacă zgomotul propriu este mai mare decît semnalul, oricît de mare ar fi amplificarea, semnalul nu va putea fi recepționat.

Se consideră că la intrarea în receptor este conectată sursa de semnale (antena sau cablul de transmisiune — fig. 7.51) care se figurează sub forma unui generator echivalent, de rezistență internă R_i și de tensiune constantă E_{ANT}.

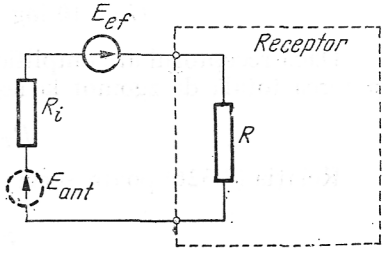


Fig. 7.51. Circuit echivalent de zgomot.

Pentru a obține puterea maximă în receptor se face rezistența internă a receptorului egală cu cea a sursei $R = R_i$.

Dacă semnalul la intrare este nul ($E_{ANT} = 0$) sursa va debita la intrarea în receptor numai zgomot de agitație termică produs în rezistența internă R_i, care are valoarea:

$$E_{ef}^2 = 4kTR_i(f_2 - f_1).$$

Dacă se consideră acest zgomot ca fiind concentrat într-un generator de tensiune constantă E_{ef} (fig. 7.51, *b*), puterea de zgomot dată de această sursă este:

$$\frac{E_{ef}^2}{R_i + R} = \frac{E_{ef}^2}{2R}$$

Din această putere, jumătate este disipată în rezistența proprie (internă), iar jumătate este transmisă receptorului, disipîndu-se în rezistența R. Deci puterea de zgomot introdusă de sursă în receptor este:

$$p = \frac{E_{ef}^2}{4R} = kT(f_2 - f_1) \tag{7.323}$$

Rezultatul este interesant prin faptul că această putere de zgomot este independentă de rezistența internă a sursei, cu condiția ca să existe adaptare ($R = R_i$).

În acest caz, presupunînd un receptor ideal fără zgomot propriu, la ieșirea lui va apare totuși un zgomot și anume cel introdus de sursă (considerînd amplificarea receptorului egală cu unitatea).

De aici se poate trage concluzia că *limita inferioară pentru puterea de zgomot la ieșirea din receptor considerat de amplificare 1 este* $kT(f_2 - f_1)$.

Pentru a putea compara diferitele tipuri de receptoare (care au lărgimi de bandă diferite) din punctul de vedere al zgomotului, se evaluează *zgomotul pe lărgimea de bandă unitate* $f_2 - f_1 = 1$.

În acest caz kT reprezintă cea mai mică putere de zgomot (pe unitatea de lărgime de bandă) care poate fi obținută și anume în cazul receptorului ideal.

Se alege această putere (kT) ca unitate pentru măsura puterii P de zgomot la intrarea în receptorul real și se definește *factorul de zgomot al receptorului* prin raportul:

$$F = \frac{P}{kT} \tag{7.324}$$

Cu cît factorul de zgomot F este mai mare, cu atît receptorul va fi mai puțin sensibil, fiindcă zgomotul propriu P va fi mai mare.

Uneori factorul de zgomot se exprimă în decibeli:

$$G = 10 \log F = 10 \log P - 10 \log kT \tag{7.325}$$

Dacă receptorul are amplificarea de intrare A și lărgimea de bandă $(f_2 - f_1)$ puterea totală de zgomot la ieșire este:

$$P_T = kT\,FA(f_2 - f_1). \tag{7.326}$$

Relația (7.326) poate servi ca definiție echivalentă a factorului de zgomot:

$$F = \frac{P_T}{kTA(f_2 - f_1)} \tag{7.327}$$

7.20. Procese aleatoare discrete

În conformitate cu §7. 2 **procesul aleator discret** $\xi(t)$ este un *semnal aleator definit pe întreaga axă a timpului, care nu poate lua decît valori discrete.* În cele ce urmează considerăm că procesul aleator discret este staționar (v. § 7.4).

Pentru a putea utiliza rezultatele obținute în cazul semnalelor aleatoare continue, vom defini și pentru procesele aleatoare discrete, respectiv pentru variabilele aleatoare discrete, o densitate de probabilitate.

În acest scop să considerăm funcția de repartiție de ordinul întîi a unei V.A. discretă:

$$[\xi(t_1)] = [x_1 x_2 \dots x_n] \tag{7.328}$$

$$F(x) = \sum_{x_i \leqslant x} P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\, u(x - x_i) \tag{7.329}$$

unde:

$$P(x_i) = P\{\xi(t_1) = x_i\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

iar $u(x - x_i)$ este funcția treaptă unitate.

Densitatea de probabilitate este prin definiție:

$$w(x) \triangleq \frac{dF(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\,\delta(x - x_i) \tag{7.330}$$

unde $\delta(x - x_i)$ este funcția δ Dirac.

Funcția de repartiție de ordinul doi este:

$$F_2(x_1, x_2;\, t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) \leqslant x_1;\, \xi(t_2) \leqslant x_2\}$$

$$F_2(x_1, x_2;\, t_1, t_2) = \sum_{x_{1i} \leqslant x_1} \sum_{x_{2j} \leqslant x_2} P_2(x_{1i}, x_{2j}) \tag{7.331}$$

iar densitatea de probabilitate de ordinul doi este:

$$w_2(x_1, x_2;\, t_1, t_2) = \sum_i \sum_j P_2(x_{1i}, x_{2j};\, t_1, t_2)\, \delta(x_1 - x_{1i}, x_2 - x_{2j})$$

unde $\delta(x_1 - x_{1i}, x_2 - x_{2j})$ este funcția δ Dirac, bidimensională.
Sau fiindcă procesul este staționar:

$$w_2(x_1, x_2;\, \tau) = \sum_i \sum_j P_2(x_{1i}, x_{2j};\, \tau)\,\delta(x_1 - x_{1i}, x_2 - x_{2j}) \tag{7.332}$$

unde $\tau = t_2 - t_1$.

În studiul proceselor aleatoare discrete un rol important îl are funcția de autocorelație, care poate fi dedusă ca un caz particular al funcției de autocorelație a semnalelor aleatoare continue, dată de relația (7.7);

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2;\, \tau)\, dx_1\, dx_2 \tag{7.333}$$

Înlocuind relația (7.332) în relația (7.333) se obține:

$$B(\tau) = \sum_i \sum_j x_{1i} x_{2j} P_2(x_{1i}, x_{1j}, \tau) \tag{7.334}$$

Dacă procesul este ergodic:

$$B(\tau) = R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \xi^{(k)}(t)\, \xi^{(k)}(t+\tau)\, dt \tag{7.335}$$

Dintre semnalele aleatoare discrete, cel mai des utilizat este semnalul binar, unde $n = 2$.

7.20.1. Semnalul aleator binar

Acest proces aleator discret este format dintr-o succesiune de impulsuri rectangulare de durată a a căror amplitudine poate lua numai două valori (fig. 7.52).

Fără a restrînge generalitatea problemei, putem considera că aceste valori sînt $+1$ și -1.

Expresia acestui semnal este:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k p(t - ka) \tag{7.336}$$

unde:

$p(t - ka)$ este un semnal rectangular de durată a și de amplitudine 1, decalat cu ka față de origine (aleasă arbitrar).

η_k sînt V.A. discrete care pot lua cu aceeași probabilitate valorile ± 1.

7.20.1.1. Densitatea spectrală de putere

Pentru evaluarea D.S.P procedăm ca și în cazul semnalelor continui considerînd semnalul trunchiat:

$$\xi_N(t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{N/2} \eta_k p(t - ka) \tag{7.337}$$

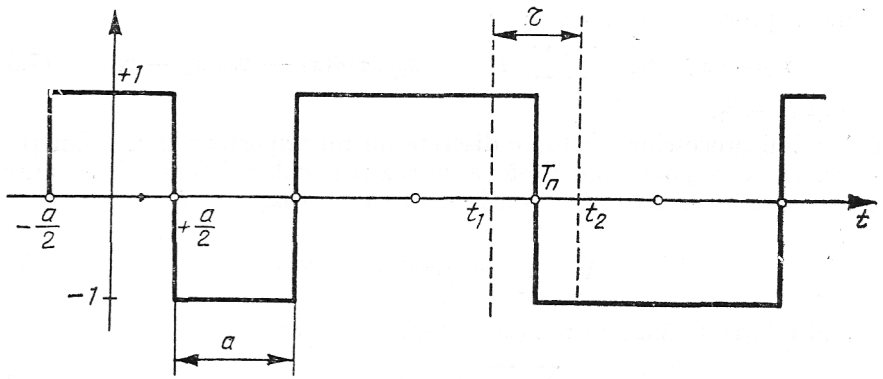


Fig. 7.52. Semnal binar.

a cărui transformată Fourier este:

$$X_N(\omega) = P(\omega) \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{N/2} \eta_k \, e^{-j\omega ka} \tag{7.338}$$

unde

$$P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\} = a \, \text{sinc} \frac{\omega a}{2} \tag{7.339}$$

Conjugata densității spectrale este:

$$X_N^*(\omega) = P^*(\omega) \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \eta_k \, e^{j\omega ka} \tag{7.340}$$

Analog cazului continuu (7.95) D.S.P. în cazul discret poate fi definită:

$$q(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{\overline{|X_N(\omega)|^2}}{Na} \tag{7.341}$$

unde

$$\overline{|X_N(\omega)|^2} = \overline{X_N(\omega) X_N^*(\omega)} = |P(\omega)|^2 \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \overline{\eta_k \eta_l} \, e^{j\omega a(k-l)} \tag{7.342}$$

Variabilele discrete η_k, η_l sînt independente și au valoarea medie nulă:

$$\overline{\eta_k \eta_l} = \overline{\eta_k}\,\overline{\eta_l} = 0 \quad \text{pt. } k \neq l$$

și

$$\overline{\eta_k \eta_l} = \overline{\eta_k^2} = \sigma^2 = (1)^2 \frac{1}{2} + (-1)^2 \frac{1}{2} = 1 \quad \text{pt } k = l$$

Înlocuind în (7.342) se obține

$$\overline{X_N(\omega)^2} = N |P(\omega)|^2 \tag{7.343}$$

Introducînd în (7.341) rezultă:

$$q(\omega) = \frac{1}{a} |P(\omega)|^2$$

respectiv ținînd seama de (7.339) se obține:

$$q(\omega) = a \, \text{sinc}^2 \frac{\omega a}{2} \tag{7.344}$$

Această funcție este reprezentată în fig. 7.53. Din relația (7.344) rezultă că anularea lobului principal are loc pentru $\frac{\omega a}{2} = \pi$, respectiv pentru $\omega = \frac{2\pi}{a}$. *Dacă debitul de informație este mare*, atunci a este mic și ca urmare, *lărgimea de bandă ocupată de semnal este mare.*

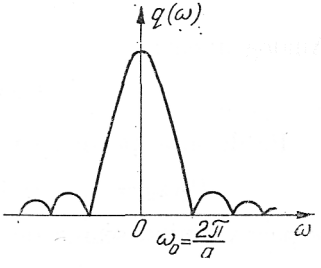


Fig. 7.53. Densitatea spectrală de putere.

7.20.1.2. **Funcția de autocorelație**

Pentru calculul funcției de autocorelație ne vom referi la relația (7.334) care pentru cazul binar devine:

$$B(\tau) = x_{11}x_{21}P_2(x_{11}, x_{21}; t_1, t_2) + x_{11}x_{22}P_2(x_{11}, x_{22}; t_1, t_2) + \\ + x_{12}x_{21}P_2(x_{12}, x_{21}; t_1, t_2) + x_{12}x_{22}P_2(x_{12}, x_{22}; t_1, t_2) \quad (7.345)$$

Ținînd seama de valorile numerice:

$$x_{11} = +1, \quad x_{12} = -1 \quad \text{și} \quad x_{21} = +1, \quad x_{22} = -1 \text{ se obține}$$

$$B(\tau) = P_2(1, 1; t_1, t_2) - P_2(1, -1; t_1t_2) - P_2(-1,1; t_1, t_2) + \\ + P_2(-1, -1; t_1, t_2) \quad (7.346)$$

Urmează să evaluăm aceste probabilități de ordinul doi.

Numim **noduri** *punctele* T_n *unde pot avea loc tranziții de la valoarea* -1 la $+1$ *sau invers* (fig. 7-52).

Nodurile se succed regulat la intervale a, însă nu în fiecare nod are loc o tranziție.

Un nod poate să apară cu aceeași probabilitate în oricare punct al intervalului $\tau = t_2 - t_1$, și apare în mod sigur în oricare interval de durată a sau mai mare.

Vom lua în considerare două cazuri:

- **Cazul în care** $\tau < a$.

Apariția unui nod este o V.A cu o distribuție uniformă, care ia o valoare pe care o notăm cu T_n:

$$P\{t_1 \leqslant T_n \leqslant t_2\} = \frac{t_2 - t_1}{a} = \frac{\tau}{a} \quad (7.347)$$

Probabilitatea ca într-un nod să aibă loc o tranziție este $\frac{1}{2}$, respectiv:

$$P_{11}(x_1 = 1; t_1) = P_{11}\left(x_1 = -1; t_1 = \frac{1}{2}\right) \quad (7.348)$$

Probabilitatea condiționată ca la momentul t_2 să avem $x_2 = -1$, dacă la t_1 am avut $x_1 = 1$, este:

$P_2(x_2 = -1/x_1 = 1; t_2, t_1)$ = probabilitatea ca în intervalul t_2, t_1 să apară un nod multiplicată cu probabilitatea ca în acest nod să apară o tranziție.

$$P_2(x_2 = -1/x_1 = 1; t_2, t_1) = \frac{\tau}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{\tau}{2a} \quad (7.349)$$

Analog avem:

$$P_2(x_2 = 1/x_1 = -1; t_2, t_1) = \frac{\tau}{2a} \quad (7.350)$$

Pe de altă parte avem:

$$P_2(x_2 = 1/x_1 = 1; t_2, t_1) = 1 - P_2(x_2 = -1/x_1 = 1; t_2, t_1)$$

respectiv ținînd seama de (7.350):

$$P_2(x_2 = 1/x_1 = 1; t_2, t_1) = 1 - \frac{\tau}{2a} \quad (7.351)$$

Analog avem

$$P_2(x_2 = -1/x_1 = -1\,;\, t_2, t_1) = 1 - \frac{\tau}{2a} \tag{7.352}$$

Ținînd seama de probabilitățile de mai sus, putem calcula probabilitățile care intervin în expresia funcției de autocorelație:

$$P_2(1,\ 1\,;\, t_1, t_2) = P_{11}(1\,;\, t_1)\ P_2(x_2 = 1/x_1 = 1\,;\, t_2, t_1)$$

Ținînd seama de (7.348) și (7.351) avem:

$$P_2(1,\ 1\,;\, t_1, t_2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\tau}{2a}\right) \tag{7.353}$$

În același mod

$$P_2(1, -1\,;\, t_1, t_2) = P_{11}(1\,;\, t_1)\ P_2(x_2 = -1/x_1 = 1\,;\, t_2, t_1)$$

$$P_2(1, -1\,;\, t_1, t_2) = \frac{1}{2}\ \frac{\tau}{2a} = \frac{\tau}{4a} \tag{7.354}$$

$$P_2(-1,\ 1\,;\, t_1, t_2) = P_{11}(-1\,;\, t_1)\ P_2(x_2 = 1/x_1 = -1\,;\, t_2, t_1)$$

$$P_2(-1,\ 1\,;\, t_1, t_2) = \frac{1}{2}\ \frac{\tau}{2a} = \frac{\tau}{4a} \tag{7.355}$$

și în fine:

$$P_2(-1, -1\,;\, t_1, t_2) = P_{11}(-1\,;\, t_1)\ P_2(x_2 = -1/x_1 = -1\,;\, t_2, t_1)$$

$$P_2(-1, -1\,;\, t_1, t_2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\tau}{2a}\right) \tag{7.356}$$

Înlocuind (7.353, 354, 355, 356) în (7.346) rezultă:

$$B(\tau) = 1 - \frac{\tau}{a} \qquad \text{sau fiindcă } B(\tau) = B(-\tau):$$

$$B(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{a} \qquad \text{pentru} \qquad \tau < a \tag{7.357}$$

● **Cazul în care $\tau \geqslant a$**

Dacă $\tau \geqslant a$, în mod cert în intervalul τ apare cel puțin un nod.

Să analizăm ce se întîmplă de la momentul t_1. Fiindcă $\tau \geqslant 0$, rezultă că pînă la momentul t_2 în mod cert apare un nod unde cu aceeași probabilitate poate să aibă loc o tranziție sau să nu aibă loc. Rezultă că valoarea semnalului la momentul t_2 nu depinde de valoarea avută la momentul t_1, adică:

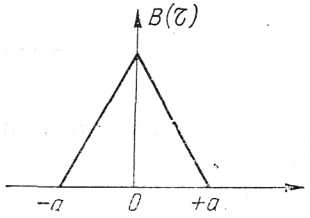
$$P_2(1,\ 1\,;\, t_1, t_2) = P_{11}(x_1 = 1\,;\, t_1)\ P_{12}(x_2 = 1\,;\, t_2) = \frac{1}{4}$$

și la fel celelalte probabilități:

$$P_2(1, -1\,;\, t_1, t_2) = P_2(-1,\ 1\,;\, t_1, t_2) = P_2(-1, -1\,;\, t_1, t_2) = \frac{1}{4}$$

Înlocuind aceste valori în (7.346) se obține:

$$B(\tau) = 0 \qquad \text{pt. } \tau \geqslant a$$



Eig. 7.54. Funcția de autocorelație.

În concluzie

$$B(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{a} & |\tau| < a \\ 0 & |\tau| \geqslant a \end{cases} \tag{7.358}$$

Această funcție este reprezentată în fig. 7.54 și se observă că $\mathcal{F}\{B(\tau)\} = q(\omega)$ dat de relația (7.44).

7.20.2. Semnale binare pseudoaleatoare

În multe aplicații intervin secvențe pseudo-aleatoare generate de registre de deplasare cu reacție cu perioadă maximală (generate de polinoame caracteristice primitive — vezi § 3.4.51).

Semnalul la ieșirea din registrul de deplasare cu reacție — dacă extragem componenta medie — are o formă ca cea din fig. 7.52, însă nu mai are caracter **aleator.**

În scopul normalizării, ca și în cazul precedent, considerăm că în fiecare interval de tact semnalul poate lua numai valoarea $x_k = +1$ sau $x_k = -1$.

Dacă notăm cu n perioada maximă ($n = 2^m - 1$, unde m este gradul polinomului caracteristic, primitiv) se definește *funcția de autocorelație circulară* (secvența se repetă periodic) *normalizată*:

$$R_{xx}(i) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+i} \tag{7.359}$$

Secvența fiind periodică, $x_{k+n} = x_k$.

Funcția de autocorelație este o măsură a gradului în care o secvență se distinge de permutările sale.

Să considerăm o secvență pe care să o notăm cu $\{x_k\}$ și o altă secvență obținută prin decalarea cu i poziții a primei secvențe, și să o notăm cu $\{x_{k+i}\}$. În suma din relația (7.359) intervine $+1$ în pozițiile în care cele două secvențe $\{x_k\}$ și $\{x_{k+1}\}$ coincid și intervine -1 în pozițiile în care acestea diferă. Dacă din cele n poziții secvențele coincid în A poziții și diferă în D poziții, $A + D = n$, atunci funcția de autocorelație (7.359) poate fi scrisă:

$$R_{xx}(i) = \frac{A - D}{A + D} \tag{7.360}$$

Valoarea funcției de autocorelație în origine ($i = 0$) este:

$$R(0) = 1 \tag{7.361}$$

fiindcă $D = 0$.

Secvențele de perioadă maximă au proprietatea că numărul de (1) *este mai mare decît numărul de* (—1) *cu o unitate.* Acest lucru rezultă din considerente de simetrie, ținînd seama că numărul total de poziții $n = 2^m - 1$ este un număr impar fiindcă s-a exclus starea nulă (în cap. 5 s-a notat cu 1 sau 0 simbolurile care apar în fiecare poziție — în notația prezentă simbolului 0 îi corespunde un impuls de amplitudine —1).

O altă proprietate importantă a secvențelor de perioadă maximă este că *numărul D de poziții în care secvența* $\{x_k\}$ *nu coincide cu secvența decalată*

$\{x_{k+i}\}$ *este mai mare cu unu decît numărul de poziții A în care acestea coincid,* adică $D - A = 1$, pentru orice $i \neq 0$.

Această proprietate poate fi ușor demonstrată dacă impulsurilor pozitive le alocăm simbolul „1", iar celor negative simbolul „0".

Ținînd seama de faptul că o secvență $\{x_k\}$ generată de un registru cu perioadă maximă adunată modulo 2 cu o replică a ei decalată $\{x_{k+i}\}$ dă tot o replică decalată distinctă, se poate scrie

$$\{x_k\} \oplus \{x_{k+i}\} = \{x_{k+j}\} \tag{7.362}$$

În conformitate cu prima proprietate enunțată, secvența $\{x_{k+j}\}$ are un număr de „0" care este mai mic decît numărul de „1", cu unu.

Dacă ne referim la relația (7.362) numărul de „0" în secvența $\{x_{k+j}\}$ reprezintă numărul A de poziții în care $\{x_k\}$ și $\{x_{k+i}\}$ coincid, iar numărul de „1" în secvența $\{x_{k+j}\}$ reprezintă numărul D de poziții în care $\{x_k\}$ și $\{x_{k+i}\}$ diferă, rezultă că $A - D = -1$ pentru $i \neq 0$.

Introducînd acest rezultat în (7.360) și ținînd seama că $A + D = n$ se obține

$$R_{xx}(i) = -\frac{1}{n} \tag{7.363}$$

Rezultă că *funcția de autocorelație a unei secvențe generată de un registru de deplasare cu reacție de perioadă maximă este periodică și are două valori*:

$$R_{xx}(0) = 1 \quad \text{și} \quad R_{xx}(i) = -\frac{1}{n} \quad \text{pentru } (\forall)\ i \neq 0 \tag{7.364}$$

Această funcție este reprezentată în fig. (7.55)

Dacă trecem de la variabila discretă i la variabila continuă τ, funcția de autocorelație $R_{xx}(\tau)$ se obține unind punctele ce reprezintă funcția pentru diferitele valori i, așa cum este indicat punctat în fig. (7.55). Unirea prin linii drepte este justificată de analogia cu funcția de autocorelație a unui semnal binar (fig. 7.54).

Se vede că pentru $n \to \infty$ cele două funcții de autocorelație sînt identice. Faptul că n este întotdeauna finit justifică denumirea de *secvență pseudo-aleatoare*.

Menționăm că în cazul în care secvența nu este de perioadă maximă, funcția ei de autocorelație, între valorile maxime egale cu 1 are și maxime locale mai mici decît 1.

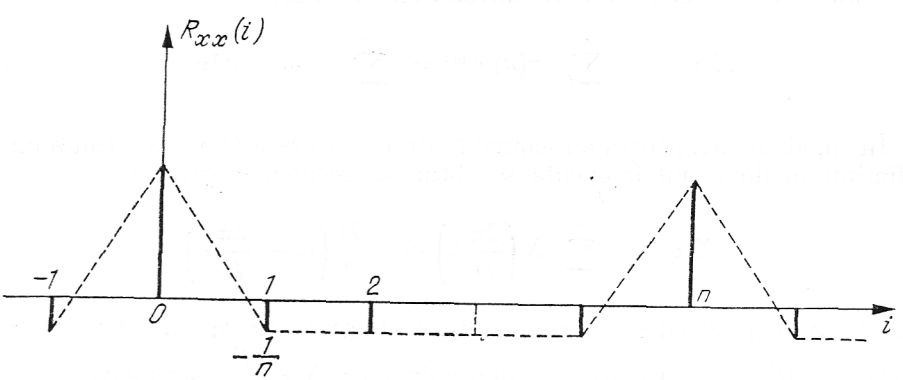


Fig. 7.55. Funcția de autocorelație a unei secvențe pseudoaleatoare.

CAPITOLUL 8

SEMNALE ALEATOARE EȘANTIONATE

Dat fiind că informația transmisă printr-un semnal aleator este conținută în eșantioanele acestuia, o clasă importantă de prelucrări de semnale se efectuează luînd în considerare numai eșantioanele acestuia. De aici rezultă interesul pentru studiul semnalelor eșantionate.

Teorema eșantionării afirmă că un *semnal* $x(t)$ *care are pe* W *ca cea mai înaltă frecvență din spectru este perfect determinat dacă se cunosc eșantioanele lui distanțate cu* $T = \frac{1}{2W} = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\ \mathrm{sinc}\ \frac{\pi}{T}(t - nT) \tag{8.1}$$

Dacă eșantionarea se face cu funcția periodică idealizată:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t}$$

și dacă notăm cu $x^*(t)$ semnalul eșantionat:

$$x^*(t) = x(t)\ \delta_T(t)$$

atunci avem:

$$\mathfrak{F}\{x^*(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\ e^{j\omega nT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega)$$

unde $X(\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\}$

Punînd $T = 1$ convenim să introducem notația:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\omega - n2\pi) \tag{8.2}$$

În mod analog, pentru un semnal limitat la durata D pe axa timpului, și nelimitat în domeniul frecvență se obține densitatea spectrală:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{2\pi}{D} n\right) \mathrm{sinc}\ \frac{D}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{D} n\right) \tag{8.3}$$

Practic, putem considera că semnalul este limitat atît în timp (D) cît și în frecvență (W) și ca urmare este determinat de $N = \frac{D}{T}$ parametri.

8.1. Eşantionarea semnalelor aleatoare

Fie $\xi^{(k)}(t)$ o realizare particulară a semnalului aleator $\xi(t)$ şi $e_T(t-\eta)$ funcţia rectangulară periodică cu perioada T (fig. 8.1) decalată cu η faţă de originea timpului. Decalajul η este o V.A. continuă cu o distribuţie uniformă, pe $[0, T]$.

Semnalul cu care se efectuează eşantionarea poate fi pus sub forma:

$$e_T(t-\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n\Omega)\, e^{jn\Omega t} \tag{8.4}$$

unde:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

iar:

$$C(n\,\Omega) = \frac{1}{T}\int_{\eta-\frac{\tau}{2}}^{\eta+\frac{\tau}{2}} e_T(t-\eta)\, e^{jn\Omega t}\, dt$$

făcînd schimbarea de variabilă $t-\eta = t'$ se obţine:

$$C(n\,\Omega) = e^{-jn\Omega\eta}\,\mathrm{sinc}\,\frac{n\Omega}{2}\tau \tag{8.5}$$

Variabila aleatoare η are o distribuţie uniformă:

$$w(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & 0 \leqslant y \leqslant T \\ 0 & \text{în afară} \end{cases}$$

Semnalul $\xi^{(k)}(t)$ eşantionat cu $e_T(t-\eta)$ este:

$$\gamma^{(k)}(t) = \xi^{(k)}(t)\, e_T(t-\eta)$$

sau considerînd mulţimea tuturor realizărilor:

$$\gamma(t) = \xi(t)\, e_T(t-\eta) \tag{8.6}$$

Funcţia de autocorelaţie a semnalului eşantionat este:

$$B_\gamma(t_1, t_2) = \overline{\gamma(t_1)\,\gamma(t_2)} = \overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)\, e_T(t_1-\eta)\, e_T(t_2-\eta)} \tag{8.7}$$

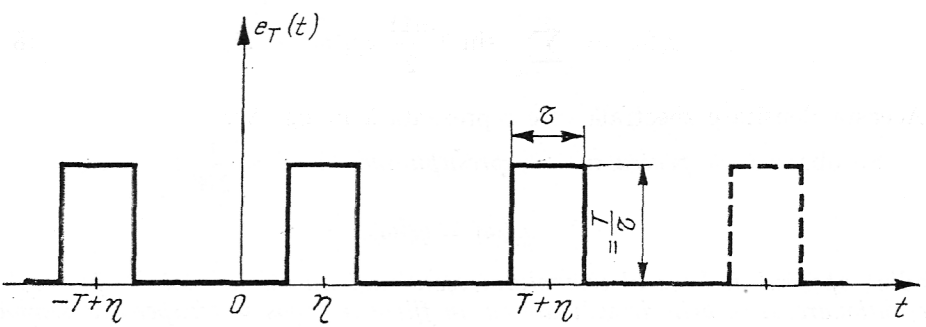


Fig. 8.1. Semnalul de eşantionare.

dar V.A. $\xi(t_i)$, $i = 1, 2$ și V.A η sînt independente, deci

$$B_\gamma(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)} \cdot \overline{e_T(t_1 - \eta)\, e_T(t_2 - \eta)} \tag{8.8}$$

Presupunem că $\xi(t)$ este staționar și ergodic și notăm $\theta = t_2 - t_1$ și introducem notațiile:

$$R_\xi(\theta) = B_\xi(\theta) = \overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)} \tag{8.9}$$

$$R_e(\theta) = B_e(\theta) = \overline{e_T(t_1 - \eta)\, e_T(t_2 - \eta)} \tag{8.10}$$

Rezultă că

$$B_\gamma(t_1, t_2) = B_\gamma(\theta) = R_\gamma(\theta) = R_\xi(\theta)\, R_e(\theta) \tag{8.11}$$

Dar funcția de autocorelație a unui semnal periodic este periodică:

$$R_e(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n\, e^{jn\Omega,\theta} \tag{8.12}$$

unde conform (7.140)

$$r_n = \overline{|\,C(n\Omega)\,|^2} \tag{8.13}$$

Ținînd seama de (8.5) avem

$$r_n = \operatorname{sinc}^2 \frac{n\Omega}{2}\,\tau \tag{8.14}$$

Densitatea spectrală de putere este:

$$q_\gamma(\omega) = \mathfrak{F}\{R_\gamma(\theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_\gamma(\theta)\, e^{-j\omega\theta}\, d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(\theta)\, R_e(\theta)\, e^{-j\omega\theta}\, d\theta \tag{8.15}$$

sau înlocuind (8.12)

$$q_\gamma(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \int_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(\theta)\, e^{-j(\omega - n\Omega)\theta}\, d\theta \tag{8.16}$$

dar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(\theta)\, e^{-j(\omega - n\Omega)\theta}\, d\theta = q_\xi(\omega - n\Omega) \tag{8.17}$$

deci

$$q_\gamma(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 \frac{n\Omega}{2}\,\tau q_\xi(\omega - n\Omega) \tag{8.18}$$

Această densitate spectrală este reprezentată în fig. 8.2

Se observă că *pentru* $n = 0$, *presupunînd că* $T \leqslant \dfrac{1}{2W}$:

$$q_\gamma(\omega) = q_\xi(\omega)$$

adică *spectrul de bază al semnalului eșantionat nu este afectat de procesul de eșantionare,* deci *prin demodulare cu un filtru trece-jos se recuperează semnalul inițial fără nici un fel de distorsiuni.*

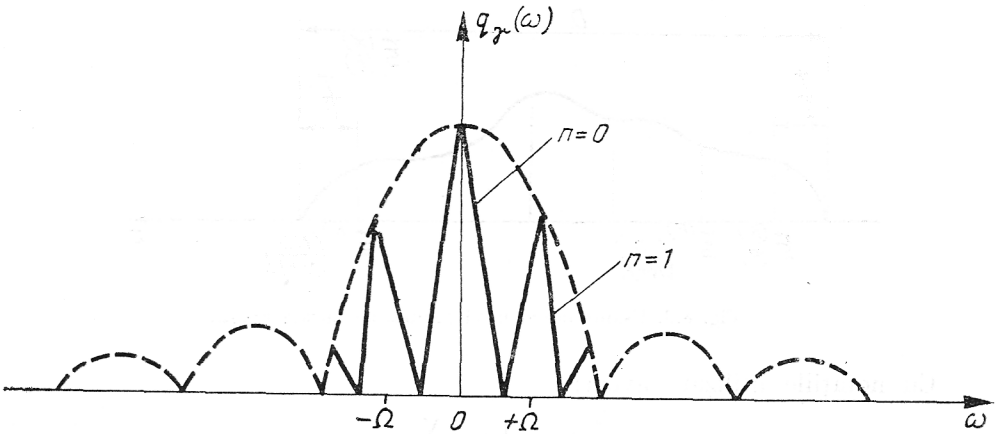


Fig. 8.2. Densitatea spectrală de putere a semnalului eșantionat.

Din relația (8.18) se vede că dacă $\tau \to 0$ avem

$$q_\gamma(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_\xi(\omega - n\Omega)$$

adică D.S.P. se repetă indefinit fără atenuări.

Dacă τ crește, replicile densității spectrale sînt atenuate; la limită cînd $\tau = T$, acestea se anulează fiindcă de fapt nu mai avem nici un proces de eșantionare.

8.2. Eșantionarea semnalelor de durată finită

Să considerăm un semnal $\xi^{(k)}(t)$ de durată D și să notăm cu W cea mai înaltă frecvență din spectrul acestui semnal (semnalul fiind limitat în timp, este nelimitat în domeniul frecvență, însă componentele de frecvență mai mare decît W sînt sub nivelul zgomotelor și se neglijează).

Considerînd extensia periodică a acestui semnal, notăm cu $f_0 = \frac{1}{D}$ frecvența fundamentală, și cu $\frac{N}{2}$ cea mai înaltă armonică pe care o luăm în considerare, adică $W = \frac{N}{2} f_0$. Se poate arăta (v. Anexa III) că și în acest caz semnalul este perfect determinat dacă se cunosc $N+1$ ordonate $\xi^{(k)}\left(\frac{nD}{N+1}\right)$, unde $n = \overline{0, N}$, arătate în fig. 8.3.

Distanța între două eșantioane este:

$$T = \frac{D}{N+1} \tag{8.19}$$

deci $D = (N+1)T$, adică semnalul începe la $\frac{T}{2}$ înaintea primului eșantion și se termină la $\frac{T}{2}$ după ultimul eșantion.

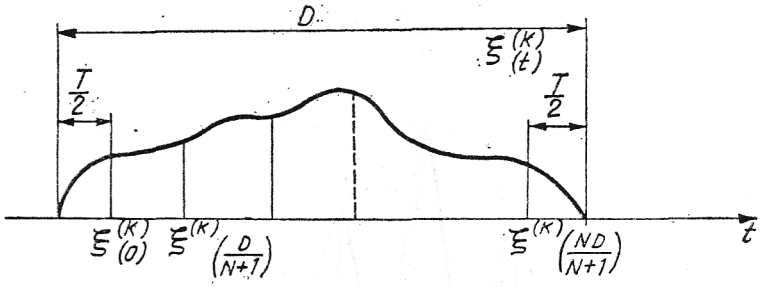


Fig. 8.3. Eșantionarea unui semnal de durată finită.

Cu notațiile utilizate avem:

$$D = \frac{1}{f_0} = \frac{N}{2W} \tag{8.20}$$

Înlocuind pe D în (8.19) se obține:

$$T = \frac{1}{2W}\,\frac{N}{N+1} \tag{8.21}$$

respectiv frecvența de eșantionare:

$$f_e = \frac{1}{T} = 2W\left(1 + \frac{1}{N}\right) \tag{8.22}$$

Se observă că pentru valori mari ale lui N, respectiv pentru durate mari, T și f_e tind spre valorile date de teorema eșantionării cunoscută.

În cazul cel mai general (Anexa III. 3.3) teorema eșantionării se poate scrie:

$$\xi^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{N} \xi^{(k)}(nT)\,\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{(N+1)\sin\frac{\pi}{(N+1)T}(t-nT)} \tag{8.23}$$

Se observă că pentru valori mari ale lui N se obține relația cunoscută

$$\xi^{(k)}(t) = \Sigma\,\xi^{(k)}(nT)\ \operatorname{sinc}\frac{\pi}{T}(t-nT)$$

8.3. Inversarea spectrului

În unele prelucrări de semnale este necesar să inversăm spectrul mesajului așa cum se vede în fig. 8.4.

Acest lucru se realizează prin eșantionare cu o funcție „δ" periodică (sau echivalentele ei fizice), în care impulsurile sînt inversate în mod alternativ (fig. 8.5).

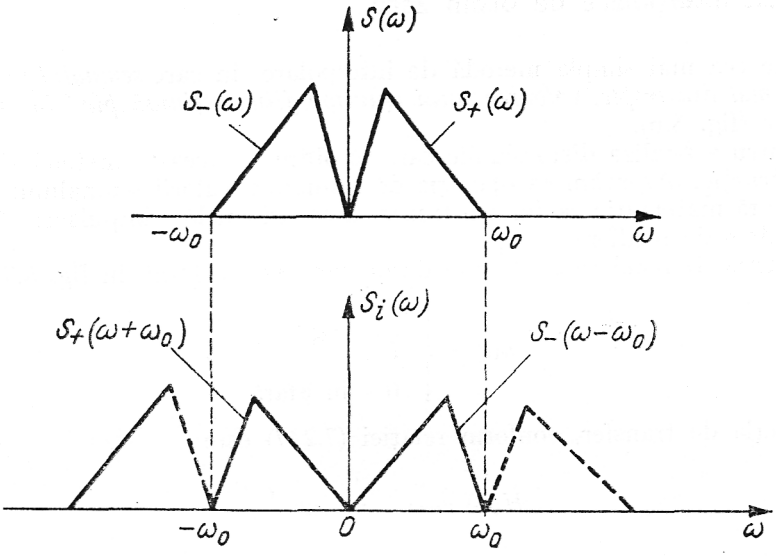


Fig. 8.4. Inversarea spectrului.

Notăm cu $\delta_T^*(t)$ funcția cu care se eșantionează în acest caz:

$$\delta_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \, \delta(t - nT)$$

Spectrul semnalului eșantionat se repetă indefinit, dar componentele de bază pot fi extrase cu un filtru trece-jos cu frecvența de tăiere $\omega_0 = 2\pi W$ la ieșirea căruia se obține:

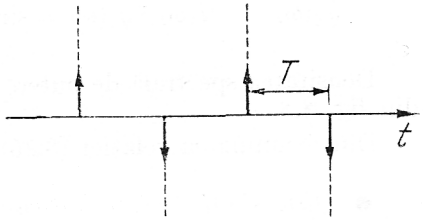


Fig. 8.5. Funcția $\delta_T^*(t)$ pentru inversare de spectru.

$$S_i(\omega) = 2W\left[S_+\left(\omega + \frac{1}{2}\,\omega_0\right) + S_-\left(\omega - \frac{1}{2}\,\omega_0\right)\right] \qquad (8.24)$$

Constanta $2W$ provine din faptul că am considerat că impulsurile $\delta(t)$ au un conținut egal cu unitatea.

Demonstrarea acestei teoreme este dată în anexa III.

8.4. Reconstituirea semnalului eșantionat

Teoretic, cea mai simplă metodă de reconstituire a semnalului eșantionat este filtrarea cu un filtru trece-jos cu frecvența de tăiere $\omega_0 = 2\pi W$. Practic însă construcția filtrului pune probleme serioase, cu excepția cazului în care micșorăm mult intervalul T de eșantionare. Acest lucru nu este convenabil fiindcă mărim în mod inutil redundanța, fapt care duce la scăderea capacității de transmisiune a canalului.

8.4.1. Interpolare de ordin zero

Este cea mai simplă metodă de interpolare, în care *semnalul reconstituit este format din trepte, valoarea unui eșantion fiind reținută pînă la eșantionul următor* (fig. 8.6).

Pentru a analiza distorsiunile care se obțin cu această metodă simplă de reconstrucție, observăm că operația de reținere a valorii semnalului poate fi exprimată matematic ca fiind o trecere a eșantioanelor (impulsuri „δ") printr-un filtru de mediere.

Funcția de pondere a filtrului de mediere este arătată în fig. 8.7 și este:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 & \text{în afară} \end{cases}$$

iar funcția de transfer, conform relației (7.247) este

$$H(\omega) = e^{-j\frac{\omega T}{2}} \operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2} \tag{8.25}$$

Dacă semnalul eșantionat $\gamma(t)$ este trecut printr-un asemenea filtru se obține:

$$\hat{q}_\xi(\omega) = |H(\omega)|^2 q_\gamma(\omega) = \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 \frac{n\Omega}{2} \tau q_\xi(\omega - n\Omega) \tag{8.26}$$

Densitatea spectrală de putere $\hat{q}_\xi(\omega)$ care aproximează pe $q_\xi(\omega)$ se deduce din fig. 8.8.

Din examinarea relației (8.26) rezultă următoarele distorsiuni:

● *Distorsiuni liniare introduse de factorul* $\operatorname{sinc}^2 \dfrac{\omega T}{2}$. Componentele de frecvența cea mai mare din semnal, respectiv de frecvență $\omega_0 = 2\pi W$ sînt atenuate cu:

$$\operatorname{sinc}^2 \frac{\omega_0 T}{4} = \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{2} \cong 0{,}4$$

deci atenuarea este de —4 dB, care este tolerabilă.

● *Distorsiuni ce provin din faptul că componentele spectrului translatat nu sînt total atenuate.* Pentru a reduce efectul lor, după circuitul de reținere

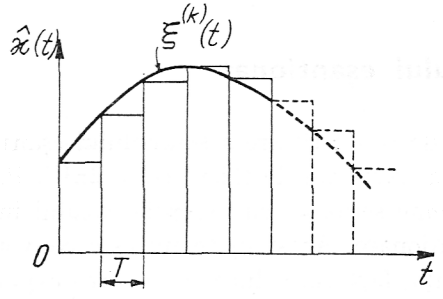


Fig. 8.6. Interpolare de ordin zero.

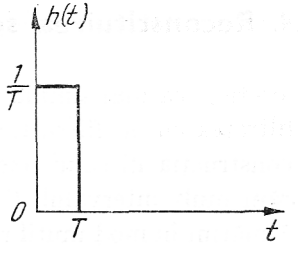


Fig. 8.7. Funcția de pondere.

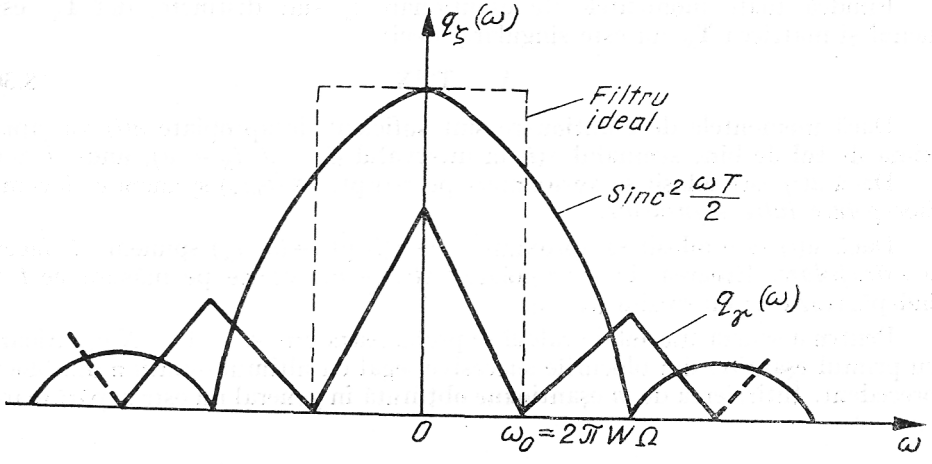


Fig. 8.8. Densitatea spectrală de putere a semnalului interpolat.

se conectează un filtru trece-jos cu o structură foarte simplă. Dacă durata τ a impulsurilor de eșantionare crește, componentele perturbatoare sînt mai puternic atenuate. Creșterea lui τ înseamnă însă micșorarea intervalului de timp între două eșantioane, deci micșorarea capacității canalului, în sensul că se micșorează numărul de comunicații simultane posibile.

8.4.2. Interpolare polinomială

Pentru simplificarea scrisului notăm cu $x(t)$ o realizare particulară a semnalului aleator $\xi(t)$, adică $x(t) = \xi^{(k)}(t)$.

Fie: $x(t_0)$, $x(t_1)$, ..., $x(t_N)$ un număr de $N + 1$ eșantioane ale semnalului $x(t)$.

Prin aceste puncte poate să treacă un singur polinom de grad N. Pentru a arăta acest lucru punem:

$$a(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k \tag{8.27}$$

și vom alege coeficienții a_k astfel încît $a(t_m) = x(t_m) = \sum_{k=0}^{N} a_k t_m^k$, sau sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ \vdots \\ x(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \dots t_0^N \\ 1 & t_1 & t_1^2 \dots t_1^N \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & t_N & t_N^2 \dots t_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \tag{8.28}$$

sau:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_N \mathbf{A} \tag{8.29}$$

Matricea $\mathbf{T}_N$ este *matricea Vandermonde* și se poate arăta că

$$\det \mathbf{T}_N = \prod_{i>j} (t_i - t_j)$$

Fiindcă toate momentele de eșantionare t_k sînt distincte, det $\mathbf{T}_N$ este nenul și matricea $\mathbf{T}_N$ nu este singulară, deci:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_N^{-1}\mathbf{X} \tag{8.30}$$

Dacă momentele de eșantionare sînt suficient de apropiate $a(t)$ va aproxima destul de bine semnalul $x(t)$ în intervalul $(t_0 - d,\ t_N + d)$, unde $d > 0$.

Dacă $a(t)$ este folosit să aproximeze pe $x(t)$ pt. $t \in (t_0, t_N)$ spunem că facem o *interpolare între eșantioane.*

Dacă $a(t)$ este folosit să aproximeze pe $x(t)$ pt $t \notin (t_0,\ t_N)$ spunem că facem o *extrapolare.* Eroarea de extrapolare: $x(t) - a(t)$ crește pe măsură ce t se îndepărtează de intervalul $(t_0,\ t_N)$.

Pentru a scurta timpul de calcul se prelucrează cîte $m + 1 < N$ eșantioane cu primul eșantion din blocurile succesive, egal cu ultimul eșantion din blocul precedent. Întîrzierea de m eșantioane obținută în general nu este supărătoare.

8.4.2.1. Formula de interpolare a lui Lagrange

Fie $a(t)$ un polinom de grad m care trece prin $m + 1$ eșantioane: $x(t_0)$, $x(t_1)$, ..., $x(t_m)$. Din (8.30), unde $\mathbf{T}_N$ se înlocuiește cu $\mathbf{T}_m$ se pot calcula coeficienții lui $a(t)$, dar aceasta necesită inversarea matricei $\mathbf{T}_m$.

Polinomul $a(t)$ poate fi însă calculat fără inversare de matrice utilizînd formula de interpolare a lui Lagrange.

Fie setul de $m + 1$ polinoame de grad m

$$q_i(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m} \frac{t - t_k}{t_i - t_k} \tag{8.31}$$

numite polinoamele lui Lagrange, care au proprietatea că pentru $\forall r$ întreg $0 \leqslant r \leqslant m$:

$$q_i(t_r) = \delta_{ri} = \begin{cases} 0 & r \neq i \\ 1 & r = i \end{cases} \tag{8.32}$$

Fie polinomul $b(t)$ definit ca:

$$b(t) = \sum_{i=0}^{m} x(t_i)\, q_i(t) \tag{8.33}$$

atunci

$$b(t_r) = \sum_{i=0}^{m} \delta_{ri} x(t_i) = x(t_r) = a(t_r) \tag{8.34}$$

pt. $r = 0, 1, \ldots m$.

Polinoamele $b(t)$ și $a(t)$ avînd ambele gradul m și trecînd prin aceleași $m + 1$ puncte, sînt egale.

Deci

$$a(t) = \sum_{i=0}^{m} x(t_i)\, q_i(t) \tag{8.35}$$

este *formula de interpolare a lui Lagrange, valabilă și pentru eșantionarea neuniformă.*

8.4.2.2. Filtre de reconstrucție

Considerăm că reconstrucția se bazează pe $m + 1$ eșantioane regulate $x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_m)$, unde $t_i = t_0 + iT$ și pentru simplificare considerăm $t_0 = 0$ deci $t_i = iT$. În acest caz:

$$a(t) = \sum_{i=0}^{m} x(iT)\, q_i(t) \tag{8.36}$$

este un polinom ce trece prin cele $m + 1$ eșantioane.

Cu ajutorul filtrului de reconstrucție dorim să reconstruim valoarea semnalului $x(t)$ din ultimul interval (t_{m-1}, t_m) pe baza datelor precedente, iar reconstrucția are loc în intervalul (t_m, t_{m+1}), deci semnalul $y(t)$ la ieșirea din filtru este întîrziat cu T față de $a(t)$:

$$y(t) = a(t - T) \text{ pt. } t_m = mT \leqslant t < (m + 1)\, T = t_{m+1} \tag{8.37}$$

sau

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} x(iT)\, q_i(t - T) \text{ pt. } t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1} \tag{8.38}$$

Filtrul este alcătuit dintr-o linie de întîrziere cu o întîrziere „T" pe celulă. Prizele sînt legate la filtre care au funcția de pondere:

$$h_k(t) = q_k(t - T) \qquad k = 0, \ldots, m.$$

În fig. 8.9 este arătată schema de principiu și nu structura reală a filtrului.

Observație. Dacă reconstrucția se face cu funcții *sinc*, filtrele sînt filtre ideale trece-jos a căror funcție de pondere este *sinc*. Deci reconstrucția în ultimul interval se face cu contribuția a $m + 1$ funcții *sinc*.

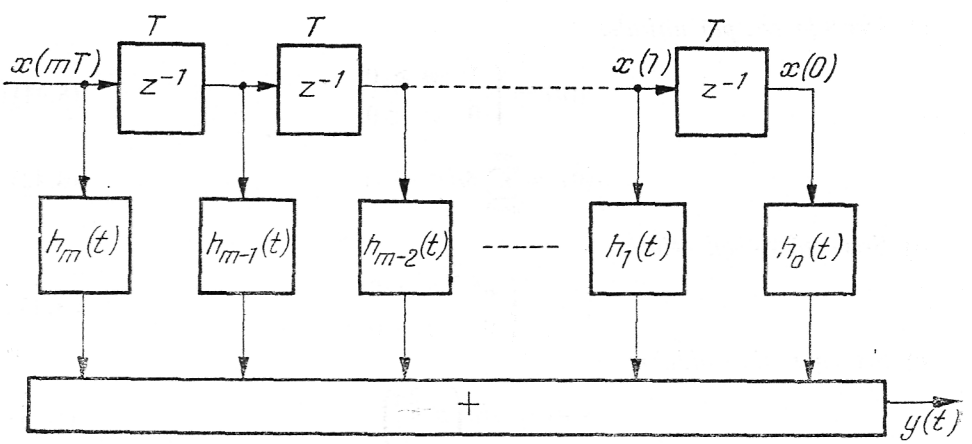


Fig. 8.9. Filtrul de reconstrucție.

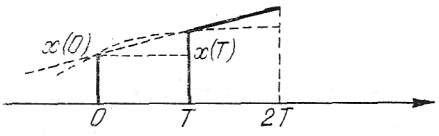


Fig. 8.10. Extrapolare liniară.

Extrapolare de ordinul întîi. În acest caz $m = 1$ și sînt luate în considerare numai două eșantioane $x(0)$ și $x(T)$. Polinoamele Lagrange care trec prin aceste eșantioane sînt:

$$q_0(t) = -\frac{t-T}{T} \quad \text{și} \quad q_1(t) = \frac{t}{T}$$

$$a(t) = x(0)\, q_0(t) + x(T)\, q_1(t)$$

$$a(t) = -x(0)\,\frac{t-T}{T} + x(T)\,\frac{t}{T} = x(0) + \frac{x(T) - x(0)}{T}\,t$$

Fiind vorba de extrapolare $y(t) = a(t)$ (fără întîrziere)

$$y(t) = x(0) + \frac{x(T) - x(0)}{T}\,t \quad \text{pt.} \quad T \leqslant t \leqslant 2T$$

extrapolarea se face cu o linie dreaptă, așa cum se vede în fig. 8.10.

8.5. Secvențe de date

În analiza semnalelor eșantionate, pe care le numim **secvențe de date** (de eșantioane) un rol important îl ocupă următoarele secvențe:

a) *Eșantionul unitate sau impulsul digital:*

$$\delta_0(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{8.39}$$

b) *Impulsul digital întîrziat*

$$\delta_0(n - n_0) = \begin{cases} 1 & n = n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases} \tag{8.40}$$

c) *Secvența treaptă unitate:*

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{8.41}$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_0(n - k) \tag{8.42}$$

d) *Secvență exponențială:*

$$e(n) = \begin{cases} a^n & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{8.43}$$

e) *Secvența sinusoidală:*

$$s(n) = \sin\left(n\,\frac{2\pi}{N}\right) \tag{8.44}$$

unde N este un număr întreg.

O secvență de date oarecare se poate scrie:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, \delta_0(n - m) \tag{8.45}$$

Acolo unde nu pot exista confuzii, secvența de date se va nota cu $x(n)$ în loc de $\{x(n)\}$.

Secvențele de date, în realitate sînt *de durată finită*, dar de multe ori, în scopuri de analiză este util să le extindem pe toată axa timpului (prin periodizare sau prin completare cu zero).

În cele ce urmează prin semnal înțelegem semnalul aleator a cărui secvență de eșantionare o analizăm.

8.5.1. Reprezentarea secvențelor de date în domeniul frecvenței discrete

În scopul prelucrării secvențelor de date este utilă transformarea lor într-un spațiu secundar în care se efectuează prelucrarea și apoi se revine prin transformarea inversă la spațiul primar, respectiv la domeniul timp.

Transformarea generală în care atît parametrul timp, cît și parametrul frecvență generalizată au valori discrete sînt date în relația (6.66) și (6.67)

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, \varphi^*_{km} \tag{8.46}$$

și transformarea inversă:

$$x(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \varphi_{km} \tag{8.47}$$

Dacă funcțiile de reconstrucție $\{\Phi_k(t)\}$ sînt ortogonale, dar nu sînt normale, avem:

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, \Phi^*_{km} \tag{8.48}$$

și

$$x(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \Phi_{km} \tag{8.49}$$

unde:

$$\langle \Phi_k, \Phi_k \rangle = a \neq 1$$

Energia semnalului, respectiv norma sa, este dată de relația (6.46):

$$\|x\|^2 = a \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \tag{8.50}$$

În majoritatea cazurilor a este durata semnalului, deci puterea lui este:

$$P = \frac{\|x\|^2}{a} = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \tag{8.51}$$

iar $|X(k)|^2$ este spectrul de putere al semnalului:

$$P(k) = |X(k)|^2 \tag{8.52}$$

și este o funcție pară.

● **Reprezentarea prin funcții armonice discrete (T.F.D).** În acest caz, în conformitate cu § 6.5.2.1. avem T.F.D.:

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, W^{km} \tag{8.53}$$

și

$$x(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W^{-km} \tag{8.54}$$

unde:

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad \text{iar} \quad a = N \tag{8.55}$$

Presupunînd că $\frac{N}{2}$ este un număr întreg, se poate arăta că:

$$X\left(\frac{N}{2} + l\right) = X^*\left(\frac{N}{2} - l\right) \quad l = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} \tag{8.56}$$

într-adevăr

$$X\left(\frac{N}{2} + l\right) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, W^{\left(\frac{N}{2}+l\right)m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, W^{-\left(\frac{N}{2}-l\right)m} W^{Nm} = X^*\left(\frac{N}{2} - l\right)$$

Ținînd seama de această relație, rezultă că *dacă $x(m)$ este real, atunci numai $\frac{N}{2} + 1$ componente spectrale sînt independente.* Deci spectrul de putere este definit de

$$P(k) = |X(k)|^2 \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} \tag{8.57}$$

8.5.2. Reprezentarea secvențelor de date în domeniul frecvenței continue

Să considerăm o realizare particulară $x(t)$ a semnalului aleator $\xi(t)$, pe care o eșantionăm cu funcția delta periodică $\delta_T(t)$:

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t - n) \tag{8.58}$$

Transformata Fourier a acestui semnal conform (8.2) este:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2\pi n) \tag{8.59}$$

Din această relație rezultă că $X(e^{j\omega})$ este o funcție periodică cu perioada 2π. Ca urmare ea poate fi dezvoltată în serie:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n)\, e^{-jn\omega} \qquad (8.60)$$

unde $C(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})\, e^{+jn\omega}\, d\omega =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{+jn\omega}\, d\omega = x(n)$$

rezultă

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jn\omega} \qquad (8.61)$$

sau trecînd la variabila complexă $p=\sigma+j\omega$ se obține

$$X(e^{p}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-pn} \qquad (8.62)$$

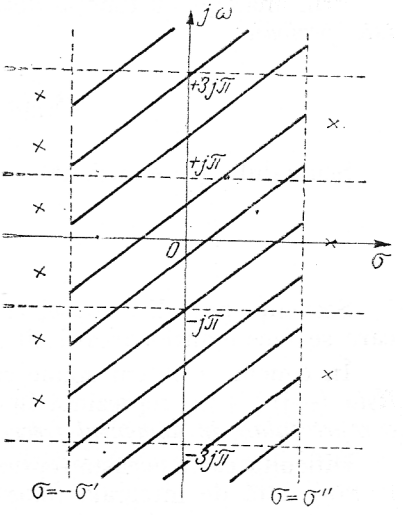


Fig. 8.11. Reprezentarea funcției $X(e^{p})$ în planul complex.

În intervalul $(-j\pi, +j\pi)$ polii funcției $X(e^{p})$ sînt identici cu polii lui $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ și în afara acestui interval se repetă în mod periodic, în fîșii de lățime $2\pi j$ de la $-\infty$ la $+\infty$, așa cum se vede în fig. 8.11.

În general $X(e^{p})$ poate să aibă poli atît în semiplanul stîng cît și în semiplanul drept.

Seria (8.62), respectiv $X(e^{p})$, este convergentă pentru $m \geqslant 0$ dacă $\sigma > -\sigma'$, iar pentru $m < 0$, dacă $\sigma < \sigma''$.

Deci domeniul de convergență a lui $X(e^{p})$ este cuprins între $-\sigma' < \sigma \leqslant \sigma''$.

Să considerăm o valoare σ_0 în interiorul acestui domeniu, să înmulțim pe $X(e^{p})$ cu e^{pm} și să evaluăm integrala:

$$\int_{\sigma_0-j\pi}^{\sigma_0+j\pi} X(e^{p})\, e^{pm}\, dp = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{\sigma_0-j\pi}^{\sigma_0+j\pi} e^{-p(n-m)}\, dp \qquad (8.63)$$

ori

$$\int_{\sigma_0-j\pi}^{\sigma_0+j\pi} e^{-p(n-m)}\, dp = \begin{cases} 2\pi j & \text{pt} \quad m = n \\ 0 & \text{pt} \quad m \neq n \end{cases} \qquad (8.64)$$

în consecință avem:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\pi}^{\sigma_0+j\pi} X(e^{p})\, e^{pn}\, dp \qquad (8.65)$$

Din relația (8.65), punînd $X(e^{p}) = 1$ și $\sigma_0 = 0$ se obține *eșantionul unitate:*

$$\delta_0(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{jn\omega}\, d\omega \qquad (8.66)$$

Se observă că înlocuind variabila discretă n cu variabila continuă t și extinzînd limitele de integrare la infinit, se obține „impulsul Dirac" $\delta(t)$.

Prin analogie cu funcția delta periodică $\delta_T(t)$ putem defini *eșantionul unitate periodic*:

$$\delta_{0T}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_0(n - m) \tag{8.67}$$

Semnalul $x(t)$ eșantionat cu $\delta_{0T}(n)$ este:

$$x(n) = x(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_0(n - m) \tag{8.68}$$

Secvența periodică $\delta_{0T}(n)$ este mult mai apropiată de semnalele reale cu care se face eșantionarea decît semnalul $\delta_T(t)$.

În concluzie putem spune că *funcția* $X(e^{j\omega})$, respectiv $X(e^{p})$, *evaluată în fîșia* $(-j\pi; +j\pi)$ reprezintă în mod unic secvența $x(n)$, cu alte cuvinte *este o reprezentare în domeniul frecvenței continue* ω *a secvenței* $x(n)$.

Dificultatea cu această reprezentare constă în faptul că trecerea de la $X(e^{p})$ la $x(n)$ dată de integrala (8.65) în general este dificilă.

Acest neajuns se înlătură făcînd apel la transformata Z.

Relațiile (8.61) și (8.65), evaluate pe axa frecvențelor $\sigma = \sigma_0 = 0$, sînt cunoscute sub numele de *„serie Fourier discretă"*.

● *Transformata* **Z**

Ideea de bază a **transformatei** Z constă în *transformarea integralei* (8.65) *într-o integrală de contur, care poate fi soluționată cu ajutorul teoremei reziduurilor.*

În acest scop se face transformarea:

$$z = e^{p} \tag{8.69}$$

Cu această transformare relațiile (8.62) și (8.65) devin

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{8.70}$$

și

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz \tag{8.71}$$

relații care sînt cunoscute sub numele de transformata Z, pe care o notăm:

$$\left.\begin{aligned} Z\{x(n)\} &= X(z) \\ \text{și transformata inversă} \qquad & \\ x(n) &= Z^{-1}\{X(z)\} \end{aligned}\right\} \tag{8.72}$$

Din proprietățile cunoscute ale transformatei Z reamintim că:

$$Z\{x(n - m)\} = z^{-m} Z\{x(n)\} = z^{-m} X(z) \tag{8.73}$$

Prin transformarea (8.69) conturul de integrare din relația (8.65) devine un cerc cu rază e^{σ_0}, notat cu C în relația (8.71).

În fig. (8.12) este arătat cazul $\sigma_0 = 0$. Semiplanul stîng al planului complex p este transformat în domeniul din interiorul cercului, semiplanul

drept în domeniul din exteriorul cercului, iar domeniul de convergență haşurat din fig. (8.11) este transformat în domeniul inelar haşurat din fig. 8.12.

Dacă z ia valori discrete pe cercul de rază unitate în punctele $\frac{2\pi}{N}k$, unde $k = \overline{0, N-1}$, atunci transformata Z devine identică cu T.F.D.

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk} = X(k) \tag{8.74}$$

fiindcă $x(n) = x(n+N)$.

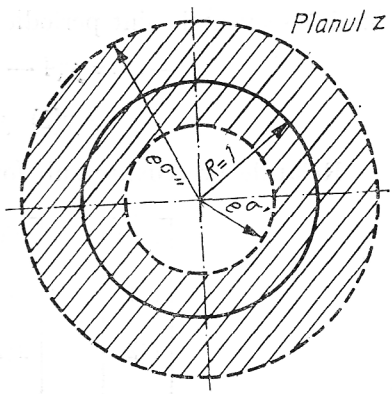


Fig. 8.12. Domeniul de convergență.

8.5.3. Convoluția secvențelor de date

Fie $x(n)$ și $y(n)$ două secvențe de date de durată infinită. Prin definiție convoluția lor este

$$c(n) = x(n) * y(n) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)\, y(n-l) \tag{8.75}$$

pt. $-\infty < n < +\infty$.

Dacă secvențele $x(n)$ și $y(n)$ au durate finite, respectiv $x(n)$ este nulă în afara intervalului $0 \leqslant n \leqslant N_1 - 1$ și $y(n)$ este nulă în afara intervalului $0 \leqslant n \leqslant N_2 - 1$ atunci *convoluția liniară* sau *aperiodică* este definită de:

$$c(n) = \sum_{m=0}^{n} x(m)\, y(n-m) \tag{8.76}$$

unde lungimea secvenței $c(n)$, este $N_1 + N_2 - 1$.

În multe aplicații este utilizată *convoluția circulară* sau *periodică* a unor secvențe periodice de aceeași perioadă N

$$x(m+N) = x(m) \quad \text{și} \quad y(m+N) = y(m):$$

$$c(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y(n-m) \tag{8.77}$$

secvența rezultantă este periodică cu aceeași perioadă N.

Se vede ușor că, *convoluția aperiodică poate fi transformată într-o convoluție periodică* cu $N = N_1 + N_2 - 1$ *completînd cu eșantioane nule secvențele* $x(n)$ și $y(n)$ *astfel încît să aibă lungimea* N.

Convoluția circulară pentru cazul particular $N = 4$ se poate scrie:

$$\begin{aligned}
c(0) &= x(0)\, y(0) + x(1)\, y(-1) + x(2)\, y(-2) + x(3)\, y(-3)\\
c(1) &= x(0)\, y(1) + x(1)\, y(0) + x(2)\, y(-1) + x(3)\, y(-2)\\
c(2) &= x(0)\, y(2) + x(1)\, y(1) + x(2)\, y(0) + x(3)\, y(-1)\\
c(3) &= x(0)\, y(3) + x(1)\, y(2) + x(2)\, y(1) + x(3)\, y(0)
\end{aligned}$$

fiindcă secvențele sînt periodice și au perioada 4 avem:

$$y(-1) = y(4-1) = y(3); \quad y(-2) = y(4-2) =$$

$$= y(2) \quad y(-3) = y(4-3) = y(1)$$

Relațiile precedente sub formă matriceală se scriu:

$$\begin{bmatrix} c(0) \\ c(1) \\ c(2) \\ c(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(0) \\ x(2) & x(3) & x(0) & x(1) \\ x(3) & x(0) & x(1) & x(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(3) \\ y(2) \\ y(1) \end{bmatrix} \tag{8.78}$$

Regulile precedente pot fi extinse cu ușurință la cazul general:

$$\begin{bmatrix} c(0) \\ c(1) \\ \vdots \\ c(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & x(2) & \dots & x(N-1) \\ x(1) & x(2) & \dots & x(N-1) & x(0) \\ x(2) & x(3) & \dots & x(0) & x(1) \\ x(N-2) & & & & \\ x(N-1) & x(0) & \dots & \dots & x(N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(N-1) \\ \\ \\ y(1) \end{bmatrix} \tag{8.79}$$

Această regulă este reprezentată grafic în fig. 8.13.

Să considerăm transformata Fourier discretă (T.F.D.) a produsului de convoluție $c(m)$.

$$C(k) = T.F.D. \{c(m)\} = \sum_{m=0}^{N-1} c(m)\, W^{km} \tag{8.80}$$

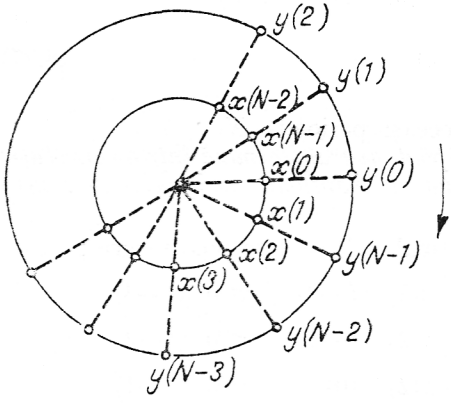


Fig. 8.13. Reprezentarea grafică a regulei de obținere a convoluției periodice (circulare).

înlocuind pe $c(m)$ cu (8.77) se obține:

$$C(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} x(h)\, y(m-h)\, W^{km} \tag{8.81}$$

sau:

$$C(k) = \sum_{h=0}^{N-1} x(h) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} y(m-h)\, W^{km} \right] \tag{8.82}$$

punem $m' = m - h$ și fiindcă $y(N \pm h) = y(\pm h)$, rezultă că în intervalul de la $m' = -h$ la $m' = N - 1 - h$

egal cu o perioadă, vor fi prezentate toate componentele lui $y(m')$ și ca urmare putem scrie:

$$\sum_{m'=-h}^{N-1-h} y(m')\, W^{km'}\, W^{kh} =$$

$$= W^{kh} \sum_{m'=0}^{N-1} y(m') W^{km'} = W^{kh} Y(k) \quad (8.83)$$

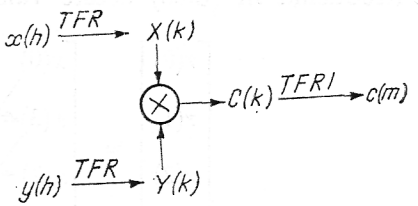


Fig. 8.14. Obținerea convoluției circulare.

unde $Y(k) = T.F.D\ \{y(m)\}$

Ținînd seama de cele precedente (8.82) devine:

$$C(k) = \sum_{h=0}^{N-1} x(h)[W^{kh}\, Y(k)] = Y(k) \sum_{h=0}^{N-1} x(h)\, W^{kh} \quad (8.84)$$

deci

$$C(k) = X(k)\ Y(k) \quad (8.85)$$

Pe baza acestei relații, cu ajutorul transformatei Fourier rapide (T.F.R) se poate calcula *produsul de convoluție a două secvențe* fără a face apel la relația (8.79), pe baza schemei din fig. (8.14).

În mod analog se poate arăta că transformata Z a convoluției $c(n)$ a două secvențe $x(n)$ și $y(n)$ este

$$C(z) = X(z)\ Y(z) \quad (8.86)$$

unde

$$C(z) = Z\{c(n)\}$$
$$X(z) = Z\{x(n)\}$$
$$Y(z) = Z\{y(n)\}$$

8.5.4. Corelația secvențelor de date și spectrul de putere al semnalului

Funcția de corelație a secvențelor de date (circulară, adică a secvențelor periodice) este definită de relația

$$r_{x,\,y}(m) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} x(h)\, y(m+h) \quad (8.87)$$

care pentru cazul particular $N = 4$ se poate scrie:

$$\begin{aligned} r(0) &= x(0)\, y(0) + x(1)\, y(1) + x(2)\, y(2) + x(3)\, y(3) \\ r(1) &= x(0)\, y(1) + x(1)\, y(2) + x(2)\, y(3) + x(3)\, y(4) \\ r(2) &= x(0)\, y(2) + x(1)\, y(3) + x(2)\, y(4) + x(3)\, y(5) \\ r(3) &= x(0)\, y(3) + x(1)\, y(4) + x(2)\, y(5) + x(3)\, y(6) \end{aligned} \quad (8.88)$$

Ținînd seama de periodicitatea secvențelor:

$$y(N+m) = y(m) \quad \text{respectiv:}$$
$$y(5) = y(4+1) = y(1)$$
$$y(6) = y(4+2) = y(2)$$

introducînd în (8.88) aceste valori și scriind sub formă matriceală avem:

$$\begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \\ r(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) \\ x(3) & x(0) & x(1) & x(2) \\ x(2) & x(3) & x(0) & x(1) \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} \tag{8.89}$$

și în cazul general:

$$\begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ \vdots \\ r(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(N-1) \\ x(N-1) & x(0) & \dots & x(N-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(1) & x(2) & \dots & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} \tag{8.90}$$

Această regulă este reprezentată în fig. 8.15.

Funcția de corelație (8.87) poate fi considerată ca un produs de convoluție în cazul în care $x(n)$ și $y(n)$ sînt funcții pare:

$$\sum_{h=0}^{N-1} x(h)\, y(m+h) = x(m) * y(-m) \tag{8.91}$$

și conform cu (8.85) avem

$$T.F.D\{r_{x,y}(m)\} = X(k)\, Y^*(k) = X^*(k)\, Y(k) \tag{8.92}$$

În general, notăm cu

$$P_{x,y}(k) = X^*(k)\, Y(k);\ P_{x,y} = X(k)\, Y^*(k) \tag{8.93}$$

spectrul de putere de interacțiune.

Funcția de corelație poate fi calculată cu ajutorul $T.F.R$, așa cum se vede în fig. 8.16.

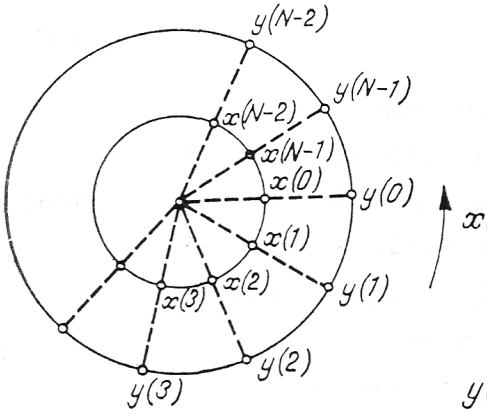


Fig. 8.15. Reprezentarea grafică a regulei de obținere a corelației periodice (circulare).

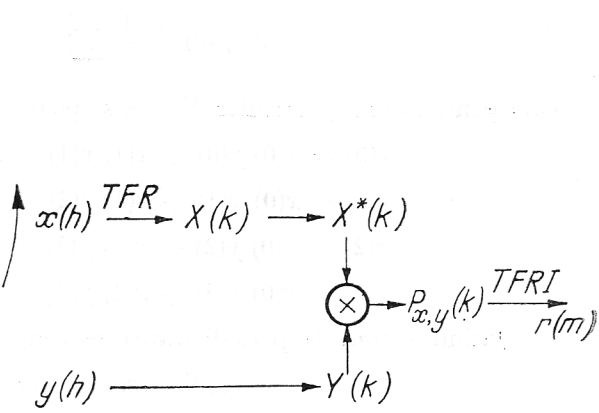


Fig. 8.16. Obținerea autocorelației circulare.

Funcția de autocorelație este definită de:

$$r(m) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} x(h)\, x(m+h) \tag{8.94}$$

Din relațiile precedente, punînd $x(n) = y(n)$ rezultă:

$$P(k) = |X(k)|^2 \tag{8.95}$$

care este spectrul de putere al semnalului și:

$$P(k) = T.F.D\{r(m)\} \tag{8.96}$$

Transformarea inversă este:

$$r(m) = T.F.D.I.\{P(k)\} = \sum_{k=0}^{N-1} P(k)\, W^{-km} \tag{8.97}$$

Valoarea funcției de autocorelație în origine este puterea P a semnalului:

$$P = r(0) = \sum_{k=0}^{N-1} P(k) = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \tag{8.98}$$

Din (8.94) și (8.98) rezultă (*teorema lui Parseval*):

$$P = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} x^2(h) = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \tag{8.99}$$

8.5.5. Densitatea spectrală de putere a semnalului

Se pune problema calculării puterii semnalului prin integrarea unei densități spectrale determinate în funcție de eșantioanele semnalului.

Pentru a defini o densitate spectrală trebuie să trecem de la variabila discretă k la o variabilă continuă, cum ar fi variabila z. În acest scop luăm transformata Z a funcției de autocorelație (8.94)

$$p(z) = Z\{r(n)\} = \frac{1}{N} Z\{x(n) * x(-n)\} \tag{8.100}$$

Din (8.86) rezultă:

$$p(z) = \frac{1}{N} X(z)\, X(z^{-1}) \tag{8.101}$$

care este densitatea spectrală de putere a semnalului în planul z și care mai poate fi scrisă în funcție de eșantioane:

$$\left.\begin{aligned} p(z) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(n)\, x(m)\, z^{-(m-n)} \\ \text{sau} \qquad p(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(n)\, z^{-n} \end{aligned}\right\} \tag{8.102}$$

Transformata Z inversă ne dă funcția de autocorelație:

$$r(n) = Z^{-1}\{p(z)\} \tag{8.103}$$

care pentru $n = 0$ ne dă puterea totală a semnalului:

$$P = r(0) = Z^{-1}\{p(z)\}_{n=0} = \frac{1}{N}\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)\,X(z^{-1})\,z^{-1}\,dz \tag{8.104}$$

Cu ajutorul teoremei reziduurilor se poate calcula cu ușurință puterea totală a semnalului.

În marea majoritate a cazurilor de interes practic evaluarea se face pe cercul de rază unitate $z = e^{j\omega}$. Introducînd această valoare în (8.104) se obține:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,d\omega \tag{8.105}$$

unde

$$p(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 \tag{8.106}$$

este *densitatea spectrală de putere.*

8.5.6. Caracteristici statistice ale secvențelor de date

Secvențele de date sînt *secvențe de variabile aleatoare.* Le presupunem *staționare și ergodice.* Pentru a accentua faptul că $x(n)$ este o realizare particulară a V.A. ξ, introducem notația

$$x(n) = \xi_n^{(k)} = x_n.$$

Dacă considerăm un număr de N eșantioane, densitatea de probabilitate de ordinul N o scriem:

$$w_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

Dacă distribuția este gaussiană densitatea de probabilitate de ordinul întîi este:

$$w_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x_1 - m_0)^2}{2\sigma^2}}$$

unde:

$m_0 = \overline{\xi_n}$ este valoarea medie;

$\sigma^2 = \overline{(\xi_n - m_1)^2}$ este dispersia.

Densitatea de probabilitate de ordinul doi este:

$$w_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\,|\mathbf{K}|}}\,exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2\,|\mathbf{K}|}\left[(x_1 - m_0)^2 + (x_2 - m_0)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\frac{K_{12}}{\sigma^2}(x_1 - m_0)\,(x_2 - m_0)\right]\right\} \tag{8.107}$$

unde:

$$K_{ij} = \overline{(\xi_i - m_0)\,(\xi_j - m_0)} = \sigma_{ij}^2 \tag{8.108}$$

este covariația V.A. ξ_i și ξ_j

$|\mathbf{K}|$ este determinantul matricei:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{8.109}$$

numită **matrice de covariație.**

Pentru N oarecare, matricea de covariație poate fi scrisă:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1N}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma^2 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{N1}^2 & & & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{8.110}$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_N \\ \rho_1 & 1 & & & \\ \rho_1 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \rho_N & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{8.111}$$

unde:

$$\rho_{|i-j|} = \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma^2} \tag{8.112}$$

este coeficientul de corelație între ξ_i și ξ_j.

Dacă notăm cu $\mathbf{X}^T$ secvența de date:

$$\mathbf{X}^T = [\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_N]$$

matricea de covariație mai poate fi scrisă sub forma:

$$\mathbf{K} = \overline{(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})\,(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})^T}, \tag{8.113}$$

iar densitatea de probabilitate de ordinul N a secvenței gaussiene, poate fi scrisă sub forma:

$$w_N(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{k}|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})\,\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{X}^T - \overline{\mathbf{X}^T})\right] \tag{8.114}$$

După cum s-a văzut în § 7. 12, transformarea Karhunen-Loeve, duce la un spațiu în care coeficienții care determină semnalul sînt necorelați, adică $\rho_i = 0$ pt. $\forall i \neq 0$, deci matricea de covariație în acest spațiu are o formă diagonală cu $\sigma_{11}^2 \neq \sigma_{22}^2 \neq$.

În acest spațiu se pot efectua compresii de date.

Funcția de corelație statistică este definită de relația

$$r(m) = \overline{\xi_i\,\xi_{i+m}} \tag{8.115}$$

și este identică cu funcția de autocorelație $R(\tau)$ a procesului $\xi(t)$, eșantionată cu același pas $T = 1$ cu care s-a eșantionat $\xi(t)$ ca să se obțină eșantioanele ξ_i.

Procesul fiind ergodic avem:

$$r(m) = \overline{\xi_i \xi_{i+m}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, x(m+k) \tag{8.116}$$

În cazul în care valoarea medie a eșantioanelor este nulă, funcția de corelație (8.115) *este egală cu funcția de covariație* (8.108).

8.5.7. Estimarea unor caracteristici statistice ale secvențelor de date. Tehnici de analiză spectrală

În probleme de prelucrare a semnalului, de multe ori este necesar să se cunoască valoarea medie și dispersia, distribuția și alți parametri caracteristici ai secvenței de date. Aceste determinări trebuie făcute pe baza datelor observate $x(0)$, $x(1)$, ..., $x(N-1)$.

8.5.7.1. Estimarea valorilor medii

Se consideră valoarea medie statistică:

$$\overline{\xi} \cong \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) = \hat{m}_x \tag{8.117}$$

unde cu m_x s-a notat valoarea medie statistică a lui ξ, iar „$\wedge$" înseamnă valoarea estimată.

În unele aplicații valoarea medie a semnalului conține informație și deci determinarea ei reprezintă un proces de transmitere a informației. Astfel, de exemplu, în sistemele de aterizare automată o mediere de tipul (8.117) dă viteza medie de zbor.

În legătură cu estimarea valorii medii se pune problema de a ști cît este de bună această estimare și dacă prin creșterea lui N estimarea se îmbunătățește.

Realizări diferite ale secvenței $x(0)$, $x(1)$, ..., $x(N-1)$ dau valori diferite ale estimatului $\hat{m}_x$.

Mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua acest estimat, formează o V.A. pe care o notăm cu $\hat{\mu}_x$.

Estimatul dat de (8.117) se spune că este *nedeplasat* (bun în medie) dacă:

$$\overline{\hat{\mu}_x} = \overline{\xi} = m_x \tag{8.118}$$

Dacă estimarea se îmbunătățește pe măsură ce N crește, atunci eroarea de estimare trebuie să scadă conform relației:

$$\lim_{N \to \infty} \overline{(\hat{\mu}_x - m_x)^2} = 0 \tag{8.119}$$

Estimatul care are această proprietate se spune că este *consistent*.

Pentru a estima dispersia se procedează în mod analog:

$$\overline{(\xi - m_x)^2} \cong \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [x(k) - \hat{m}_x]^2 = \hat{\sigma}_x^2 \tag{8.120}$$

8.5.7.2. Histograma

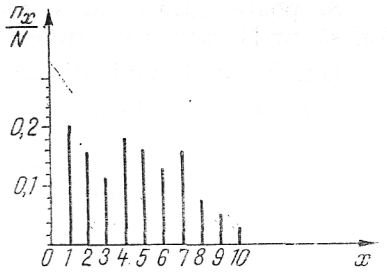


Fig. 8.17. Histogramă.

În cazurile în care din considerente teoretice (teorema limită centrală) nu putem afirma că V.A. ξ_n are o distribuție gaussiană (sau alt tip de distribuție), estimarea distribuției bazată pe eșantioanele $x(n)$ observate, se face printr-o histogramă.

Pentru a construi o histogramă este necesară cuantizarea nivelelor datelor observate.

Histograma de ordinul întîi (estimarea densității de probabilitate de ordinul întîi) se construiește punînd în abscisă valorile cuantizate ale unui eșantion, iar în ordonată numărul de eșantioane care corespund fiecărui nivel, împărțit cu N numărul total de eșantioane (fig. 8.17). Cu cît N este mai mare și cu cît cuantele sînt mai mici, cu atît histograma aproximează mai exact densitatea de probabilitate.

8.5.7.3. Periodograma

Să considerăm o secvență $x(n)$ care provine dintr-un semnal aleator staționar, ergodic a cărui densitate spectrală de putere $p(e^{j\omega})$ dorim să o estimăm pe baza observării unui număr finit de date $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$.

Estimatul notat cu $\hat{p}(e^{j\omega})$ se numește **periodogramă.**

Densitatea spectrală de putere este dată de relația (8.101).

$$p(z) = \frac{1}{N} X(z)\, X(z^{-1}) \tag{8.121}$$

iar

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{8.122}$$

Datorită faptului că din seria (8.122) nu luăm în considerare decît un număr finit de termeni se introduc erori (*fenomenul Gibbs*) care pot fi micșorate dacă secvența infinită $x(n)$ se înmulțește cu o secvență finită $w(n)$ de lungime N cu anumite proprietăți, numită **fereastră.**

Notăm cu $x_N(n)$ produsul:

$$x_N(n) = w(n)\, x(n) \tag{8.123}$$

Notăm:

$$X_N(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)\, x(n)\, z^{-n} \tag{8.124}$$

Dacă în relația (8.121) introducem această valoare obținem:

$$\hat{p}(z) = \frac{1}{N} X_N(z)\, X_N(z^{-1}). \tag{8.125}$$

Dacă facem evaluarea pe cercul unitate se obține periodograma:

$$\hat{p}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2 \tag{8.126}$$

Se poate arăta că acest estimat este nedeplasat, însă pentru ca dispersia lui să tindă către zero trebuie aleasă în mod convenabil fereastra $w(n)$.

Din ferestrele mai utilizate menționăm:

— *fereastra rectangulară:*

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{N-1}{2} \leqslant n \leqslant \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{în afară} \end{cases} \tag{8.127}$$

— *fereastra Hanning* (caz particular al ferestrei Hamming)

$$w_H(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{N} n\right) & -\frac{N-1}{2} \leqslant n \leqslant \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{în afară} \end{cases} \tag{8.128}$$

8.5.8. Trecerea secvențelor de date prin sisteme liniare, invariante în timp

O secvență de date conform relației (8.45) poate fi scrisă:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, \delta_0(n-m) \tag{8.129}$$

Răspunsul sistemului liniar la impulsul digital $\delta_0(n)$ se notează cu $h(n)$ și se numește *funcția de pondere a sistemului discret în timp*. Ea este identică cu secvența obținută prin eșantionarea efectuată la ieșirea unui sistem continuu, căruia i se aplică la intrare $\delta(t)$ așa cum se arată în fig. 8.18.

Sistemul fiind invariant în timp, răspunsul la impulsul digital întîrziat $\delta_0(n-m)$ va fi $h(n-m)$. Sistemul fiind liniar, multiplicarea lui $\delta_0(n-m)$ cu $x(m)$ are ca urmare multiplicarea lui $h(n-m)$ cu $x(m)$. Deci răspunsul la secvența $\{x(n)\}$ va fi:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, h(n-m) \overset{\Delta}{=} x(n) * h(n) \tag{8.130}$$

sau

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)\, h(m) \overset{\Delta}{=} x(n) * h(n) \tag{8.131}$$

În general sistemele discrete sînt formate din sumatoare, multiplicatoare cu constante și circuite de întîrziere cu T. Sistemele discrete sînt descrise de ecuații cu diferențe finite.

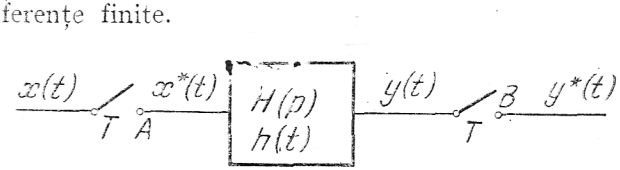


Fig. 8.18. Eșantionare la ieșirea din sistemul continuu.

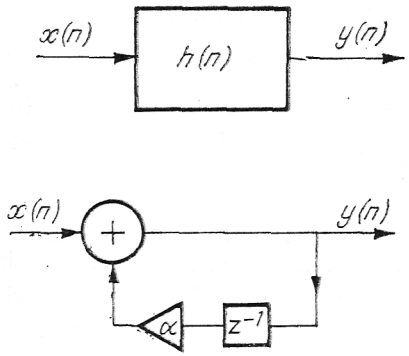


Fig. 8.19. Sistem discret de ordinul întîi.

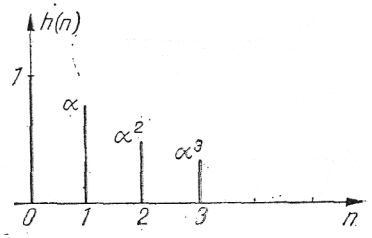


Fig. 8.20. Funcția de pondere.

În fig. (8.19) este arătat sistemul discret care corespunde ecuației cu diferențe finite:

$$y(n) = x(n) + \alpha y(n-1) \tag{8.132}$$

Pentru a determina funcția de pondere $h(n)$ aplicăm la intrare $x(n) = \delta_0(n)$ și la ieșire se obține:

$$h(n) = \delta_0(n) + \alpha\delta_0(n-1) + \alpha^2\delta_0(n-2) + \ldots \tag{8.133}$$

Pentru ca sistemul să fie stabil trebuie ca $\alpha < 1$.

În fig. (8.20) este reprezentat $h(n)$.

În loc de a caracteriza sistemul prin funcția de pondere $h(n)$, în multe cazuri este mai comod de a-l caracteriza prin:

— *transformata Fourier discretă a lui* $h(n)$

$$H(k) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)\, W^{km} \tag{8.134}$$

$$h(m) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\, W^{-km} \tag{8.135}$$

— *serii Fourier discrete*

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, e^{-j\omega m} \tag{8.136}$$

$$h(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{j\omega})\, e^{jm\omega}\, d\omega \tag{8.137}$$

— *transformata* Z

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n} \tag{8.138}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint H(z)\, z^{n-1}\, dz \tag{8.139}$$

Răspunsul sistemului discret dat de convoluțiile (8.130) și (8.131) se determină în acest caz din produsul:

$$Y(k) = H(k) \cdot X(k) \tag{8.140}$$

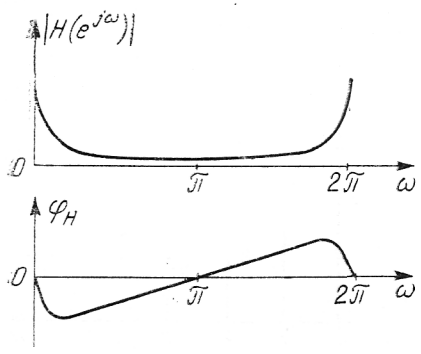


Fig. 8.21. Modulul și faza funcției $H(e^{j\omega})$.

în cazul *TFD*, relația (8.85) și

$$Y(z) = H(z)\, X(z) \tag{8.141}$$

în cazul transformatei Z, relația (8.86).

În aceste relații $H(k)$ și $H(z)$ sînt funcții diferite.

Dacă sistemul este specificat printr-o ecuație cu diferențe finite, se face transformarea termen cu termen. Astfel, în cazul ecuației (8.132) aplicînd transformata Z termen cu termen se obține:

$$Y(z) = X(z) = \alpha z^{-1}\, Y(z) \tag{8.142}$$

de unde rezultă funcția de transfer în planul z:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \tag{8.143}$$

Dacă punem $z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ se obține $H(k)$.

Sistemele specificate de *ecuații cu diferențe finite* se numesc **filtre numerice.** Ele se caracterizează prin faptul că *funcția de transfer în domeniul frecvență* $H(e^{j\omega})$ *este periodică.*

Dacă ne referim la ecuația (8.132), respectiv la funcția $H(z)$ din relația (8.143), avem:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \tag{8.144}$$

ale cărei modul și fază sînt date în fig. 8.21.

● **Densitatea spectrală de putere la ieșirea din filtrul numeric.** Fie $p_x(z)$ densitatea spectrală de putere la intrarea într-un filtru digital caracterizat de funcția de transfer $H(z)$. Se pune problema determinării densității spectrale $p_y(z)$ la ieșirea din filtru. Conform (8.101) avem:

$$p_x(z) = \frac{1}{N} X(z)\, X(z^{-1}) \tag{8.145}$$

și

$$p_y(z) = \frac{1}{N} Y(z)\, Y(z^{-1}) \tag{8.146}$$

Dar:

$$Y(z) = H(z)\, X(z) \tag{8.147}$$

și

$$Y(z^{-1}) = H(z^{-1})\, X(z^{-1}) \tag{8.148}$$

Din aceste relații rezultă:

$$p_y(z) = H(z)\, H(z^{-1})\, p_x(z) \tag{8.149}$$

făcînd evaluarea pe cercul unitate se obține:

$$p_y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 p_x(e^{j\omega}) \tag{8.150}$$

Exemplu. Să considerăm că la intrare în filtrul numeric aplicăm un zgomot alb care, după cum se știe, are o densitate spectrală de putere constantă:

$$p_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} N_0 \tag{8.151}$$

și o funcție de autocorelație:

$$r(n) = Z^{-1}\{p_x(z)\}_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{2} N_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{jn\omega}\, d\omega = \frac{1}{2} N_0 \delta_0(n) \tag{8.152}$$

Să presupunem că $H(z)$ este de forma dată de relația (8.143). În acest caz:

$$p_y(z) = \frac{1}{2} N_0 \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \frac{1}{1 - \alpha z} \tag{8.153}$$

Luînd transformata Z inversă se obține:

$$r(n) = \frac{1}{1 - \alpha^2} \alpha^{|n|} \tag{8.154}$$

Se observă, ca și în cazul filtrelor continue, că *filtrele discrete în timp introduc o corelație între eșantioanele secvenței la ieșirea din filtru.*

CAPITOLUL 9

DETECȚIA SEMNALELOR

Teoria detecției semnalelor, împreună cu *teoria estimării parametrilor* și cu *teoria estimării formei semnalului* (teoria filtrării optimale) fac parte din **teoria deciziilor statistice.**

9.1. Modelul unui sistem de transmisiune cu detecția semnalelor

În teoria detecției prezenței semnalelor se consideră cazurile în care sursa de mesaje generează variabile aleatoare discrete, adică este o sursă discretă. Se presupune că sursa generează un număr finit de simboluri: S_0, S_1, ..., S_{M-1}.

Astfel de simboluri pot fi considerate de exemplu:

— simbolurile 0 și 1 în cazul transmisiunilor în cod;

— prezența sau absența unui avion în cazul radarului;

— prezența sau absența unei nave în cazul sonarului etc.

Modelul unui sistem de transmisiune cu detecția prezenței semnalului este reprezentat în fig. 9.1.

Mesajele purtătoare de informație generate de sursă se transmit spre utilizare cu ajutorul unor semnale purtătoare supuse unui proces de modulare.

Semnalele purtătoare pot fi clasificate în trei grupe:

— *semnale deterministe;*

— *semnale condiționat deterministe*[1] (cu parametri aleatori);

— *semnale aleatoare.*

În cazul cînd purtătoarea este un semnal determinist, fiecărui simbol S_0, S_1, ..., S_{M-1} emis de sursă îi corespunde la ieșirea din modulator un semnal cunoscut: $s_0(t)$, $s_1(t)$, ..., $s_{M-1}(t)$.

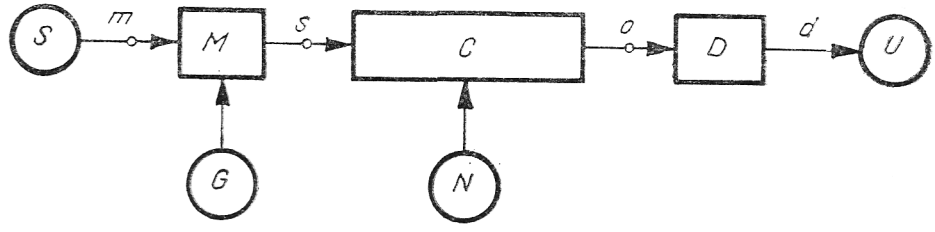


Fig. 9.1. Modelul unui sistem de detecție:
S — sursă; M — modulare; G — generator de purtătoare; C — canal; N — sursă de perturbații; D — receptor care ia decizii; U — utilizare; m — mesaj; s — semnal transmis; o — observații (semnal recepționat); d — decizie.

[1] Se numesc **semnale condiționat deterministe** semnalele care sînt *complet determinate prin cunoașterea unor parametri aleatori ai acestora.*

În cazul cînd purtătoarea este un semnal condiționat determinist, fiecărui simbol emis de sursă îi corespunde un semnal:

$$s_0(t, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n), \quad s_1(t, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n), ..., \quad s_{M-1}(t, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$$

la care unul sau mai mulți parametri $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ nu sînt cunoscuți.

În cazul cînd purtătoarea este un semnal aleator, fiecărui simbol generat de sursă îi corespunde un semnal aleator:

$$\xi_0(t), \xi_1(t), ..., \xi_{M-1}(t) \text{ cu proprietăți statistice diferite.}$$

Modularea semnalului purtător de către sursa de mesaje poate fi făcută fie într-un modulator convențional (de modulare în amplitudine, frecvență, fază etc.) fie prin reflexia unor semnale ca în cazul radarului sau în alte moduri prin care unul din parametrii semnalului purtător este variat transmițînd informația dată de sursă.

Semnalul modulat este transmis printr-un *canal* (care include și partea frontală a receptorului) în care apar *perturbații aditive*. Toate celelalte perturbații care afectează semnalul transmis prin canal, ca de exemplu *perturbațiile multiplicative*, se consideră în cele ce urmează că *sînt plasate în modulator*.

Astfel, de exemplu, dacă un semnal purtător sinusoidal suferă variații de fază aleatoare, la trecerea prin canal, se va considera că acestea sînt produse de generatorul de semnale purtătoare și nu de canal. Canalul are ca singur efect însumarea unor perturbații la semnalul transmis.

La recepție se fac ipoteze cu privire la simbolurile furnizate de sursă. Fiecare ipoteză: $H_0, H_1, ..., H_{M-1}$ se referă la cîte un simbol: $S_0, S_1, ..., S_{M-1}$ generat de sursă.

Pe baza semnalului recepționat la ieșirea din canal, receptorul ia decizii, în scopul de a stabili ce ipoteză — respectiv care simbol generat de sursă — corespunde semnalului recepționat. La ieșirea din receptor se iau decizii: $D_0, D_1, ..., D_{M-1}$ care se transmit la utilizare. Dacă în procesul de transmisiune nu intervin erori, atunci între mesajele generate de sursă și deciziile elaborate de receptor există o corespondență biunivocă.

Trecerea de la spațiul mesajelor la spațiul deciziilor este ilustrată în fig. 9.2. *Spațiul mesajelor* (mulțimea tuturor mesajelor din punctul *m* în fig. 9.1) este transformat în *spațiul observațiilor* (mulțimea tuturor semnalelor din punctul *o* în fig. 9.1) printr-un mecanism guvernat de legi probabilistice. Spațiul observațiilor, respectiv al semnalelor recepționate, este transformat în *spațiul deciziilor* cu ajutorul unor reguli de decizie. În cazul ideal, între spațiul mesajelor și spațiul deciziilor trebuie să existe o *corespondență biunivocă*. Acest lucru nu este posibil în toate cazurile fiindcă prezența perturbațiilor face ca unele decizii să fie greșite. Regulile de decizie trebuie astfel alese încît pe baza unui criteriu de fidelitate ales să se obțină rezultatele cele mai bune.

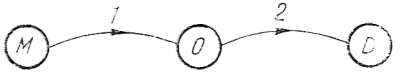


Fig. 9.2. Trecerea de la spațiul mesajelor de spațiul deciziilor:
M — spațiul mesajelor; *O* — spațiul observațiilor; *D* — spațiul deciziilor; 1 — mecanism de tranziție generat de legi statistice; 2 — reguli de decizie.

În cazul în care unui punct (*m*) din spațiul mesajelor îi corespunde un punct (*s*) în spațiul semnalului modulat (v. fig. 9.1), se spune că *ipotezele sînt simple*. În cazul în care cel puțin unui punct din spațiul me-

sajelor îi corespunde un domeniu în spațiul semnalului modulat, se spune că *ipotezele sînt compuse*.

Din punctul de vedere al observației se disting mai multe cazuri:

— *observațiile sînt variabile aleatoare*; ele se fac la diferite momente $(t_1, t_2, ..., t_N)$ în intervalul D de observare;

— *observațiile sînt procese aleatoare*. Semnalul este observat în mod continuu în tot timpul intervalului D.

9.2. Observarea în momente de timp discrete a unor variabile aleatoare

În acest caz se consideră situația cea mai frecventă cînd sursa generează numai două simboluri: S_0 și S_1, cărora le corespund semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$.

Cu privire la aceste două simboluri (respectiv semnale) se pot face două ipoteze: H_0 și H_1 (H_0 este ipoteza că s-a transmis S_0 și H_1 este ipoteza că s-a transmis S_1).

Sistemul de recepție prelucrează semnalul recepționat, pentru a decide care din cele două ipoteze poate fi considerată adevărată, respectiv care este simbolul furnizat de sursă. În felul acesta el ia o decizie D_0 sau D_1.

Modelul unui sistem cu detecție binară este dat în fig. 9.3.

Semnalul recepționat (observat) este:

$$r(t) = s(t) + n(t) \tag{9.1}$$

unde:

$s(t)$ este semnalul transmis;

$n(t)$ — semnalul perturbator.

Dacă numărul observațiilor efectuate în diferite momente este N, atunci spațiul observațiilor este N-dimensional. Durata semnalului $s_0(t)$ sau $s_1(t)$ este T și ea coincide cu timpul în care se fac observațiile.

Eșantioanele semnalului recepționat (valorile observate): $r_1, r_2, ..., r_N$ determină un punct de coordonate $(r_1, r_2, ..., r_N)$ în spațiul observațiilor, respectiv un vector $\vec{r}$. În cele ce urmează se vor utiliza din motive de simplitate următoarele notații:

$$\begin{aligned} p(r_1, r_2, ..., r_N/S_0) &= p(\vec{r}/S_0) \\ p(r_1, r_2, ..., r_N/S_1) &= p(\vec{r}/S_1) \end{aligned} \tag{9.2}$$

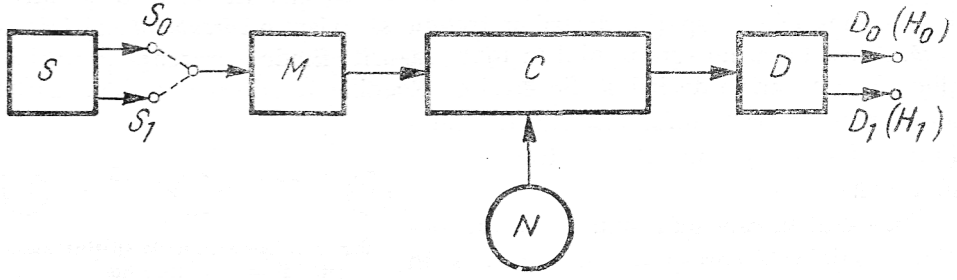


Fig. 9.3. Modelul unui sistem de detecție binară:

S — sursă; M — modulare, C — canal; N — sursă de perturbații; D — receptor care ia decizii; S_0, S_1 — simboluri emise de sursă; H_0, H_1 — ipoteze; D_0, D_1 — decizii.

pentru densitățile de probabilitate condiționate, iar:

$$dr_1\, dr_2 \ldots dr_N = dR \tag{9.3}$$

pentru volumul diferențial în jurul punctului $\vec{r}$.

Se convine în cele ce urmează, că funcțiile notate cu $p(\ \ )$ pot să fie diferite dacă notația argumentelor este diferită. De asemenea, în cazurile în care nu pot fi făcute confuzii, variabilele aleatoare și valorile pe care le iau acestea vor fi notate cu aceeași literă.

9.2.1. Criterii de decizie

Criteriile de decizie, respectiv **regulile de decizie,** *permit ca pe baza observațiilor efectuate să se poată face unele afirmații privind simbolurile generate de sursă.*

Astfel, de exemplu, spațiul observațiilor poate fi împărțit în două regiuni Δ_0 și Δ_1, așa cum se arată în fig. 9.4. Dacă punctul reprezentativ al semnalului observat $\vec{r}$ cade în regiunea Δ_0, se afirmă că sursa a generat semnalul $s_0(t)$, adică se ia decizia D_0 (sau se afirmă că ipoteza H_0 este adevărată). Dacă punctul reprezentativ al semnalului observat $\vec{r}$ cade în regiunea Δ_1 se afirmă că sursa a generat semnalul $s_1(t)$, adică se ia decizia D_1 (sau se afirmă că ipoteza H_1 este adevărată).

În acest caz, spațiul deciziilor este format din două puncte: unul, D_0 corespunzător regiunii Δ_0 iar altul, D_1, corespunzător regiunii Δ_1.

Spațiul observațiilor poate fi împărțit și în trei regiuni, regiunea a treia corespunzînd cazului în care nu se poate afirma nimic despre semnalele generate de sursă.

În acest caz spațiul deciziilor este format din trei puncte, fiecare corespunzînd unei regiuni din spațiul observațiilor.

În cele ce urmează se consideră numai cazul cînd spațiul observațiilor. cu ajutorul regulilor de decizie, este împărțit în două domenii Δ_0 și Δ_1.

În procesul de transmisiune semnalul $s(t)$ este afectat de perturbații. Deoarece la recepție deciziile se iau pe baza semnalului recepționat $r(t)$ pot să apară următoarele situații:

— *sursa generează semnalul* $s_0(t)$ *și punctul observat cade în domeniul* Δ_0, *respectiv se decide că ipoteza* H_0 *este adevărată;*

— *sursa generează semnalul* $s_1(t)$ *și punctul observat cade în domeniul* Δ_1, *respectiv se decide că ipoteza* H_1 *este adevărată;*

— *sursa generează semnalul* $s_0(t)$ *și punctul observat cade în domeniul* Δ_1, *respectiv se decide că ipoteza* H_1 *este adevărată;*

— *sursa generează semnalul* $s_1(t)$ *și punctul observat cade în domeniul* Δ_0, *respectiv se decide că ipoteza* H_0 *este adevărată.*

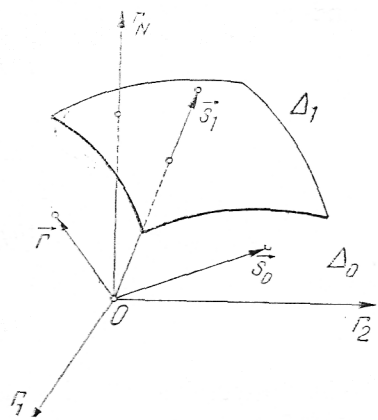


Fig. 9.4. Spațiul semnalului transmis.

Primele două situații corespund unor decizii corecte, iar ultimele două unor decizii eronate.

Pentru a face o distincție între semnalele generate de sursă și deciziile luate pe baza observațiilor, se va nota în cele ce urmează cu D_0 decizia că ipoteza H_0 este adevărată și cu D_1 decizia că ipoteza H_1 este adevărată.

Criteriul lui Bayes. Regula de decizie a lui Bayes permite să se țină seama de faptul că cele patru situații în care se iau decizii:

— *se ia decizia* D_0 *cînd sursa generează simbolul* S_0;
— *se ia decizia* D_1 *cînd sursa generează simbolul* S_1;
— *se ia decizia* D_1 *cînd sursa generează simbolul* S_0;
— *se ia decizia* D_0 *cînd sursa generează simbolul* S_1;

au consecințe diferite pentru utilizator.

Aceste consecințe sînt exprimate numeric prin *factori de pondere* numiți **costuri.**

Costurile celor patru situații posibile se notează cu C_{ij}, unde primul indice arată decizia luată (D_i), iar al doilea indice simbolul generat de sursă (S_j).

Costurile pot fi scrise sub forma matriceală:

$$\begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} D_0 & D_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} C_{00} & C_{10} \\ C_{01} & C_{11} \end{bmatrix} \end{array} \tag{9.4}$$

Regula lui Bayes presupune cunoscute probabilitățile apriori P_0 și P_1 ale simbolurilor S_0 și S_1.

În conformitate cu cele precedente, fiecare decizie luată pe baza observării punctului $\vec{r}$ în spațiul observațiilor are un anumit cost.

Regula lui Bayes *constă în partiția spațiului* Δ *al observațiilor în două domenii* (subspații): Δ_0 și Δ_1, *astfel alese încît costul mediu să fie minim.*

Costul mediu se numește **risc** și are expresia:

$$R = \bar{C} = \sum CP = C_{00}P(D_0 \cap S_0) + C_{11}P(D_1 \cap S_1) + C_{10}P(D_1 \cap S_0) + \\ + C_{01}P(D_0 \cap S_1)$$

respectiv:

$$R = C_{00}P_0P(D_0/S_0) + C_{11}P_1P(D_1/S_1) + C_{10}P_0P(D_1/S_0) + \\ + C_{01}P_1P(D_0/S_1) \tag{9.5}$$

unde:

$$P(D_0/S_0) = \int_{\Delta_0} p(\vec{r}/S_0)\,dR \tag{9.6}$$

$$P(D_1/S_1) = \int_{\Delta_1} p(\vec{r}/S_1)\,dR \tag{9.7}$$

$$P(D_1/S_0) = \int_{\Delta_1} p(/\vec{r}/S_0)\,dR \tag{9.8}$$

$$P(D_0/S_1) = \int_{\Delta_0} p(\vec{r}/S_1)\,dR \tag{9.9}$$

toate integralele avînd ordinul de multiplicitate N (dimensiunea spațiului observațiilor Δ).

Ținînd seama de cele precedente, riscul poate fi scris:

$$R = C_{00}P_0\int_{\Delta_0} p(\vec{r}/S_0)\,dR + C_{11}P_1\int_{\Delta_1} p(\vec{r}/S_1)\,dR +$$

$$+ C_{10}P_0\int_{\Delta_1} p(\vec{r}/S_0)\,dR + C_{01}P_1\int_{\Delta_0} p(\vec{r}/S_1)\,dR \tag{9.10}$$

Fiindcă:

$$\int_{\Delta_1} p(\vec{r}/S_0)\,dR + \int_{\Delta_0} p(\vec{r}/S_0)\,dR = \int_{\Delta} p(\vec{r}/S_0)\,dR = 1 \tag{9.11}$$

și

$$\int_{\Delta_1} p(\vec{r}/S_1)\,dR + \int_{\Delta_0} p(\vec{r}/S_1)\,dR = \int_{\Delta} p(\vec{r}/S_1)\,dR = 1 \tag{9.12}$$

expresia riscului poate fi scrisă:

$$R = C_{00}P_0\int_{\Delta_0} p(\vec{r}/S_0)\,dR + C_{11}P_1\left[1 - \int_{\Delta_0} p(\vec{r}/S_1)\,dR\right] +$$

$$+ C_{10}P_0\left[1 - \int_{\Delta_0} p(\vec{r}/S_0)\,dR\right] + C_{01}P_1\int_{\Delta_0} p(\vec{r}/S_1)\,dR + C_{00}P_0 - C_{00}P_0$$

$$R = C_{00}P_0 + C_{11}P_1 + (C_{10} - C_{00})\,P_0 +$$

$$+\int_{\Delta_0} [(C_{01} - C_{11})\,P_1 p(\vec{r}/S_1) - (C_{10} - C_{00})\,P_0 p(\vec{r}/S_0)]\,dR \tag{9.13}$$

Presupunînd costul unei decizii eronate mai mare decît costul unei decizii corecte, rezultă:

$$C_f = C_{10} - C_{00} > 0 \tag{9.14}$$

$$C_m = C_{01} - C_{11} > 0 \tag{9.15}$$

iar riscul poate fi scris:

$$R = C_{00}P_0 + C_{11}P_1 + C_fP_0 +$$

$$+\int_{\Delta_0} [C_mP_1p(\vec{r}/S_1) - C_fP_0p(\vec{r}/S_0)]\,dR \tag{9.16}$$

Fiindcă primii trei termeni sînt constanți, riscul este minim cînd integrala este minimă.

Dat fiind că cei trei termeni ai integrandului sînt pretutindeni nenegativi, rezultă că integrala atinge valoarea minimă cînd domeniul de integrare Δ_0 include punctele pentru care

$$C_fP_0p(\vec{r}/S_0) > C_mP_1p(\vec{r}/S_1) \tag{9.17}$$

Punctele $\vec{r}$ ale spațiului Δ care satisfac inegalitatea

$$C_mP_1p(\vec{r}/S_1) > C_fP_0(\vec{r}/S_0) \tag{9.18}$$

se includ în domeniul Δ_1.

Rezultă că frontierea între domeniile Δ_0 și Δ_1 este dată de ecuația:

$$C_f P_0 p(\vec{r}/S_0) - C_m P_1 p(\vec{r}/S_1) = 0 \tag{9.19}$$

Din cele precedente rezultă că observațiile $\vec{r}$ care satisfac inegalitatea:

$$\frac{p(\vec{r}/S_1)}{p(\vec{r}/S_0)} < \frac{P_0 C_f}{P_1 C_m} \tag{9.20}$$

sînt atribuite domeniului Δ_0, respectiv în acest caz se ia decizia D_0 (se decide că ipoteza H_0 este adevărată).

Dacă observațiile $\vec{r}$ satisfac inegalitatea:

$$\frac{p(\vec{r}/S_1)}{p(\vec{r}/S_0)} > \frac{P_0 C_f}{P_1 C_m} \tag{9.21}$$

ele sînt atribuite domeniului Δ_1, iar decizia luată este D_1 (se decide că ipoteza H_1 este adevărată).

Sub o formă condensată se poate scrie:

$$\frac{p(\vec{r}/S_1)}{p(\vec{r}/S_0)} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \frac{P_0 C_f}{P_1 C_m} \tag{9.22}$$

Membrul întîi al acestei inegalități se numește **raport de plauzibilitate** și se notează cu:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{p(\vec{r}/S_1)}{p(\vec{r}/S_0)} \tag{9.23}$$

Raportul de plauzibilitate este o *variabilă aleatoare* fiindcă este o funcție reală de spațiul eșantioanelor Δ.

Indiferent de dimensiunea spațiului Δ al observațiilor (eșantioanelor), variabila $\Lambda(\vec{r})$ *are o singură dimensiune.*

Membrul al doilea al inegalității (9.22) este numit **pragul testului:**

$$K = \frac{P_0 C_f}{P_1 C_m} \tag{9.24}$$

Ținînd seama de notațiile precedente, criteriul lui Bayes poate fi scris:

$$\Lambda(\vec{r}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K \tag{9.25}$$

Observarea unui punct particular $\vec{r}$ (dedus din N observații) este testată calculînd numărul $\Lambda(\vec{r})$ și comparîndu-l cu K.

Dacă:

$$\Lambda(\vec{r}) > K \tag{9.26}$$

se decide că $\vec{r}$ provine din semnalul $\vec{s}_1$, respectiv corespunde simbolului S_1.

Dacă:

$$\Lambda(\vec{r}) < K \tag{9.27}$$

se decide că $\vec{r}$ provine din semnalul $\vec{s}_0$, respectiv corespunde simbolului S_0.

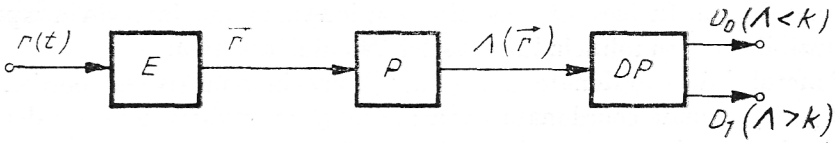


Fig. 9.5. Structura unui receptor pentru decizii binare:
E — dispozitiv de eșantionare; *P* — dispozitiv de prelucrare a datelor; *DP* — dispozitiv cu prag (comparator).

Criteriul lui Bayes duce la testarea raportului de plauzibilitate. *Criteriul lui Bayes* **este optim** în sensul că *nici o altă strategie nu duce la un risc mai mic*. Valoarea minimă a riscului obținut pe această cale se numește *riscul lui Bayes*.

Raportul de plauzibilitate $\Lambda(\vec{r})$ *depinde numai de datele observate și nu depinde de costuri sau probabilitățile apriori ale ipotezelor*. Acest lucru este important fiindcă de cele mai multe ori costurile și probabilitățile apriori sînt mărimi necunoscute.

Calculînd raportul de plauzibilitate $\Lambda(\vec{r})$, indiferent de costuri și probabilitățile apriori, există posibilitatea de a considera pragul K drept o mărime variabilă în funcție de valorile estimate ale costurilor și probabilităților apriori.

Fiindcă logaritmul este o funcție monotonă și ambii membri ai inegalității (9.25) sînt pozitivi, criteriul lui Bayes poate fi scris sub forma:

$$\ln \Lambda(\vec{r}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln K \tag{9.28}$$

Schema bloc a unui receptor care ia decizii pe baza criteriului lui Bayes este arătată în figura 9.5. Semnalul recepționat în intervalul $0 \leqslant t \leqslant D$ este:

$$r(t) = s(t) + n(t) \tag{9.29}$$

unde:

$s(t)$ este semnalul modulat;
$n(t)$ — perturbația.

Acest semnal este introdus într-un dispozitiv de eșantionare E la ieșirea căruia se obțin valorile eșantioanelor: $r_1, r_2, \ldots, r_N$. În dispozitivul de calcul P se calculează raportul de plauzibilitate $\Lambda(\vec{r})$ sau $\ln \Lambda(\vec{r})$ care se compară cu pragul K sau $\ln K$ în detectorul de prag DP. La ieșirea detectorului de prag se obține decizia, luată în conformitate cu relația (9.25) sau (9.28).

9.2.2. Statistică suficientă

După cum s-a văzut, se consideră că observațiile $r_1, r_2, \ldots, r_N$ determină un punct $\vec{r}$ în spațiul N-dimensional.

În evaluarea raportului de plauzibilitate $\Lambda(\vec{r})$ intervin cele N coordonate ale punctului $\vec{r}$.

Uneori, prin schimbarea sistemului de coordonate, se poate ajunge ca o singură coordonată a punctului $\vec{r}$ să conțină toată informația necesară

luării unei decizii. În acest caz celelalte coordonate nu mai intervin în raportul de plauzibilitate, simplificîndu-se astfel calculul acestuia.

Punctul $\vec{r}$ de coordonate $(r_1, r_2, ..., r_N)$ are în noul sistem coordonatele $(l, l_1, l_2, ..., l_{N-1})$ unde coordonata l conține toată informația necesară deciziei, iar celelalte coordonate nu afectează decizia.

Utilizînd același gen de notații ca în relațiile (9.2) și (9.3) se poate scrie:

$$p(l, l_1, l_2, ..., l_{N-1}/S_0) = p(l, \vec{L}/S_0) \tag{9.30}$$

și

$$p(l, l_1, l_2, ..., l_{N-1}/S_1) = p(l, \vec{L}/S_1) \tag{9.31}$$

Cu aceste notații raportul de plauzibilitate este:

$$\Lambda(\vec{r}) = \Lambda(l, \vec{L}) = \frac{p(l, \vec{L}/S_1)}{p(l, \vec{L}/S_0)}$$

sau

$$\Lambda(l, \vec{L}) = \frac{p(l/S_1)\, p(\vec{L}/l, S_1)}{p(l/S_0)\, p(\vec{L}/l, S_0)} \tag{9.32}$$

Pentru ca raportul de plauzibilitate $\Lambda(l, \vec{L})$ să nu depindă decît de l este necesar ca:

$$p(\vec{L}/l, S_1) = p(\vec{L}/l, S_0) \tag{9.33}$$

În acest caz:

$$\Lambda(\vec{r}) = \Lambda(l) = \frac{p(l/S_1)}{p(l/S_0)} \tag{9.34}$$

Coordonata $l(\vec{r})$ se numește o **statistică suficientă** și *permite exprimarea sub o formă mai simplă a raportului de plauzibilitate.*

Dacă l și $\vec{L}$ sînt independente, relația (9.33) se simplifică.

$$p(\vec{L}/S_1) = p(\vec{L}/S_0) \tag{9.35}$$

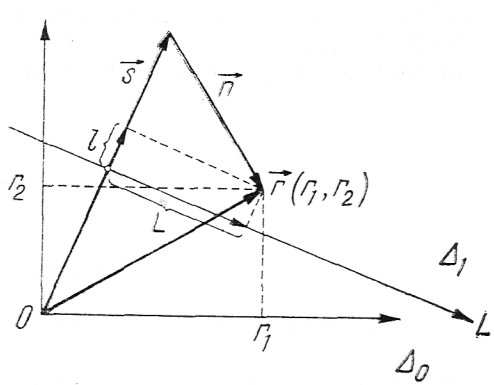


Fig. 9.6. Statistică suficientă.

și permite să se verifice cu ușurință dacă l este o statistică suficientă.

Egalitățile (9.33) respectiv (9.35) mai sînt cunoscute sub numele de **relații de irelevanță.**

Exemplu. Să considerăm cazul cel mai simplu, al unui spațiu bidimensional arătat în fig. 9.6, unde $s_0 = 0$ și $s_1 = s$, adică trebuie să detectăm prezența sau absența semnalului s în timpul de observare T.

Semnalul recepționat poate proveni din semnalul $\vec{s}$ la care se adaugă zgomotul canalului $\vec{n}$ sau poate proveni numai din zgomot, în absența semnalului $\vec{s}$. Frontiera

între domeniile Δ_0 și Δ_1 este perpendiculara dusă pe mijlocul vectorului $\vec{s}$. În acest fel toate punctele din Δ_1 sînt mai apropiate de punctul $\vec{s}$ decît de punctul „0". Dacă alegem sistemul de coordonate (l, L) se vede că decizia $\vec{r} \in \Delta_1$ sau $\vec{r} \in \Delta_0$ se ia numai în funcție de valoarea lui l. Pentru $l > 0$ se ia decizia D_1, iar pentru $l < 0$ se ia decizia D_0. Coordonata l este o statistică suficientă iar valoarea lui L nu afectează decizia.

9.2.3. Detecția unui semnal cunoscut

Se consideră cazul unei transmisiuni binare sincrone (în care la recepție se cunosc: amplitudinea a, durata D a unui impuls și momentele $t_1, t_2, \ldots, t_n$.. de apariție sau dispariție a impulsurilor (recepție coerentă) așa cum se arată în fig. 9.7.

În fiecare interval $D = t_n - t_{n-1}$ receptorul ia N eșantioane $r_1, r_2, \ldots, r_N$ ale semnalului recepționat:

$$r(t) = s(t) + n(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant D \tag{9.36}$$

unde:

$s(t)$ este semnalul format de succesiunea de impulsuri de durată D;

$n(t)$ — zgomotul alb cu o distribuție gaussiană.

În ipoteza H_0, semnalul nu este prezent (sursa emite simbolul S_0), iar eșantioanele sînt date numai de zgomot:

$$r_1 = n_1, \; r_2 = n_2, \ldots, r_N = n_N$$

unde:

n_i — sînt eșantioanele zgomotului, considerate variabile aleatoare gaussiene, independente, cu valoare medie nulă și cu dispersie σ^2.

În ipoteza H_1, pe lîngă zgomot este prezent și semnalul (sursa emite simbolul S_1), iar eșantioanele sînt:

$$r_1 = a + n_1, \; r_2 = a + n_2, \ldots, r_N = a + n_N$$

Densitatea de probabilitate a zgomotului este:

$$p(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}} \tag{9.37}$$

Densitatea de probabilitate a eșantioanelor observate este:

— în ipoteza H_0:

$$p(r_i/S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}} \tag{9.38}$$

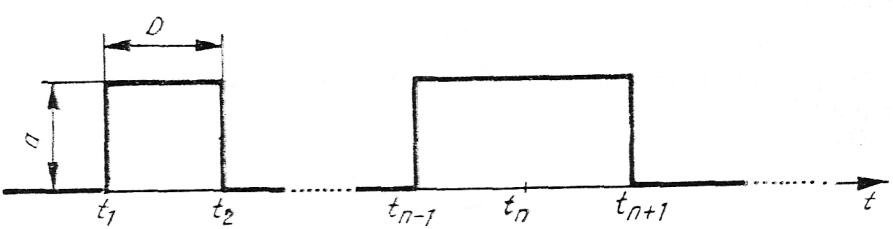


Fig. 9.7. Semnalul în cazul unei transmisiuni binare sincrone.

— în ipoteza H_1:

$$p(r_i/S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r_i-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{9.39}$$

Presupunînd că eșantioanele zgomotului sînt independente, se obține:

$$p(\vec{r}/S_0) = p(r_1, r_2, ..., r_N/S_0) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}} \tag{9.40}$$

$$p(\vec{r}/S_1) = p(r_1, r_2, ..., r_N/S_1) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r_i-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{9.41}$$

Raportul de plauzibilitate, conform relației (9.23), este:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r_i-a)^2}{2\sigma^2}}}{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}}} \tag{9.42}$$

sau

$$\Lambda(\vec{r}) = e^{-\frac{Na^2}{2\sigma^2} + \frac{a}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} r_i} \tag{9.43}$$

și

$$ln\, \Lambda(\vec{r}) = \frac{a}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} r_i - \frac{Na^2}{2\sigma^2} \tag{9.44}$$

Se observă că suma observațiilor $\sum_{i=1}^{N} r_i$ este o statistică suficientă fiindcă raportul de plauzibilitate depinde de valorile observate numai prin intermediul sumei:

$$\sum_{i=1}^{N} r_i$$

Considerînd că ambele ipoteze H_0 și H_1 sînt la fel de probabile ($P_0 = P_1$) și considerînd costurile $C_{00} = C_{11} = 0$ și $C_{01} = C_{10} = 1$, *pragul testului* este:

$$K = \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})} = 1 \tag{9.45}$$

respectiv:

$$ln\, K = 0$$

Deci receptorul trebuie să calculeze $ln\, \Lambda(\vec{r})$ și să compare valoarea obținută cu pragul 0.

Dacă:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} r_i > \frac{a\sqrt{N}}{2} \tag{9.46}$$

receptorul ia decizia D_1.

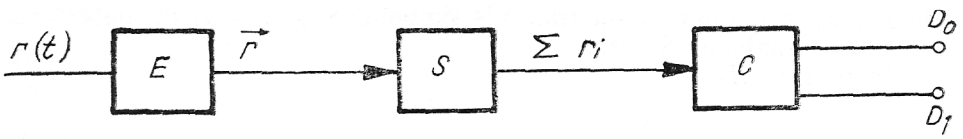


Fig. 9.8. Structura unui receptor pentru detectarea unui semnal cunoscut:
E — dispozitiv de eşantionare; *S* — sumator; *C* — comparator.

Dacă:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} r_i < \frac{a\sqrt{N}}{2} \tag{9.47}$$

receptorul ia decizia D_0.

Pentru valori ale pragului K diferite de 1 se obţine

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} r_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma}{a\sqrt{N}} \ln K + \frac{a\sqrt{N}}{2\sigma} \tag{9.48}$$

sau

$$\sum_{i=1}^{N} r_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{a} \ln K + \frac{aN}{2}$$

În fig. 9.8 se indică schema bloc a receptorului corespunzător.

9.2.4. Detecţia a două semnale

Să presupunem că simbolurilor S_0, respectiv S_1 generate de sursă le corespund semnalele:

$$s_0(t) = a_0 s(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant D \tag{9.49}$$

$$s_1(t) = a_1 s(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant D \tag{9.50}$$

unde $s(t)$ este un semnal cunoscut, iar a_0 şi a_1 sînt valorile pe care le ia variabila aleatoare α care pune în corespondenţă simbolurile generate de sursă (S_0 şi S_1) cu semnalele $s_0(t)$ şi $s_1(t)$. În particular, dacă $a_0 = -1$ şi $a_1 = +1$ avem reprezentarea din fig. 9.9.

Presupunem ca şi în cazul precedent, că zgomotul este gaussian cu valoarea medie nulă şi cu dispersie σ^2. În consecinţă, *densitatea de probabilitate a unui eşantion* este:

$$p(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}} \tag{9.51}$$

Densitatea de probabilitate a eşantioanelor semnalului recepţionat:

$$r(t) = \alpha s(t) + n(t) \tag{9.52}$$

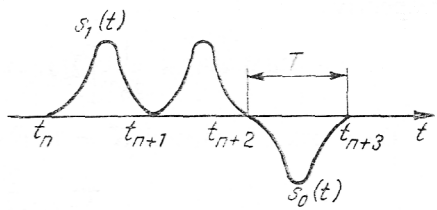


Fig. 9.9. Succesiune de semnale binare.

unde $\alpha = a_0$ în ipoteza că s-a transmis simbolul S_0 și $\alpha = a_1$ în ipoteza că s-a transmis simbolul S_1 este:

— în iporeza H_0:

$$p(r_i/S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r_i - a_0 s_i)^2} \tag{9.53}$$

— în ipoteza H_1:

$$p(r_i/S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r_i - a_1 s_i)^2} \tag{9.54}$$

unde s_i sînt eșantioanele semnalului $s(t)$.

Variabilele aleatoare r_i condiționate de α (respectiv de S_0 și de S_1) sînt independente fiindcă și eșantioanele n_i ale zgomotului sînt independente, prin urmare avem:

$$p(\vec{r}/S_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r_i - a_0 s_i)^2} \tag{9.55}$$

și

$$p(\vec{r}/S_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r_i - a_1 s_i)^2} \tag{9.56}$$

sau

$$p(\vec{r}/S_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i - a_0 s_i)^2} \tag{9.57}$$

și

$$p(\vec{r}/S_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i - a_1 s_i)^2} \tag{9.58}$$

Raportul de plauzibilitate este:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{p(\vec{r}/S_1)}{p(\vec{r}/S_0)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{N}(r_i - a_1 s_i)^2 - \sum_{i=1}^{N}(r_i - a_0 s_i)^2\right]} \tag{9.59}$$

sau

$$ln\,\Lambda(\vec{r}) = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}[(r_i - a_0 s_i)^2 - (r_i - a_1 s_i)^2] \tag{9.60}$$

respectiv

$$ln\,\Lambda(\vec{r}) = \frac{1}{2\sigma^2}\left[2(a_1 - a_0)\sum_{i=1}^{N} r_i s_i + (a_0^2 - a_1^2)\sum_{i=1}^{N} s_i^2\right] \tag{9.61}$$

Dacă pragul testului $K = 1$ (respectiv $P_0 = P_1$ și $C_f = C_n$) avem

$$\sum_{i=1}^{N} r_i s_i \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \frac{a_0 + a_1}{2}\sum_{i=1}^{N} s_i^2 \tag{9.62}$$

În cazul particular cînd $a_0 = 0$ și $a_1 = 1$ iar $s_i = a$ se obține cazul precedent, respectiv testul dat de relația (9.47).

Dacă $a_0 = -1$ și $a_1 = +1$ se obține testul:

$$< \vec{r} \cdot \vec{s} > = \sum_{i=1}^{N} r_i s_i \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} 0 \tag{9.63}$$

adică *se compară cu zero suma observațiilor ponderate cu eșantioanele semnalului* $s(t)$ *cunoscut, respectiv produsul scalar între* r *și* s.

9.3. Observarea continuă a unor semnale aleatoare

În acest caz semnalul transmis care poartă informația dată de sursă este observat în mod continuu. Semnalul recepționat este:

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{9.64}$$

unde:

$s_i(t)$ este semnalul corespunzător simbolului S_i (respectiv ipotezei H_i);

$n(t)$ — perturbația (zgomot alb, gaussian).

Acest semnal (presupus de energie finită) poate fi reprezentat ca un punct într-un spațiu al observațiilor cu un număr infinit de dimensiuni.

Ca și în cazul observațiilor discrete, spațiul observațiilor continue este împărțit în M domenii Δ_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$), fiecare domeniu corespunzînd unui anumit simbol S_i, respectiv unei anumite ipoteze H_i($i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$).

9.3.1. Detecția unui semnal cunoscut

Să considerăm o succesiune de intervale de aceeași durată D, în care semnalul $s(t)$ de forma cunoscută poate să fie absent, sau poate să fie prezent.

Energia semnalului transmis este:

$$E = \int_0^D s^2(t)\, \mathrm{d}t \tag{9.65}$$

Semnalul recepționat este:

— în ipoteza H_0, cînd presupunem că semnalul este absent, avem:

$$r(t) = n(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant D \tag{9.66}$$

— în ipoteza H_1, cînd presupunem că semnalul este prezent, avem:

$$r(t) = s(t) + n(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant D \tag{9.67}$$

unde $n(t)$ este zgomotul alb cu densitate spectrală de putere $q(\omega) = \frac{N_0}{2}$ (cu valoare medie nulă)

Problema detecției semnalului $s(t)$ poate fi rezolvată fără dificultăți dacă se reprezintă semnalul și perturbația într-un spațiu cu o mulțime numărabilă de dimensiuni.

Coordonatele trebuie astfel alese încît informația necesară luării deciziei să fie conținută într-o singură coordonată (statistică suficientă).

Semnalul recepționat $r(t)$ poate fi scris sub forma unei serii:

$$r(t) = \text{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} r_k v_k(t) \tag{9.68}$$

unde *l.i.m.* înseamnă *convergență în medie pătratică.*

Funcțiile $v_k(t)$ formează un sistem ortonormat:

$$\int_0^D v_k(t)\, v_i(t)\, \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = k \\ 0 \text{ pentru } i \neq k \end{cases} \tag{9.69}$$

Coeficienții r_k sînt dați de relația:

$$r_k = \int_0^D r(t)\, v_k(t)\, \mathrm{d}t \tag{9.70}$$

și reprezintă coordonatele semnalului recepționat $r(t)$ în intervalul (O, D).

Funcțiile ortogonale se aleg astfel încît prima coordonată r_1 să constituie statistica suficientă.

În acest scop se alege prima funcție ortogonală:

$$v_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E}}\, s(t) \tag{9.71}$$

celelalte funcții $v_k(t)$ (pentru $k > 1$) fiind arbitrare.

Introducînd pe $v_1(t)$ dat de relația (9.71) în relația (9.70) se obține:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^D r(t)\, s(t)\, \mathrm{d}t \tag{9.72}$$

În ipoteza H_0, coeficientul r_1 devine:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^D n(t)\, s(t)\, \mathrm{d}t = \rho \tag{9.73}$$

În ipoteza H_1 coeficientul r_1 devine:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^D [s(t) + n(t)]\, s(t)\, \mathrm{d}t = \sqrt{E} + \rho \tag{9.74}$$

Celelalte coordonate, pentru $k > 1$ sînt:

— în ipoteza H_0:

$$r_k = \int_0^D n(t)\, v_k(t)\, \mathrm{d}t\,; \tag{9.75}$$

— în ipoteza H_1:

$$r_k = \int_0^D [s(t) + n(t)]\, v_k(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^D n(t)\, v_k(t)\, \mathrm{d}t \tag{9.76}$$

Rezultă că pentru $k > 1$ componentele r_k nu depind de ipotezele H_0 sau H_1 și prin urmare nu intervin în luarea deciziei. Cu alte cuvinte, $r_1 = l$ este o statistică suficientă.

Statistica suficientă l:

$$r_1 = l = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^D r(t)\, s(t)\, \mathrm{d}t \tag{9.77}$$

reprezintă produsul scalar între vectorii reprezentativi ai semnalelor $r(t)$ și $s(t)$ împărțit cu $\sqrt{E}$, respectiv o *mărime proporțională cu funcția de corelație mutuală evaluată în origine între* $r(t)$ *și* $s(t)$.

Notînd ca și în cele precedente cu $\vec{r}$ punctul care reprezintă semnalul recepționat $r(t)$ în spațiul observațiilor și ținînd seama de faptul că $l = r_1$ este o statistică suficientă, se poate scrie *raportul de plauzibilitate*:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{p(\vec{r}/S_1)}{p(\vec{r}/S_0)} = \frac{p(l/S_1)}{p(l/S_0)} = \Lambda(l) \tag{9.78}$$

Conform celor precedente, l este o variabilă aleatoare definită de relațiile:
— în ipoteza H_0:

$$(l/S_0) = \rho = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^D n(t)\, s(t)\, \mathrm{d}t \tag{9.79}$$

— în ipoteza H_1:

$$(l/S_1) = \sqrt{E} + \rho \tag{9.80}$$

Pentru a determina densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare ρ, presupunem că $n(t)$ și $s(t)$ ocupă aceeași lărgime de bandă W, și, pe baza teoremei eșantionării, avem:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^D \left[\sum_{k=1}^{N} n(kT)\, \mathrm{sinc}_k\, t\right] \left[\sum_{j=1}^{N} s(jT)\, \mathrm{sinc}_j\, t\right] \mathrm{d}t \tag{9.81}$$

unde $T = \dfrac{1}{2W}$.

Ținînd seama de relația (6.50) obținem:

$$\rho = \frac{T}{\sqrt{E}} \sum_{k=1}^{N} n(kT)\, s(kT) \tag{9.82}$$

Fiindcă eșantioanele $n(kT)$ sînt V.A. gaussiene, suma ponderată a acestora, respectiv ρ, va fi o V.A. gaussiană.

Rezultă că *pentru a determina densitatea de probabilitate a lui* ρ *este suficient să cunoaștem valoarea medie și dispersia.*

Valoarea medie a lui ρ este:

$$\bar{\rho} = \frac{T}{\sqrt{E}} \sum_{k=1}^{N} \overline{n(kT)}\, s(kT) = 0 \tag{9.83}$$

fiindcă $\overline{n(kT)} = 0$ pt. $\forall k$

Dispersia lui ρ este:

$$\overline{\rho^2} = \frac{T^2}{E} \sum_{k=1}^{N} \overline{n^2(kT)}\, s^2(kT) \tag{9.84}$$

fiindcă $\overline{n(kT)\, n(jT)} = 0$ pt $\forall k \neq j$

Zgomotul fiind un proces staționar:

$$\overline{n^2(kT)} = \overline{n^2(jT)} = \sigma^2 \quad \text{pt} \quad \forall k, j$$

înlocuind în relația (9.84) obținem:

$$\overline{\rho^2} = \frac{T\sigma^2}{E} T \sum_{k=1}^{N} s^2(kT) \tag{9.85}$$

Ținînd seama de relația (6.54) avem:

$$E = T \sum_{k=1}^{N} s^2(kT) \tag{9.86}$$

și, înlocuind în relația (9.85), avem:

$$\overline{\rho^2} = T\sigma^2 = \frac{1}{2W}\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \tag{9.87}$$

(σ^2 este puterea perturbației, egală deci cu WN_0).

Din cele precedente rezultă:

$$p(l/S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\rho^2}}} e^{-\frac{l^2}{2\overline{\rho^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{l^2}{N_0}} \tag{9.88}$$

și

$$p(l/S_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(l-\sqrt{E})^2}{N_0}} \tag{9.89}$$

fiindcă V.A. (l/S_1) are valoarea medie $\sqrt{E}$ și aceeași dispersie ca și V.A. (l/S_0).

Raportul de plauzibilitate este:

$$\Lambda(l) = e^{-\frac{(l-\sqrt{E})^2 - l^2}{N_0}} \tag{9.90}$$

sau

$$ln\, \Lambda(l) = \frac{2\sqrt{E}l}{N_0} - \frac{E}{N_0} \tag{9.91}$$

Ținînd seama de expresia lui l dată de relația (9.77) avem:

$$ln\, \Lambda(l) = \frac{2}{N_0}\int_0^D r(t)\, s(t)\, dt - \frac{E}{N_0} \tag{9.92}$$

iar *testul lui Bayes* este:

$$\int_0^D r(t)\, s(t)\, dt \gtrless \frac{N_0}{2} ln\, K + \frac{E}{2} \tag{9.93}$$

unde:

$r(t)$ este semnalul recepționat;

$s(t)$ — semnalul transmis;

E — energia semnalului transmis;

N_0 — densitatea spectrală de putere a zgomotului;

K — pragul testului.

Testul indicat de relația (9.93) poate fi realizat în două variante: într-un receptor cu corelator sau într-un receptor cu filtru adaptat.

9.3.1.1. Receptor cu corelator

În cazul receptorului cu corelator avînd schema din fig. 9.10, semnalul recepționat $r(t)$ este introdus într-un circuit de multiplicare M, împreună cu semnalul $s(t)$ generat local (semnal identic cu semnalul transmis).

Produsul $r(t)\ s(t)$ este introdus într-un circuit de integrare I, care realizează funcția de corelație care apoi este comparată într-un comparator C cu pragul:

$$\pi = \sigma^2 \ln K + \frac{E}{2} \tag{9.94}$$

Compararea se face numai după efectuarea integrării, respectiv la $t = D$. Dacă funcția de corelație este mai mică decît π se ia decizia D_0, iar în caz contrar se ia decizia D_1.

9.3.1.2. Receptor cu filtru adaptat

În cazul receptorului cu filtru adaptat, avînd schema din fig. 9.11, realizarea corelației se face cu ajutorul unui filtru adaptat F avînd funcția de pondere:

$$h(t) = s(T - t) \tag{9.95}$$

La intrarea filtrului se aplică semnalul recepționat $r(t)$. Ieșirea din filtru adaptat este introdusă într-un comparator C, comparația făcîndu-se ca și în cazul precedent la $t = D$.

Atît receptorul cu corelator cît și cel cu filtru adaptat efectuează aceleași operații matematice, alegerea unuia sau a altuia făcîndu-se în funcție de ușurința realizării. Pentru unele forme ale semnalului transmis $s(t)$ este mai economic de realizat filtrul adaptat, pentru altele corelatorul.

9.4. Detecția binară ipoteză compusă

Dacă unui simbol S_i generat de sursă îi corespunde în spațiul semnalului nu un singur punct $s_i(t)$, ci un domeniu Σ_i, spunem că avem o **ipoteză compusă**,

Să considerăm cazul cînd în ipoteza H_0 semnalul este absent și în ipoteza H_1 el este prezent și depinde de un parametru θ, care poate lua valori în domeniul $\Pi = (\theta_m, \theta_M)$ respectiv între valorile notate cu θ_m și θ_M. Pentru $\forall \theta \in \Pi$, semnalul $s(t, \theta)$ va fi cuprins într-un domeniu pe care-l notăm cu Σ.

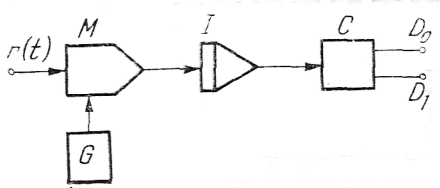


Fig. 9.10. Structura unui receptor cu corelator:

M — multiplicator; G — generator de semnal; I — integrator; C — comparator.

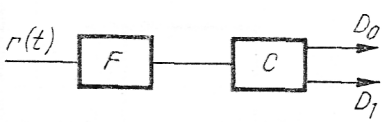


Fig. 9.11. Structura unui receptor cu filtru adaptat:

F — filtru adaptat; C — comparator.

Deoarece între punctele spațiilor Π și Σ avem o corespondență biunivocă se poate scrie:

$$P\{\vec{s} \in \Sigma\} = P\{\theta \in \Pi\} \tag{9.96}$$

Notăm cu $\vec{r}$ semnalul recepționat:

$$r(t) = n(t) \tag{9.97}$$

în ipoteza H_0 și

$$r(t) = s(t, \theta) + n(t) \tag{9.98}$$

în ipoteza H_1.

Din relația (9.96) rezultă că în ipoteza H_1 avem

$$p(\vec{r}/\vec{s}) = p(\vec{r}/\theta) \tag{9.99}$$

unde $\vec{s}$ este un punct în domeniul Σ, iar θ un punct în domeniul Π.

Ținînd seama de relația (9.99) se poate scrie

$$p(\vec{r}/S_1) = p(\vec{r}/\vec{s} \in \Sigma) = p(\vec{r}/\theta \in \Pi) = \int_{\Pi} p(\vec{r}, \theta)\, d\theta \tag{9.100}$$

însă

$$p(\vec{r}, \theta) = p(\vec{r}/\theta)\, p(\theta) \tag{9.101}$$

deci

$$p(\vec{r}/S_1) = \int_{\Pi} p(\vec{r}/\theta)\, p(\theta)\, d\theta \tag{9.102}$$

Raportul de plauzibilitate în acest caz este:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{p(\vec{r}/S_1)}{p(\vec{r}/S_0)} = \frac{\int_{\Pi} p(\vec{r}/\theta)\, p(\theta)\, d\theta}{p(\vec{r}/S_0)} \tag{9.103}$$

● **Detecția unui semnal cunoscut de amplitudine variabilă.** Se consideră cazul unei transmisiuni binare sincrone analog celui tratat în paragraful 9.2.3, cu deosebirea că amplitudinea a în acest caz notată cu θ poate varia între θ_m și θ_M, așa cum se vede în fig. 9.12.

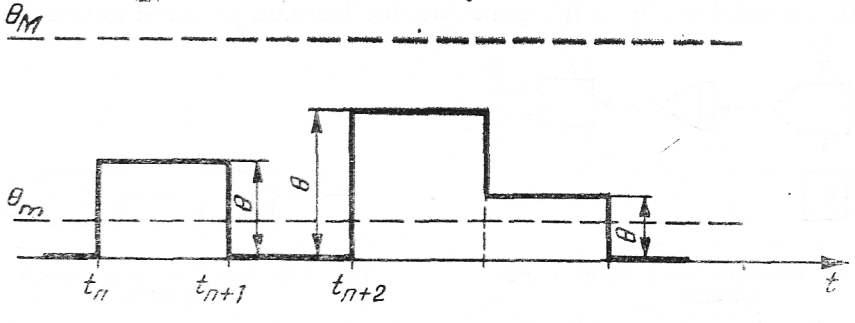


Fig. 9.12. Semnal binar cu amplitudine variabilă.

Să presupunem că amplitudinea θ poate lua cu aceeași probabilitate orice valoare în domeniul $\Pi = (\theta_m, \theta_M)$, respectiv:

$$p(\theta) = \frac{1}{\theta_M - \theta_m} \quad \text{pt.} \quad \theta_m \leqslant \theta \leqslant \theta_M \tag{9.104}$$

Raportul de plauzibilitate este dat de relația (9.103):

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{\int_{\theta_m}^{\theta_M} p(\vec{r}/\theta)\, p(\theta)\, d\theta}{p(\vec{r}/S_0)} \tag{9.105}$$

unde:

$$p(\vec{r}/\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{(r_i-\theta)^2}{2\sigma^2}} \tag{9.106}$$

și

$$p(\vec{r}/S_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}} \tag{9.107}$$

unde σ^2 este dispersia zgomotului. Făcînd înlocuirile în relația (9.105) se obține:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{\frac{1}{\theta_M - \theta_m}\int_{\theta_m}^{\theta_M} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i-\theta)^2}\, d\theta}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} n_i^2}} \tag{9.108}$$

În cazul particular, cînd în intervalul D se face o singură observare $N = 1$ respectiv $\vec{r} = r$, raportul de plauzibilitate devine:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{\frac{1}{\theta_M - \theta_m}\int_{\theta_m}^{\theta_M} e^{-\frac{(r-\theta)^2}{2\sigma^2}}\, d\theta}{e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}} \tag{9.109}$$

Dacă notăm cu:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du \tag{9.110}$$

funcția de repartiție normalizată a distribuției gaussiene, unde $x = \dfrac{\theta - r}{\sigma}$ avem:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\theta_M - \theta_m} e^{\frac{n^2}{2\sigma^2}}\left[F\left(\frac{\theta_M - r}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\theta_m - r}{\sigma}\right)\right] \tag{9.111}$$

Dacă pragul testului este $K = 1$, atunci testul lui Bayes este:

$$\frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\theta_M - \theta_m} e^{\frac{n^2}{2\sigma^2}}\left[F\left(\frac{\theta_M - r}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\theta_m - r}{\sigma}\right)\right] \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} 1 \tag{9.112}$$

9.5. Detecția secvențială

În unele aplicații este important să reducem timpul în care luăm decizii. Acest lucru se face prin reducerea numărului de eșantioane pe care le prelucrăm. Deci numărul de observații este variabil și-l notăm cu m, aceste m observații $(r_1, r_2, ..., r_m)$ fiind considerate ca fiind componentele vectorului $\vec{r}_m$.

Raportul de plauzibilitate este:

$$\Lambda(\vec{r}_m) = \frac{p(\vec{r}_m/S_1)}{p(\vec{r}_m/S_0)} \tag{9.113}$$

și este funcție de numărul m de eșantioane.

Testul secvențial se realizează în felul următor:

— Se face prima observare, $m = 1$, respectiv $\vec{r}_m = \vec{r}_1$ și se calculează raportul de plauzibilitate $\Lambda(\vec{r}_1)$, care se compară cu două praguri A și B, cu $A > B$.

- Dacă:

$$\Lambda(\vec{r}_1) \geqslant A$$

se ia decizia D_1 și testul este terminat.

- Dacă:

$$\Lambda(\vec{r}_1) \leqslant B$$

se ia decizia D_0 și testul este terminat.

- Dacă:

$$B < \Lambda(\vec{r}_1) < A$$

nu se ia nici o decizie și se face a doua observare calculîndu-se $\Lambda(\vec{r}_2)$.

— Raportul $\Lambda(\vec{r}_2)$ se testează în același mod și dacă nu se ajunge la nici o decizie, respectiv dacă $B < \Lambda(\vec{r}_2) < A$ se face o a treia observare ș.a.m.d.

— Procesul este continuat pînă cînd $\Lambda(\vec{r}_n) \geqslant A$ și se ia decizia D_1 sau $\Lambda(\vec{r}_m) \leqslant B$ și se ia decizia D_0.

Numărul de observații $m = n$ necesar terminării testului este o variabilă aleatoare.

Pentru a fixa pragurile A și B se consideră următoarele:

— în cazul în care se ia decizia D_1 avem

$$\Lambda(\vec{r}_n) = \frac{p(\vec{r}_n/S_1)}{p(\vec{r}_n/S_0)} \geqslant A \tag{9.114}$$

respectiv

$$p(\vec{r}_n/S_1) \geqslant A p(\vec{r}_n/S_0) \tag{9.115}$$

— în cazul în care se ia decizia D_0 avem

$$\Lambda(\vec{r}_n) = \frac{p(\vec{r}_n/S_1)}{p(\vec{r}_n/S_0)} \leqslant B \tag{9.116}$$

respectiv

$$p(\vec{r}_n/S_1) \leqslant B p(\vec{r}_n/S_0) \tag{9.117}$$

Integrînd relația (9.115) pe domeniul Δ_1 care cuprinde toate observațiile $\vec{r}_n$ cărora le corespunde decizia D_1, avem:

$$\int_{\Delta_1} p(\vec{r}_n/S_1)\,\mathrm{d}R_n \geqslant A\int_{\Delta_1} p(\vec{r}_n/S_0)\,\mathrm{d}R_n \tag{9.118}$$

Se observă că integrala din primul membru este **probabilitatea de detecție** P_d, adică *probabilitatea să decidem* D_1, *cînd sursa generează simbolul* S_1:

$$P_d = \int_{\Delta_1} p(\vec{r}_n/S_1)\,\mathrm{d}R_n \tag{9.119}$$

Integrala din membrul al doilea este *probabilitatea să decidem* D_1 *cînd sursa generează simbolul* S_0, adică **probabilitatea** P_f **a deciziei eronate** numită după terminologia radarului, **alarmă falsă.**

$$P_f = \int_{\Delta_1} p(\vec{r}_n/S_0)\,\mathrm{d}R_n \tag{9.120}$$

Rezultă că relația (9.118) poate fi scrisă:

$$P_d \geqslant A P_f \tag{9.121}$$

de unde

$$A \leqslant \frac{P_d}{P_f} \tag{9.122}$$

Procedînd în mod analog cu relația (9.117) se obține:

$$\int_{\Delta_0} p(\vec{r}_n/S_1)\,\mathrm{d}R_n \leqslant B\int_{\Delta_0} p(\vec{r}_n/S_0)\,\mathrm{d}R_n \tag{9.123}$$

unde Δ_0 este domeniul observațiilor $\vec{r}_n$ cărora le corespunde decizia D_0.

Se observă că integrala din primul membru este *probabilitatea deciziei eronate* D_0 *cînd sursa generează simbolul* S_1, respectiv probabilitatea unei pierderi:

$$P_m = \int_{\Delta_0} p(\vec{r}_n/S_1)\,\mathrm{d}R_n \tag{9.124}$$

Integrala din membrul al doilea se poate scrie:

$$\int_{\Delta_0} p(\vec{r}_n/S_0)\,\mathrm{d}R_n = \int_{\Delta_0 \cup \Delta_1} p(\vec{r}_n/S_0)\,\mathrm{d}R_n - \int_{\Delta_1} p(\vec{r}_n/S_0)\,\mathrm{d}R_n = 1 - P_f \tag{9.125}$$

Deci relația (9.123) poate fi scrisă

$$P_m \leqslant B(1 - P_f) \tag{9.126}$$

respectiv

$$B \geqslant \frac{P_m}{1 - P_f} \tag{9.127}$$

Deci, în funcție de probabilitățile P_d, P_f și P_m pe care le admitem, din relațiile (9.122) și (9.127) în care se consideră semnul egalității determinăm pragurile A și B.

CAPITOLUL 10

ESTIMAREA PARAMETRILOR

Teoria estimării parametrilor face parte din teoria deciziilor statistice și are ca obiectiv *evaluarea unui parametru* (reprezentînd obișnuit un mesaj) *generat de o sursă de informații în prezența perturbațiilor*. Sursa este caracterizată printr-o variabilă aleatoare continuă care modulează un semnal purtător, respectiv un parametru al acestuia. La recepție, semnalul modulat, afectat de perturbații, este prelucrat în vederea estimării valorii parametrului (mesajului) transmis de sursă.

10.1. Modelul unui sistem de transmisiune cu estimarea parametrilor

Estimarea parametrilor în prezența perturbațiilor se face după ce mesajul transmis de sursă suferă unele transformări, așa cum se arată în fig. 10.1.

Semnalul purtător care are un parametru modulat de mesajul sursei, poate fi:

— *semnal determinist;*
— *semnal condiționat determinist;*
— *semnal aleator.*

Modularea semnalului purtător de către mesaj poate fi făcută fie într-un modulator convențional (modulație de amplitudine, frecvență, fază), fie prin varierea frecvenței purtătoare de către o țintă în mișcare (efect Doppler), sau în alte moduri.

La recepție, semnalul modulat, poate fi observat *prin eșantionare* sau *în mod continuu*. Cu alte cuvinte, spațiul observațiilor poate să fie cu un număr finit de dimensiuni, sau cu un număr infinit de dimensiuni.

Spațiul observațiilor, pe baza unor reguli de estimare, este transformat în spațiul mesajului estimat.

În absența perturbațiilor, între spațiul mesajelor (transmise) și spațiul mesajelor estimate, există o corespondență biunivocă. În prezența pertur-

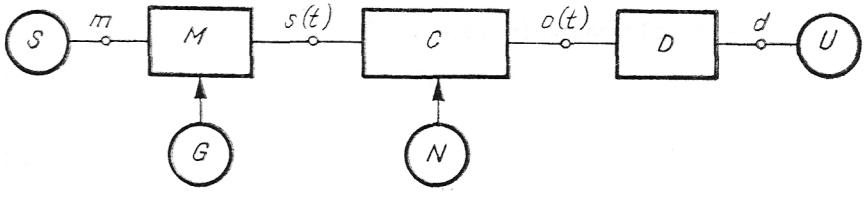


Fig. 10.1. Modelul unui sistem de estimare a parametrilor:
S — sursă; M — proces de modulare; G — generator de purtătoare; C — canal; N — sursă de perturbații; D — receptor care ia decizii; U — utilizare; m — mesaj; s — semnal transmis; o — observații; d — decizii.

bațiilor, mesajul estimat (notat în cele ce urmează cu $\hat{\theta}$) diferă de mesajul transmis (notat cu θ). Diferența între $\hat{\theta}$ și θ, reprezintă *eroarea introdusă de perturbații*.

10.2. Observarea în momente de timp discrete a unor variabile aleatoare

Ca și în cazul detecției semnalului, valorile observate la recepție se notează cu $r_1, r_2, \ldots, r_N$ și reprezintă fie coordonatele punctului R, fie componentele vectorului $\vec{r}$ în spațiul observațiilor.

Se vor utiliza și în acest caz notațiile introduse în cazul detecției pentru densitățile de probabilitate, care în acest caz devin:

$$p(r_1, r_2, \ldots, r_N/\theta) = p(\vec{r}/\theta) \tag{10.1}$$

$$p(\theta/r_1, r_2, \ldots, r_N) = p(\theta/\vec{r}) \tag{10.2}$$

și

$$dr_1\, dr_2 \ldots dr_N = dR \tag{10.3}$$

pentru volumul diferențial.

10.2.1. Estimarea unui parametru aleator

Se presupune că semnalul transmis $s(t, \theta)$ este cunoscut, cu excepția unui parametru aleator scalar θ care conține informația sursei. Peste semnalu $s(t, \theta)$ se suprapune zgomotul $n(t)$, presupus în cele ce urmează, gaussian alb (cu valoare medie nulă):

$$r(t) = s(t, \theta) + n(t) \tag{10.4}$$

În intervalul de timp $0 \leqslant t \leqslant T$ se efectuează N observații $r_1, r_2, \ldots, r_N$.

Pe baza acestor observații receptorul estimează parametrul θ a cărui densitate de probabilitate $p(\theta)$ se presupune cunoscută. Valoarea estimată a lui θ se notează cu $\hat{\theta}$ și se numește *„estimat"*.

Pentru a arăta că $\hat{\theta}$ se obține din valorile observate se introduce notația $\hat{\theta}(\vec{r})$.

Eroarea estimării este dată de diferența:

$$\varepsilon_\theta = \theta - \hat{\theta}(\vec{r}) \tag{10.5}$$

Peutru a ține seama de importanța pe care o are această eroare pentru utilizare se definește o **funcție de cost.**

Funcțiile de cost sînt funcții de eroarea de estimare și pot avea forme foarte diferite. În cele ce urmează se vor considera numai două funcții de cost: *„funcția de cost pătratul erorii"* și *„funcția de cost uniformă"*.

Funcția de cost pătratul erorii (v.fig. 10.2, *a*) este definită de relația:

$$C(\varepsilon_\theta) = \varepsilon_\theta^2 = [\theta - \hat{\theta}(\vec{r})]^2 \tag{10.6}$$

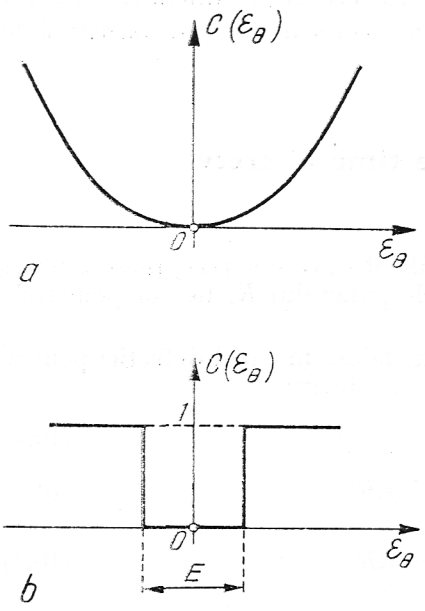


Fig. 10.2. Funcții de cost tipice:
a — funcția de cost „pătratul erorii"; *b* — funcția de cost „uniformă".

Funcția de cost uniformă (v. fig. 10.2, *b*) este definită de relațiile:

$$C(\varepsilon_\theta) = 0 \quad |\varepsilon_\theta| \leqslant \frac{E}{2} \tag{10.7}$$

$$C(\varepsilon_\theta) = 1 \quad |\varepsilon_\theta| > \frac{E}{2} \tag{10.8}$$

În cazul funcției de cost „pătratul erorii" se ține seama de faptul că importanța erorii pentru utilizare crește în permanență dacă eroarea crește. În cazul funcției de cost uniforme, erorile mai mici decît $\frac{E}{2}$ nu au nici o importanță, iar erorile mai mari decît $\frac{E}{2}$ au aceeași importanță pentru utilizare, indiferent de mărimea lor.

Valoarea medie a funcției de cost, numită **risc**, luată pe mulțimea valorilor pe care le poate lua parametrul θ și pe mulțimea observațiilor $\vec{r}$, este:

$$R = \overline{C[\theta - \hat{\theta}(\vec{r})]} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \int_{\Delta} C[\theta - \hat{\theta}(\vec{r})]\, p(\theta, \vec{r})\, dR \tag{10.9}$$

unde Δ este domeniul în care variabila aleatoare $\vec{r}$ (vectorul semnalului observat) poate lua valori.

Expresia riscului se poate scrie:

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \int_{\Delta} C[\theta - \hat{\theta}(\vec{r})]\, p(\theta/\vec{r})\, p(\vec{r})\, dR \tag{10.10}$$

$$R = \int_{\Delta} p(\vec{r})\, dR \int_{-\infty}^{+\infty} C[\theta - \hat{\theta}(\vec{r})]\, p(\theta/\vec{r})\, d\theta \tag{10.11}$$

10.2.1.1. Estimarea pe baza erorii medii pătratice minime (E.M.P.M)

Dacă funcția de cost este pătratul erorii, dată de relația (10.6), riscul dat de relația (10.11) devine:

$$R_p = \int_{\Delta} p(\vec{r})\, dR \int_{-\infty}^{+\infty} [\theta - \hat{\theta}(\vec{r})]^2\, p(\theta/\vec{r})\, d\theta \tag{10.12}$$

Fiindcă ambii integranzi sînt nenegativi, valoarea minimă a riscului se obține minimizînd integrala:

$$I(\hat{\theta}, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\theta - \hat{\theta}(\vec{r})]^2\, p(\theta/\vec{r})\, d\theta \tag{10.13}$$

în funcție de $\hat{\theta}(\vec{r})$.

Minimul se obține pentru:

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} I(\hat{\theta}, \vec{r}) = 0$$

Derivata în raport cu $\hat{\theta}$ este:

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} I(\hat{\theta}, \vec{r}) = 2\hat{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} p(\theta/\vec{r})\,d\theta - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \theta p(\theta/\vec{r})\,d\theta = 0 \qquad (10.14)$$

sau fiindcă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\theta/\vec{r})\,d\theta = 1 \qquad (10.15)$$

relația (10.14) poate fi scrisă:

$$\hat{\theta}_p(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta p(\theta/\vec{r})\,d\theta \qquad (10.16)$$

unde cu $\hat{\theta}_p$ s-a notat valoarea lui θ pentru care riscul R_p este minim.

Relația (10.16) care dă valoarea estimatului este media condiționată a parametrului θ.

Deci, *în cazul criteriului erorii medii pătratice minime, estimatul este media condiționată.*

10.2.1.2. Estimarea pe baza densității de probabilitate aposteriori maxime (M.A.P)

Dacă funcția de cost este uniformă, dată de relațiile (10.7) și (10.8) riscul dat de relația (10.11), ținînd seama de fig. 10.3, devine:

$$R_u = \int_{\Delta} p(\vec{r})\,dR\left[1 - \int_{\hat{\theta}-\frac{E}{2}}^{\hat{\theta}+\frac{E}{2}} p(\theta/\vec{r})\,d\theta\right] \qquad (10.17)$$

Pentru a minimiza riscul R_u se maximizează integrala:

$$I(\hat{\theta}, \vec{r}) = \int_{\hat{\theta}-\frac{E}{2}}^{\hat{\theta}+\frac{E}{2}} p(\theta/\vec{r})\,d\theta \qquad (10.18)$$

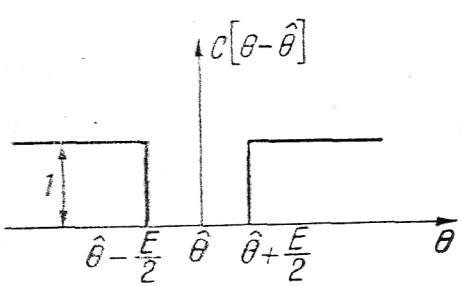


Fig. 10.3. Funcția de cost uniformă $C[\theta-\hat{\theta}]$.

În cele ce urmează se va considera că intervalul E este arbitrar de mic. În acest caz integrala $I(\hat{\theta}, \vec{r})$ poate fi scrisă aproximativ:

$$I(\hat{\theta}, \vec{r}) \approx E p(\hat{\theta}/\vec{r}) \qquad (10.19)$$

iar maximul lui $I(\hat{\theta}, \vec{r})$ este dat de maximul probabilității aposteriori $p(\theta/\vec{r})$ și alegem pe $\hat{\theta}$ = valoarea care face pe $p(\theta/\vec{r})$ maxim.

Valoarea lui θ *care face ca* $p(\theta/\vec{r})$ *să aibă valoarea maximă* se notează cu $\hat{\theta}_{map}$ și se numește **estimatul maximum aposteriori.**

Fiindcă în general $p(\theta/\vec{r})$ are o formă exponențială, este mai convenabil să se caute maximul funcției $ln\ p(\theta/\vec{r})$ care are loc pentru aceeași valoare $\theta = \hat{\theta}_{map}$ ca și maximul funcției $p(\theta/\vec{r})$.

Valoarea lui θ pentru care se obține maximul lui $ln\ p(\theta/\vec{r})$, respectiv riscul minim, este dată de ecuația:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} ln\ p(\theta/\vec{r})|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \tag{10.20}$$

Deoarece densitatea $p(\theta/\vec{r})$ este greu de calculat, facem transformarea:

$$p(\theta/\vec{r}) = \frac{p(\vec{r}/\theta)\, p(\theta)}{p(\vec{r})} \tag{10.21}$$

Ecuația care dă estimatul maximum aposteriori se poate scrie:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta/\vec{r})|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = \frac{\partial}{\partial\theta} ln\ p(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} + \frac{\partial}{\partial\theta} ln\ p(\vec{r}/\theta)|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \tag{10.22}$$

Cu valoarea astfel determinată este necesar să se verifice că maximul obținut este un maxim absolut.

În cele mai multe cazuri de interes pentru aplicații, densitatea de probabilitate condiționată $p(\theta/\vec{r})$ este simetrică în jurul valorii maxime pentru care $\theta = \hat{\theta}_{map}$. În acest caz, media condiționată $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta p(\theta/\vec{r})\, d\theta$ este tocmai valoarea cea mai probabilă, respectiv $\hat{\theta}_p = \hat{\theta}_{map}$, adică *estimatul pe baza criteriului probabilității aposteriori maxime* (M.A.P) *este egal cu estimatul pe baza erorii medii pătratice minime* (E.M.P.M.).

10.2.1.3. Estimarea amplitudinii unui semnal constant în timp

Dacă semnalul $s(t, \theta)$ depinde liniar de parametrul θ, de exemplu

$$s(t, \theta) = \theta s(t)$$

se spune că *estimarea* este *liniară.*

Dacă semnalul $s(t, \theta)$ nu depinde liniar de parametrul θ *estimarea* se numește *neliniară.*

În cele ce urmează se va trata numai estimarea liniară.

Fie semnalul aleator:

$$s(t, \theta) = \theta \quad \text{pentru} \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{10.23}$$

unde amplitudinea θ este o variabilă aleatoare gaussiană cu valoarea medie nulă și dispersia σ_θ^2.

Peste semnal se suprapune un zgomot gaussian alb $n(t)$, de valoare medie nulă și de dispersie σ_n^2.

Semnalul recepționat este observat în N puncte din intervalul T, obținîndu-se N eșantioane:

$$r_i = \theta + n_i \quad \text{pentru} \quad i = 1, 2, ..., N \tag{10.24}$$

Densitatea de probabilitate condiționată $p(\vec{r}/\theta)$ este:

$$p(\vec{r}/\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\right)^N \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(r_i-\theta)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i-\theta)^2} \tag{10.25}$$

și

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\theta^2}\theta^2} \tag{10.26}$$

Aplicînd criteriul estimării maximum aposteriori (10.22) se obține:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{2\sigma_\theta^2}\theta^2\right)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i-\theta)^2\right]\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \tag{10.27}$$

respectiv:

$$-\frac{1}{\sigma_\theta^2}\hat{\theta}_{map} + \frac{\sum_{i=1}^{N} r_i}{\sigma_n^2} - \frac{N}{\sigma_n^2}\hat{\theta}_{map} = 0 \tag{10.28}$$

de unde:

$$\hat{\theta}_{map} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \frac{1}{N}\sigma_n^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i\right) \tag{10.29}$$

Dacă N este foarte mare:

$$\hat{\theta}_{map} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i \tag{10.30}$$

adică $\hat{\theta}_{map}$ este *media aritmetică a eșantioanelor recepționate.*

Se poate demonstra că și în cazul funcției de cost „pătratul erorii" se obține același estimat, vezi [2] pag. 289.

10.2.2. Estimarea unui parametru determinist necunoscut

Dacă parametrul care trebuie estimat este o mărime deterministă — necunoscută la recepție — metodele precedente nu mai pot fi aplicate.

Într-adevăr, dacă parametrul a este determinist, el poate fi considerat ca fiind o variabilă aleatoare α cu o densitate de probabilitate dată de o funcție delta:

$$p(\alpha) = \delta(\alpha - a) \tag{10.31}$$

Densitatea de probabilitate condiționată care intervine în evaluarea estimatului conform relației (10.16) este

$$p(\alpha/\vec{r}) = p(\alpha) = \delta(\alpha - a) \tag{10.32}$$

fiindcă α nu depinde de $\vec{r}$.

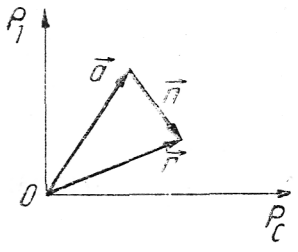


Fig. 10.4. Semnal de amplitudine constantă peste care se suprapune zgomotul.

Înlocuind (10.32) în (10.16) se obține

$$\hat{a}_p(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\delta(\alpha - a)\,d\alpha = a \qquad (10.33)$$

adică *estimatul este tocmai parametrul necunoscut.* Rezultatul este corect, însă este inutil. În consecință, problema trebuie abordată în alt mod.

Pentru ilustrarea principiului să considerăm cazul bidimensional arătat în fig. 10.4, în care parametrul a este o constantă reprezentînd semnalul peste care se suprapune zgomotul $n(t)$.

Se definește o *funcție de plauzibilitate* $L(a)$:

$$L(a) = p(\vec{r}/a) \qquad (10.34)$$

sau logaritmul ei

$$ln\, L(a) = ln\, p(\vec{r}/a) \qquad (10.35)$$

Probabilitatea condiționată (10.34), respectiv funcția de plauzibilitate $L(a)$ are valoarea maximă cînd $\vec{r} = \vec{a}$, respectiv cînd $\vec{n} = 0$ fiindcă valoarea cea mai probabilă este zero.

Invers, dacă considerăm că parametrul a este necunoscut, valoarea lui cea mai plauzibilă este aceea care face pe $L(a)$ maximum.

Se numește **estimat maximum plauzibil** și se notează $\hat{a}_{mp}(\vec{r})$ *valoarea parametrului determinist necunoscut a, pentru care funcția de plauzibilitate* $L(a)$ *ia valoarea maximă.*

Dacă valoarea a pentru care $L(a)$ este maximum, cade în interiorul domeniului de existență a lui a (dinainte cunoscut), atunci:

$$\frac{\partial}{\partial a} p(\vec{r}/a)|_{a=\hat{a}_{mp}} = 0 \qquad (10.36)$$

respectiv

$$\frac{\partial}{\partial a} ln\, p(\vec{r}/a)|_{a=\hat{a}_{mp}} = 0 \qquad (10.37)$$

Comparînd relația (10.37) cu relația (10.22) se observă că estimatul maximum plauzibil $\hat{a}_{mp}$ poate fi considerat ca un caz particular al estimării maximum aposteriori $\hat{\theta}_{map}$, în care variabila aleatoare $\theta = a$ are o distribuție uniformă ($p(\theta) = \text{const}$) în domeniul în care a poate lua valori, astfel încît $\frac{\partial}{\partial\theta} ln\, p(\theta) = 0$.

Faptul că a este un parametru determinist — dar necunoscut, ne îndreptățește să-l tratăm ca pe o variabilă aleatoare care poate lua cu aceeași probabilitate orice valoare în domeniul ei de existență, care este cunoscut. În acest caz maximele funcțiilor $p(\theta/\vec{r})$ și $p(\vec{r}/\theta)$ au loc pentru aceeași valoare a estimatului $\hat{\theta}_{map} = \hat{\theta}_{mp}$ deoarece $p(\theta)$ fiind constantă nu mai intervine în relația (10.22).

Dacă densitatea de probabilitate $p(\vec{r}/a)$, *respectiv* $p(a/\vec{r})$ *este simetrică în raport cu valoarea maximă,* care are loc pentru $a = \hat{a}_{mp}$, *atunci estimatul pe baza plauzibilității maxime este egal și cu estimatul pe baza erorii medii patratice*

$$\hat{a}_{mp} = \hat{\theta}_p.$$

Calitatea estimării obținute trebuie evaluată într-un mod oarecare.

Criteriile de evaluare *a „calității" estimatului*, pentru orice tip de estimare pot fi: valoarea medie și dispersia erorii de estimare.

1. *Valoarea medie a estimatului* este dată de relația

$$\overline{\hat{\theta}(\vec{r})} = \int_{\Delta} \hat{\theta}(\vec{r})\, p(\vec{r}/\theta)\, dR \tag{10.38}$$

luată pe toate valorile observațiilor $\vec{r}$ posibile (domeniul Δ).

Dacă valoarea medie:

$$\overline{\hat{\theta}(\vec{r})} = \theta \tag{10.39}$$

pentru orice valoare a lui θ, se spune că estimatul este *nedeplasat*.

Dacă valoarea medie:

$$\overline{\hat{\theta}(\vec{r})} = \theta + \delta$$

unde δ nu este o funcție de a, se spune că estimatul are o *deplasare cunoscută*. Prin scăderea lui „δ" din valoarea medie se obține un estimat nedeplasat.

Dacă valoarea medie:

$$\overline{\hat{\theta}(\vec{r})} = \theta + \delta(\theta) \tag{10.40}$$

se spune că estimatul are o *deplasare necunoscută*, care depinde de valoarea parametrului necunoscut.

2. *Dispersia erorii estimatului* este:

$$\sigma_{\theta}^2 = \overline{[\hat{\theta}(\vec{r}) - \theta]^2} \tag{10.41}$$

În general se preferă un estimat cu deplasare mică și cu dispersie mică, decît un estimat cu deplasare nulă și cu dispersie mare. În cazul considerat, parametrul θ care trebuie estimat, devine parametrul necunoscut, determinist a.

10.3. Observarea continuă a unor semnale aleatoare

În acest caz semnalul recepționat

$$r(t) = s(t, \theta) + n(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{10.42}$$

unde $n(t)$ este zgomot gaussian cu dispersie σ^2 este observat în mod continuu în intervalul T.

Pe baza acestei observări se face o estimare a parametrului θ.

Dacă estimatul depinde liniar de datele observate, se spune că *estimarea* este *liniară*.

Dacă estimatul nu depinde liniar de datele observate, *estimarea* se numește *neliniară*.

Dacă parametrul θ este o variabilă aleatoare, se va presupune că se cunoaște densitatea de probabilitate $p(\theta)$ și se va calcula riscul R. Valoarea $\theta = \hat{\theta}(\vec{r})$ pentru care riscul este minim, este valoarea căutată a estimatului.

Dacă parametrul $\theta = a$ este o mărime deterministă necunoscută, estimarea se face pe baza plauzibilității maxime.

10.3.1. Estimarea liniară

Dacă semnalul $s(t, \theta)$ depinde liniar de parametrul θ respectiv $s(t, \theta) = \theta s(t)$, semnalul recepționat și observat este:

$$r(t) = \theta s(t) + n(t) \quad \text{pentru} \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{10.43}$$

Considerînd ca și în cazul detecției că semnalul și perturbația sînt reprezentate prin vectori (sau puncte) într-un spațiu cu o infinitate numărabilă de dimensiuni, se pot alege coordonatele astfel încît informația necesară luării deciziei să fie conținută într-o singură coordonată.

Semnalul recepționat $r(t)$ poate fi scris sub forma unei serii, funcție de sistemul ortonormal $\{v_k(t)\}$:

$$r(t) = l.i.m._{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} r_k v_k(t) \tag{10.44}$$

unde:

$$r_k = \int_0^T r(t)\, v_k(t)\, dt \tag{10.45}$$

reprezintă coordonatele semnalului recepționat $r(t)$ în intervalul $(0, T)$.

Alegînd:

$$v_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} s(t) \tag{10.46}$$

unde:

$$E = \int_0^T s^2(t)\, dt \tag{10.47}$$

se obține:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^T r(t)\, s(t)\, dt \tag{10.48}$$

Analog cazului detecției (v. § 9.3.1) se poate arăta că ceilalți coeficienți $r_k (k > 1)$ dați de funcțiile ortogonale $v_k(t)$ alese arbitrar, ortogonale pe $v_1(t)$, nu depind de parametrul θ.

Rezultă că, coeficientul r_1 dat de relația (10.48) este o *statistică suficientă* $l = r_1$.

10.3.1.1. Cazul cînd parametrul este o variabilă aleatoare

Considerînd că estimarea se face pe baza funcției de cost uniforme (v. § 10.2.1.2) valoarea estimatului maximum aposteriori $\hat{\theta}_{map}$ este dată de:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} ln\, p(\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} + \frac{\partial}{\partial\theta} ln\, p(\vec{r}/\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \tag{10.49}$$

unde $\vec{r}$ este un vector în spațiul observațiilor cu o infinitate numărabilă de dimensiuni.

În conformitate cu cele stabilite în § 9.2.2, privind statistica suficientă, printr-o rotire de axe componentele vectorului $\vec{r}$ devin $(l, l_1, ..., l_{N-1})$, iar densitățile de probabilitate condiționate pot fi scrise:

$$p(\vec{r}/\theta)\, dR = p(l, l_1, ..., l_{N-1}/\theta)\, dL \tag{10.50}$$

unde:

$$dL = dl\, dl_1 ... dl_{N-1} \tag{10.51}$$

Fiindcă numai coordonata l depinde de θ și considerînd că l nu depinde de celelalte componente se poate scrie:

$$p(l, l_1, ..., l_{N-1}/\theta) = p(l, \vec{L}/0) = p(l/\theta)\, p(\vec{L}) \tag{10.52}$$

Din cele precedente rezultă:

$$ln\, p(\vec{r}/\theta) = ln\, p(l/\theta) + ln\, p(\vec{L}) + ln \frac{dL}{dR} \tag{10.53}$$

Introducînd expresia (10.53) în (10.49) se obține:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} + \frac{\partial}{\partial\theta}\, ln\, p(l/\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \tag{10.54}$$

fiindcă termenii $ln\, p(\vec{L})$ și $ln \dfrac{dL}{dR}$ nu depind de θ.

Cu valoarea astfel determinată este necesar să se verifice că maximul obținut este un maximum absolut.

Dacă zgomotul $n(t)$ este alb gaussian, în conformitate cu cele stabilite în § 9.3.1 variabila aleatoare $l = r_1$ dată de (10.48) este gaussiană:

$$l = r_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^T [\theta s(t) + n(t)]\, s(t)\, dt = \theta\sqrt{E} + \rho \tag{10.55}$$

unde parametrul θ este considerat ca fiind o realizare particulară a unei variabile aleatoare, iar:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^T n(t)\, s(t)\, dt \tag{10.56}$$

Variabila aleatoare l este proporțională cu funcția de corelație mutuală evaluată în origine între semnalul recepționat și semnalul $s(t)$.

Variabila l poate fi de asemenea interpretată ca o mărime proporțională cu produsul scalar între vectorul $\vec{r}$ și vectorul $\vec{s}$.

Valoarea medie a lui $l = r_1$, în condițiile în care parametrul aleator are o valoare θ, este:

$$\overline{(l/\theta)} = \theta\sqrt{E} \tag{10.57}$$

fiindcă s-a presupus că valoarea medie a lui $n(t)$ este nulă.

Dispersia variabilei aleatoare l/θ este:

$$\sigma_l^2 = \overline{[l/\theta - \overline{l/\theta}]^2} = \overline{[\theta\sqrt{E} + \rho - \theta\sqrt{E}]^2} = \overline{\rho^2} \tag{10.58}$$

Conform relației (9.87) avem $\sigma_l^2 = \overline{\rho^2} = T\sigma^2 = \dfrac{N_0}{2}$, unde σ^2 este dispersia lui $n(t)$.

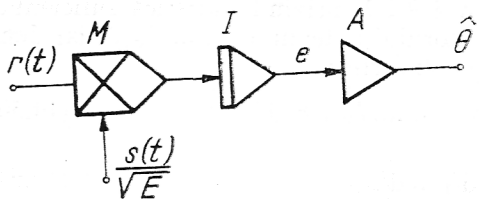


Fig. 10.5. Structura unui receptor care efectuează estimarea liniară maximum aposteriori:
M – multiplicator; I – integrator; A – amplificator cu amplificarea $\alpha = \dfrac{\sqrt{E}}{E + \dfrac{\sigma^2}{\sigma_\theta^2}}$

Din cele precedente rezultă:

$$p(l/\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_l^2}} e^{-\frac{(l-\theta\sqrt{E})^2}{2\sigma_l^2}} \tag{10.59}$$

Introducînd expresia (10.59) în ecuația (10.54) se obține:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} ln\ p(\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} + \frac{l - \theta\sqrt{E}}{\sigma_l^2}\sqrt{E}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \tag{10.60}$$

Dacă se presupune că parametrul θ are o distribuție gaussiană cu valoare medie nulă și cu dispersia σ_θ^2, respectiv:

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{\sigma_\theta^2}} \tag{10.61}$$

atunci relația (10.60) devine:

$$\frac{l - \hat{\theta}_{map}\sqrt{E}}{\sigma_l^2}\sqrt{E} = \frac{\hat{\theta}_{map}}{\sigma_\theta^2} = 0 \tag{10.62}$$

de unde:

$$\hat{\theta}_{map}(l) = \frac{E}{E + \dfrac{N_0}{2\sigma_\theta^2}} \frac{l}{\sqrt{E}} \tag{10.63}$$

respectiv $\hat{\theta}_{map}(l) = \dfrac{1}{E + \dfrac{N_0}{2\sigma_\theta^2}} \displaystyle\int_0^T r(t)\, s(t)\, dt$ (10.64)

Schema receptorului care efectuează această estimare este dată în fig. 10.5.

10.3.1.2. Cazul cînd parametrul este determinist necunoscut

În acest caz, conform celor stabilite în § 10.2.2, estimatul este egal cu valoarea parametrului $\theta = a$ care maximizează funcția de plauzibilitate:

$$ln\ L(a) = ln\ p(\vec{r}/a) \tag{10.65}$$

Conform celor precedente (v. §. 10.3.1.1) se poate scrie, l fiind o statistică suficientă:

$$\frac{\partial}{\partial a} ln\ p(\vec{r}/a)\Big|_{a=\hat{a}_{map}} = \frac{\partial}{\partial a} ln\ p(l/a)\Big|_{a=\hat{a}_{map}} = 0 \tag{10.66}$$

unde:

$$l = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^T r(t)\, s(t)\, \mathrm{d}t \tag{10.67}$$

Ţinînd seama că zgomotul este gaussian alb, cu valoare medie nulă şi dispersia σ^2, rezultă ca şi în cazul precedent:

$$p(l/a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_l^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(l-a\sqrt{E})^2}{2\sigma_l^2}} \tag{10.68}$$

expresia care introdusă în relaţia (10.66) conduce la valoarea:

$$\hat{a}_{mp}(l) = \frac{1}{\sqrt{E}}\, l \tag{8.90}$$

Schema receptorului care efectuează estimarea parametrului determinist a este identică cu cea din fig. 10.5, însă valoarea amplificării este diferită:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{E}}$$

CAPITOLUL 11

ESTIMAREA FORMEI SEMNALULUI

În cele ce urmează vom trata problema estimării formei semnalului, în cazul cînd estimarea este liniară, iar semnalul recepționat este un mesaj continuu staționar în sens larg, sau o secvență de date, peste care s-a suprapus zgomotul care este și el staționar în sens larg.

11.1. Filtrarea optimală a semnalelor continue Ecuația Wiener-Hopf

În estimarea formei semnalului $s(t)$ transmis de sursă, se pune problema prelucrării liniare a semnalului recepționat:

$$r(t) = s(t) + n(t) \tag{11.1}$$

unde $n(t)$ este zgomotul canalului, astfel încît să se obțină un semnal cît mai apropiat de semnalul dorit:

$$d(t) = s(t + \alpha) \tag{11.2}$$

Soluția acestei probleme a fost dată de *Kolmogoroff și de Wiener.*

Se presupune că se cunosc funcția de autocorelație a semnalului $R_s(\tau)$, a zgomotului $R_n(\tau)$ și funcția de corelație mutuală între semnalul recepționat și semnalul transmis, $R_{sr}(\tau)$.

Modelul unui sistem cu filtrare optimală este arătat în fig. 11.1.

Semnalul dorit $d(t)$, calculat din valorile lui $r(t)$ pînă la momentul t, poate să fie:

- $d(t) = s(t) \quad \alpha = 0$ (11.3)

și în acest caz spunem că avem o **filtrare**, adică receptorul realizează o *estimare* a semnalului $s(t)$ pentru toate valorile timpului pînă în momentul prezent.

- $d(t) = s(t + \alpha) \quad \alpha < 0$ (11.4)

și spunem că avem o **netezire** sau o **interpolare,** respectiv o *filtrare cu întîrziere.* În acest caz, receptorul furnizează o informație cu întîrziere, dar utilizează mai multe date observate decît în cazul precedent, deci și eroarea de estimare va fi mai mică.

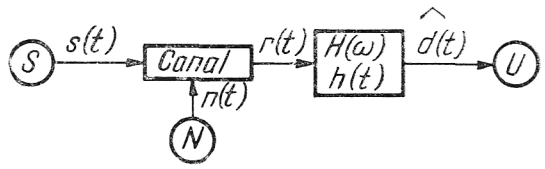


Fig. 11.1. Modelul unui sistem de estimare liniară a formei semnalului analogic.

• $d(t) = s(t + \alpha) \quad \alpha > 0$ (11.5)

în acest caz avem o **predicție** sau **extrapolare,** respectiv o *filtrare cu anticipare.* Datele utilizate pentru a prezice viitorul semnalului fiind mai puține decît în cazurile precedente, eroarea de estimare va fi mai mare (crește cu α).

Afirmația că $d(t)$ să aproximeze „cît mai bine" pe $s(t)$ se ia în sensul că eroarea medie patratică între $d(t)$ și $s(t + \alpha)$ trebuie să fie minimă:

$$\overline{[\varepsilon(t)]^2} = \overline{[d(t) - s(t + \alpha)]^2} \tag{11.6}$$

Minimumul lui $\overline{[\varepsilon(t)]^2}$ se ia în raport cu funcția de pondere $h(t)$ a filtrului de la recepție.

Semnalul la ieșirea din filtrul caracterizat de funcția de pondere $h(t)$ este:

$$\hat{d}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)\, r(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, r(t - \tau)\, d\tau \tag{11.7}$$

unde se presupune că filtrul este realizabil, adică $h(t) = 0$ pt $t < 0$.

Eroarea medie patratică este:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{[d(t) - \hat{d}(t)]^2} \tag{11.8}$$

respectiv:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{[s(t + \alpha) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, r(t - \tau)\, d\tau]^2} \tag{11.9}$$

Se caută obținerea unei erori medii patratice minime prin alegerea corespunzătoare a lui $h(t)$.

Fiindcă $s(t)$ și $n(t)$ sînt staționare, eroarea medie patratică poate fi dezvoltată astfel:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{s^2(t + \alpha)} - 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, \overline{s(t + \alpha)\, r(t - \tau)}\, d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, h(\mu)\, \overline{r(t - \tau)\, r(t - \mu)}\, d\tau\, d\mu = \tag{11.10}$$

$$= R_s(0) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, R_{sr}(\alpha + \tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, h(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\tau\, d\mu$$

Trebuie să găsim condiția necesară pe care trebuie să o satisfacă $h(t)$ astfel ca $\overline{\varepsilon^2}$ să fie minimum.

Pentru aceasta să notăm cu $g(t)$ funcția de pondere a unui filtru realizabil oarecare. Atunci și

$$l(t) = h(t) + \beta g(t)$$

este funcția de pondere a unui filtru realizabil. Dacă $h(t)$ este funcția de pondere a unui filtru care face ca $\overline{\varepsilon^2}$ să fie minimum atunci filtrul care are o funcție de pondere $l(t) \neq h(t)$ va avea la ieșire o eroare medie pătratică $\overline{\varepsilon^2}$ mai mare.

Înlocuind pe $h(t)$ cu $l(t)$ în relația (11.10) se obține:

$$\overline{\varepsilon_l^2} = R_s(0) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, R_{sr}(\alpha + \tau)\, d\tau - 2\beta\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, R_{sr}(\alpha + \tau)\, d\tau +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, h(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\tau\, d\mu + 2\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, g(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\tau\, d\mu +$$

$$+ \beta^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, g(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\tau\, d\mu \qquad (11.11)$$

Ținînd seama de relația (11.10) această relație poate fi scrisă:

$$\overline{\varepsilon_l^2} = \overline{\varepsilon^2} - 2\beta\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, R_{sr}(\alpha + \tau)\, d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, g(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\tau\, d\mu\right] +$$

$$+ \beta^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, g(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\tau\, d\mu \qquad (11.12)$$

Ultimul termen din această relație este totdeauna nenegativ, fiindcă este o **valoare** medie pătratică:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, g(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\tau\, d\mu = \overline{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, r(t - \tau)\, d\tau\right]^2} \geqslant 0 \qquad (11.13)$$

Din cele precedente rezultă că dacă dorim ca $\overline{\varepsilon^2} \leqslant \overline{\varepsilon_l^2}$ pt $\forall\beta$ este necesar ca pentru orice g să avem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, R_{sr}(\alpha + \tau)\, d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, g(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\tau\, d\mu = 0 \qquad (11.14)$$

sau fiindcă $g(\tau) = 0$ pt. $\tau < 0$ și $R_r(\tau - \mu) = R_r(\mu - \tau)$ avem:

$$\int_0^{\infty} g(\tau)\left[R_{sr}(\alpha + \tau) - \int_0^{\infty} h(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\mu\right] d\tau = 0 \qquad (11.15)$$

de unde:

$$\int_0^{\infty} h(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\mu = R_{sr}(\alpha + \tau) \qquad \tau \geqslant 0 \qquad (11.16)$$

Această ecuație integrală este cunoscută sub numele de **ecuația Wiener-Hopf** și în funcție de R_r și R_{sr}, *determină funcția de pondere* $h(t)$ *a unui filtru liniar*, a cărui ieșire, dacă la intrare se aplică $r(t) = s(t) + n(t)$, *aproximează cu eroarea medie patratică minimă*, semnalul dorit $d(t) = s(t + \alpha)$.

Această filtrare bazată pe criteriul erorii patratice medii minime se numește **filtrare optimală.**

În cele precedente s-a arătat că pentru a obține eroare patratică medie minimă este necesar ca $h(t)$ să satisfacă ecuația Wiener-Hopf. Se poate arăta că această condiție este și suficientă. Dacă $h(t)$ satisface relația (11.16), atunci relația (11.15) este satisfăcută pentru orice $g(t)$ și se poate arăta că eroarea medie patratică obținută cu $h(t)$ este mai mică sau egală cu cea obținută cu oricare alt filtru.

● **Filtre optimale nerealizabile.** Dacă nu se mai impune condiția ca $h(t) = 0$ pt. $t < 0$, ecuația (11.14) rămîne o condiție necesară pentru $h(t)$ și deci și relația (11.16) cu limita inferioară extinsă la $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\mu)\, R_r(\tau - \mu)\, d\mu = R_{sr}(\alpha + \tau) \quad -\infty < \tau < \infty \tag{11.17}$$

Această ecuație poate fi soluționată cu ajutorul transformatei Fourier. Prima parte fiind o convoluție, avem:

$$\mathfrak{F}\{h(t)\}\,\mathfrak{F}\{R_r(t)\} = \mathfrak{F}\{R_{sr}(t + \alpha)\} \quad -\infty < t < \infty \tag{11.18}$$

sau:

$$H(\omega)\, q_r(\omega) = q_{rs}(\omega)\, e^{j\omega\alpha} \tag{11.19}$$

unde: $H(\omega)$ este funcția de transfer a filtrului;

$q_r(\omega)$ — D.S.P. a semnalului recepționat;

$q_{rs}(\omega)$ — D.S.P. de interacțiune între semnalul util $s(t)$ și semnalul recepționat $r(t)$.

Fiindcă semnalul $s(t)$ și zgomotul $n(t)$ sînt procese independente, avem:

$$q_{rs}(\omega) = q_s(\omega) \tag{11.20}$$

și

$$q_r(\omega) = q_s(\omega) + q_n(\omega) \tag{11.21}$$

unde $q_s(\omega)$ și $q_n(\omega)$ sînt D.S.P. a semnalului, respectiv a zgomotului.

În aceste condiții relația (11.19) poate fi scrisă

$$H(\omega) = \frac{q_s(\omega)}{q_s(\omega) + q_n(\omega)}\, e^{j\omega\alpha} \tag{11.22}$$

Filtrul astfel obținut, *nu este realizabil*, dar poate fi aproximat cu filtre realizabile dacă mărim timpul de întîrziere.

11.2. Filtrare optimală Wiener pentru secvențe de date

Reprezentăm secvența de date $\mathbf{x}$, zgomotul $\mathbf{n}$ și semnalul recepționat $\mathbf{r}$ prin matricele coloană:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n(0) \\ n(1) \\ \vdots \\ n(N-1) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ \vdots \\ r(N-1) \end{bmatrix} \tag{11.23}$$

Între aceste matrice, dat fiind că zgomotul din canal este aditiv, avem relația:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{n} \tag{11.24}$$

În fig. 11.2 este arătat modelul estimării secvenței de date $\mathbf{x}$, estimatul fiind notat cu $\hat{\mathbf{x}}$.

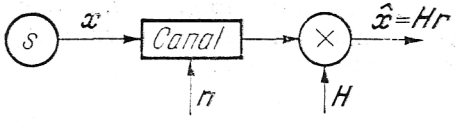


Fig. 11.2. Modelul unui sistem de estimare liniară a unei secvențe de date.

Matricea $\mathbf{H}$ care caracterizează filtrul, este:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & \dots & h_{0,\,N-1} \\ h_{10} & h_{11} & \dots & h_{1,\,N-1} \\ \vdots & & & \\ h_{N-1,\,0} & h_{N-1,\,1} & \dots & h_{N-1,\,N-1} \end{bmatrix} \tag{11.25}$$

iar estimatul este:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{r} \tag{11.26}$$

Filtrul trebuie să fie astfel determinat, încît eroarea medie patratică de estimare:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|^2} \tag{11.27}$$

să fie minimă.

Fără a pierde din generalitate, putem presupune:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{r}} = 0 \tag{11.28}$$

Notăm cu $\mathbf{K}_x$ matricea de covariație a secvenței de date, $\mathbf{K}_n$ matricea de covariație a zgomotului și cu $\mathbf{K}_r$ matricea de covariație a semnalului recepționat:

$$\mathbf{K}_x = \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}^T}; \qquad \mathbf{K}_n = \overline{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}; \qquad \mathbf{K}_r = \overline{\mathbf{r}\mathbf{r}^T} \tag{11.29}$$

Secvența de date $\mathbf{x}$, și zgomotul $\mathbf{n}$, sînt procese necorelate, deci:

$$\overline{\mathbf{x}\mathbf{n}^T} = \overline{\mathbf{n}\mathbf{x}^T} = 0 \tag{11.30}$$

Ținînd seama de faptul că matricele $\mathbf{x}$ și $\hat{\mathbf{x}}$ sînt matrice coloană, putem scrie:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|^2} = \overline{(\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x})^T(\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x})} \tag{11.31}$$

sau înlocuind relația (11.26) în relația (11.31) se obține:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{x}} + \overline{\|\mathbf{x}\|^2} \tag{11.32}$$

Fiindcă $\mathbf{x}$ și $\mathbf{r}$ sînt matrice coloană avem:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{r} = \mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{x} \tag{11.33}$$

Deci se poate scrie:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{r}} - \overline{2\mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{x}} + \overline{\|\mathbf{x}\|^2} \tag{11.34}$$

Fiindcă $\mathbf{H}$ trebuie să fie astfel ales, încît ε să fie minimum, trebuie să fie satisfăcută condiția:

$$\nabla_H\overline{\varepsilon^2} = 0 \tag{11.35}$$

unde $\nabla_H\overline{\varepsilon^2}$ este gradientul lui $\overline{\varepsilon^2}$ în raport cu matricea $\mathbf{H}$ (vezi anexa IV.7).

Se poate demonstra că:

$$\nabla_H\{\mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{r}\} = 2\mathbf{H}(\mathbf{r}\mathbf{r}^T) \tag{11.36}$$

și că:

$$\nabla_H\{\mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{x}\} = \mathbf{x}\mathbf{r}^T \tag{11.37}$$

și

$$\nabla_H\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} = 0 \tag{11.38}$$

Ținînd seama de relațiile (11.35), (11.36), (11.37), (11.38) precum și de relația (11.30), avem:

$$2\mathbf{H}\overline{(\mathbf{r}\mathbf{r}^T)} - 2\overline{\mathbf{x}\mathbf{r}^T} = 0 \tag{11.39}$$

sau:

$$\mathbf{H}(\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}^T} + \overline{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}) - \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}^T} = 0 \tag{11.40}$$

Introducînd funcțiile de covariație date de relația (11.29) se obține:

$$\mathbf{H}(\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_n) = \mathbf{K}_x \tag{11.41}$$

sau

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}_x(\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_n)^{-1} \tag{11.42}$$

relație care specifică filtrul optimal în funcție de proprietățile statistice ale secțenței de date și ale *zgomotului*, respectiv în funcție de $\mathbf{K}_x$ și $\mathbf{K}_n$.

Dacă filtrul astfel obținut este caracterizat de o matrice diagonală:

$$\mathbf{H} = \text{diag}\,(h_{00}, h_{11}, \ldots, h_{N-1,\,N-1}) \tag{11.43}$$

se spune că avem un **filtru scalar.** Filtrele scalare sînt importante fiindcă ele *simplifică calculul estimatului* **x**, relația (11.26).

În general însă filtrul nu este diagonal și atunci spunem că avem un **filtru vector.**

Un filtru vector poate fi transformat într-un filtru scalar cu ajutorul unei transformări ortogonale **T**, așa cum se arată în fig. 11.3.

Se observă că în acest caz **H** trebuie înlocuit cu $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{T} = \mathbf{T}^T\mathbf{H}\mathbf{T}$. Făcînd această operație în relația (11.41) se obține:

$$\mathbf{T}^T\mathbf{H}\mathbf{T}(\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_n) = \mathbf{K}_x \tag{11.44}$$

Premultiplicăm cu **T** și postmultiplicăm cu $\mathbf{T}^T$ și obținem:

$$\mathbf{H}\mathbf{T}(\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_n)\,\mathbf{T}^T = \mathbf{T}\mathbf{K}_x\mathbf{T}^T \tag{11.45}$$

sau:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}\mathbf{K}_x\mathbf{T}^T[\mathbf{T}(\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_n)\,\mathbf{T}^T]^{-1} \tag{11.46}$$

sau (vezi anexa IV):

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}\mathbf{K}_x\mathbf{T}^T[\mathbf{T}(\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_n)^{-1}\,\mathbf{T}^T] \tag{11.47}$$

sau

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}\mathbf{K}_x(\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_n)^{-1}\,\mathbf{T}^T \tag{11.48}$$

Notăm cu:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{K}_x(\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_n)^{-1} \tag{11.49}$$

și putem scrie:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}\mathbf{H}_0\mathbf{T}^T \tag{11.50}$$

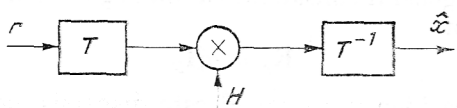


Fig. 11.3. Utilizarea unei transformări ortogonale.

Matricea $\mathbf{H}_0$ se numește **matrice răspuns** prin analogie cu răspunsul la impulsul unitate al filtrelor liniare.

Transformata **T** este formată din vectorii proprii ai matricei $\mathbf{H}_0$

$$\mathbf{T}^T = [\varphi_0 \, \varphi_1 \, \ldots \, \varphi_{N-1}] \tag{11.51}$$

unde φ_i sînt vectorii proprii ai matricei $\mathbf{H}_0$, adică:

$$\mathbf{H}_0 \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \tag{11.52}$$

coeficienții λ_i fiind valorile proprii.

În aceste condiții matricea $\mathbf{H}$ dată de relația (11.50) are forma diagonală (vezi anexa IV):

$$\mathbf{H} = \text{diag} \, (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}) \tag{11.53}$$

În acest caz transformata **T** dată de relația (11.51) este **transformarea Karhunen-Loève**, care *este optimală* în sensul că *dă eroarea pătratică medie minimă* (vezi § 14.4)

Fiindcă în general calculul valorilor proprii este dificil, se consideră o soluție suboptimală, obținută din matricea $\mathbf{H}$ dată de relația (11.48), prin menținerea numai a elementelor de pe diagonală:

$$\mathbf{H}_{s0} = \text{diag} \, (h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}) \tag{11.54}$$

Pentru a determina elementele h_j, $j = \overline{0, N-1}$ luăm în considerare următoarele:

— ținînd seama de relațiile (11.29) se poate vedea că expresiile:

$$\mathbf{W}_x = \mathbf{T}\mathbf{K}_x\mathbf{T}^T \quad \text{și} \quad \mathbf{W}_n = \mathbf{T}\mathbf{K}_n\mathbf{T}^T \tag{11.55}$$

sînt funcțiile de covariație a semnalului, respectiv a zgomotului în spațiul transformat,

— înlocuind aceste expresii în relația (11.46) se obține:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}_x[\mathbf{W}_x + \mathbf{W}_n]^{-1} \tag{11.56}$$

Dacă notăm cu $w_x(j)$ și $w_n(j)$ elementele de pe diagonalele matricelor $\mathbf{W}_x$ și $\mathbf{W}_n$, atunci elementele de pe diagonala matricei **H** sînt:

$$h_j = \frac{w_x(j)}{w_x(j) + w_n(j)} \tag{11.57}$$

În multe aplicații se consideră că semnalul $x(t)$ este un proces Markov de ordinul întîi, și, în consecință, are o funcție de covariație dată de relația (8.111) în care $\rho_j = \rho^j$, respectiv:

$$\mathbf{K}_x = \sigma_x^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho^2 & \ldots & \rho^{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho^{N-1} & & & \ddots & 1 \end{bmatrix} \tag{11.58}$$

unde σ_x^2 este dispersia semnalului, iar ρ **coeficientul** de corelație.

Zgomotul este în general considerat ca fiind zgomot alb, deci, cu o matrice de covariație de forma

$$\mathbf{K}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}_N \tag{11.59}$$

unde $\mathbf{I}_N$ este matricea identitate, iar σ_n^2 este dispersia zgomotului.

Transformările ortogonale, **T**, folosite pentru a calcula coeficienții h_j sînt transformata Fourier discretă, transformata Walsh-Hadamard și altele.

11.3. Filtre Kalman-Bucy

În cele precedente, semnalele aleatoare au fost caracterizate de densități de probabilitate, de funcția de covariație și de densitatea spectrală de putere.

Sistemele liniare care prelucrează semnalul erau reprezentate printr-o funcție de pondere, respectiv functia de transfer.

În cele ce urmează se dă o caracterizare echivalentă și anume se consideră că semnalele aleatoare sînt soluții ale unor ecuații diferențiale care descriu comportarea unor sisteme dinamice excitate cu zgomot alb.

Acest model matematic are avantajul că, în problemele de optimizare, în loc să se caute soluția unor ecuații integrale de ex. Wiener-Hopf se caută soluția unor ecuații diferențiale ai căror coeficienți sînt determinați de proprietățile statistice ale semnalelor. În acest caz, chiar dacă nu se găsesc soluții analitice, problema poate fi soluționată cu ajutorul calculatoarelor.

Deoarece reprezentarea se face în domeniul timp, prin metoda variabilelor de stare se poate studia cu ușurință cazul proceselor nestaționare și al observațiilor pe un interval de timp finit.

Din punct de vedere matematic, metoda variabilelor de stare conduce la utilizarea metodelor vectoriale și matriceale în probleme în care intervin un număr mare de variabile, cum ar fi analiza și sinteza sistemelor cu intrări și ieșiri multiple.

11.3.1. Sisteme dinamice generatoare de semnale aleatoare

Sistemele dinamice care vor fi luate în considerare în cele ce urmează au ca model matematic o ecuație diferențială ordinară liniară cu coeficienți constanți:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \\ + b_{n-2}u^{(n-2)}(t) + \ldots + b_0 u(t) \qquad (11.60)$$

unde:

$u(t)$ este o excitație oarecare care se va preciza (particulariza) în cele ce urmează;
a_i, b_j — coeficienți constanți;
$y(t)$ — răspunsul sistemului.

Sistemele dinamice se vor reprezenta sub formă de schemă bloc așa cum se arată în fig. 11.4.

Pentru a determina răspunsul sistemului dinamic la excitația $u(t)$ la momentul $t \geqslant T_0$ este necesar să se cunoască un set de n condiții inițiale.

Aceste condiții inițiale specifică modul în care excitația anterioară momentului T_0 afectează răspunsul în intervalul $t - T_0$.

Condițiile inițiale și coeficienții (a_i, b_j) determină în mod unic comportarea sistemului, respectiv răspunsul pentru $t \geqslant T_0$.

Considerîndu-se coeficienții (a_i, b_j) dați, se pune problema să se găsească numărul minim de para-

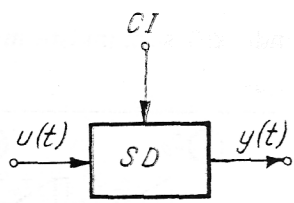


Fig. 11.4. Reprezentarea unui sistem dinamic — SD: $y(t)$ — răspunsul sistemului; $u(t)$ — excitația aplicată la intrare; CI — condiții inițiale.

metri care specifică comportarea sistemului în timp. Acești parametri se numesc **variabile de stare.**

Dacă se cunoaște starea sistemului (adică valorile variabilelor de stare) la momentul t_1 și excitația aplicată sistemului de la t_1 la t_2, atunci la momentul t_2 se cunosc atît răspunsul sistemului, cît și starea lui. Un astfel de *sistem* este *determinist* fiindcă cunoașterea excitației și a variabilelor de stare determină cu probabilitatea unu răspunsul, și este *realizabil* fiindcă valorile viitoare ale excitației nu afectează răspunsul, evaluat la momentul prezent.

Pentru a găsi schema bloc a unui sistem dinamic reprezentat de o ecuație diferențială liniară se va considera ecuația (11.60) scrisă sub forma:

$$y^{(n)}(t) = [b_{n-1}u^{(n-1)}(t) - a_{n-1}y^{(n-1)}(t)] + [b_{n-2}u^{(n-2)}(t) - a_{n-2}y^{(n-2)}(t)] + \\ + \ldots + [b_0u(t) - a_0y(t)] \tag{11.61}$$

Integrînd de n ori se obține:

$$y(t) = \int_{T_0}^{t} [b_{n-1}u(t) - a_{n-1}y(t)]\,dt + \int_{T_0}^{t} dt \int_{T_0}^{t} [b_{n-2}u(t) - a_{n-2}y(t)]\,dt + \\ \ldots + \underbrace{\int_{T_0}^{t} dt \ldots \int_{T_0}^{t}}\, [b_0u(t) - a_0y(t)]\,dt \tag{11.62}$$

Schema bloc a unui sistem dinamic reprezentat de ecuația (11.60) realizat cu elemente de calcul analogic, este arătată în figura 11.5.

Variabilele de stare, notate cu $x_i(t)$, sînt reprezentate prin semnalele de la ieșirile circuitelor de integrare:

$$x_i(t) = \int_{T_0}^{t} f_i'(t)\,dt = f_i(t) - f_i(T_0) \quad \text{pentru } i = \overline{1, n} \tag{11.63}$$

în care $f_i'(t) = x_i'$ sînt semnalele de la intrările circuitelor respective. După cum se vede din relația (11.63), aceste variabile de stare includ și condițiile inițiale respective, date de $f_i(T_0)$.

Cunoașterea celor n variabile de stare determină starea sistemului care poate fi scrisă sub formă matriceală:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{11.64}$$

unde $\mathbf{x}(t)$ se numește **matrice de stare** sau **vector de stare.**

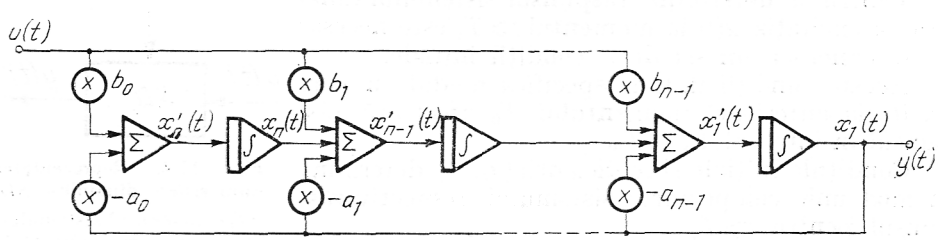


Fig. 11.5. Structura unui sistem dinamic realizat cu blocuri de calcul analogic (integratoare sumatoare și multiplicatoare cu o constantă).

Conform fig. 11.5 se pot scrie relațiile:

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) - a_{n-1}y(t) + b_{n-1}u(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) - a_{n-2}y(t) + b_{n-2}u(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}'(t) &= x_n(t) - a_1y(t) + b_1u(t) \\ x_n'(t) &= \quad - a_0y(t) + b_0u(t) \end{aligned}\right\} \tag{11.65}$$

Ținînd seama de cele precedente, derivata vectorului de stare este:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) - a_{n-1}y(t) + b_{n-1}u(t) \\ x_3(t) - a_{n-2}y(t) + b_{n-2}u(t) \\ \vdots \\ x_n(t) - a_1y(t) + b_1u(t) \\ \quad - a_0y(t) + b_0u(t) \end{bmatrix} \tag{11.66}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} x_2(t) - a_{n-1}y(t) \\ x_3(t) - a_{n-2}y(t) \\ \vdots \\ x_n(t) - a_1y(t) \\ \quad - a_0y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1}u(t) \\ b_{n-2}u(t) \\ \vdots \\ b_1u(t) \\ b_0u(t) \end{bmatrix} \tag{11.67}$$

Expresia derivatei vectorului de stare poate fi scrisă sub formă concisă cu ajutorul matricelor:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \tag{11.68}$$

care reprezintă *dinamica sistemului* și

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \tag{11.69}$$

care reprezintă *constrîngerile introduse de semnalele de intrare asupra sistemului.*

Ținînd seama de aceste notații, relația (11.67) se poate scrie:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \tag{11.70}$$

Această ecuație se numește **ecuația de stare** *a sistemului.*

În general nu se observă întregul vector de stare, ci numai unele din componentele lui. Pentru a specifica legătura între dinamica internă a sistemului, reprezentată de vectorul de stare $\mathbf{x}(t)$ și semnalul la ieșire din sistem, respectiv răspunsul sistemului, reprezentat de vectorul $y(t)$, se introduce o *matrice de selecție* $\mathbf{C}$ de forma:

$$\mathbf{C} = [c_1 c_2 \dots c_n] \tag{11.71}$$

Componenta c_i are valorile 1 sau 0, după cum se selectează sau nu variabila de stare $x_i(t)$.

Deci componentele semnalului de ieșire sînt:

$$y_i(t) = c_i x_i(t) \tag{11.72}$$

relație care se poate scrie sub formă matriceală:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \tag{11.73}$$

unde $\mathbf{y}(t)$ reprezintă matricea componentelor lui $\mathbf{x}(t)$ observate.

Dacă sistemul are o singură ieșire și aceasta este $x_1(t) = y(t)$, atunci matricea $\mathbf{C}$ este de forma:

$$\mathbf{C} = [1\ 0 \dots 0] \tag{11.74}$$

Ecuația (11.73) se numește **ecuația de ieșire** și împreună cu ecuația (11.70) caracterizează complet sistemul.

În cazul particular, cînd la intrare se aplică excitația $u(t) = u_0(t) = e^{pt}$ se poate căuta o soluție particulară a ecuației (11.60) de forma $y(t) = H(p)\, e^{pt}$ unde $H(p)$ este o constantă.

Prin derivări succesive și înlocuire în relația (11.60) se obține:

$$H(p)\,(p^n + a_{n-1}p^{n-1} \dots + a_0)\, e^{pt} = (b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_0)\, e^{pt} \tag{11.75}$$

de unde:

$$H(p) = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0} \tag{11.76}$$

este funcția de transfer a sistemului.

Dacă la intrare se aplică zgomot alb $n(t)$, cu densitatea spectrală de putere $\frac{1}{2}N_0$ și cu o funcție de covariație dată de relația:

$$K_n = \overline{n(t_1)\, n(t_2)} = \frac{1}{2} N_0 \delta(t_2 - t_1) = \frac{1}{2} N_0 \delta(\tau) \tag{11.77}$$

atunci la ieșire se obține un semnal aleator $y(t)$ a cărui densitate spectrală de putere este dată de relația:

$$q(\omega) = \frac{1}{2} |H(\omega)|^2 N_0 = \frac{1}{2} H(\omega)\, \overset{*}{H}(\omega)\, N_0 \tag{11.78}$$

Rezultă că $q(\omega)$ este de forma:

$$q(\omega) = \frac{e_{2n-2}\omega^{2n-2} + e_{2n-4}\omega^{2n-4} + \dots + e_0}{d_{2n}\omega^{2n} + d_{2n-2}\omega^{2n-2} + \dots + d_0} \tag{11.79}$$

adică sistemul din fig. 11.5 poate genera orice semnal aleator, cu o densitate spectrală de putere de forma unei funcții raționale, dată de relația (11.79), unde coeficienții se determină prin identificare cu ajutorul relațiilor (11.78) și (11.76).

În cele precedente s-a arătat unul din modurile de a genera un semnal aleator a cărui densitate spectrală de putere este o funcție rațională.

În cele ce urmează se va arăta un alt mod echivalent.

Se va căuta o schemă formată din circuite de integrare, însumare și multiplicare cu o constantă, care să realizeze aceeași funcție de transfer $H(p)$ ca și sistemul precedent (v. relația (11.76).

Pentru aceasta se va descompune $H(p)$ în fracții simple presupunîndu-se pentru simplificare că toate rădăcinile numitorului sînt distincte:

$$H(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{p - p_k} \tag{11.80}$$

unde λ_k sînt reziduurile polilor p_k din semiplanul stîng, $H(p)$ fiind realizabil.

Sistemul fiind liniar, răspunsul $y(t)$ poate fi considerat ca fiind suma răspunsurilor sistemelor ale căror funcții de transfer sînt de forma:

$$H_k(p) = \frac{\lambda_k}{p - p_k} \tag{11.81}$$

Notînd cu $x_k(t)$ răspunsul parțial, respectiv răspunsul corespunzător lui $H_k(p)$ la excitația $u(t)$ se poate scrie:

$$\frac{dx_k(t)}{dt} - p_k x_k(t) = \lambda_k u(t) \tag{11.82}$$

Schema bloc corespunzătoare este arătată în fig. 11.6.

Răspunsul total se obține însumînd toate răspunsurile parțiale conform schemei din fig. 11.7.

În acest caz variabilele de stare sînt tocmai răspunsurile parțiale (respectiv ieșirile din circuitele de integrare care includ și condițiile inițiale).

În cazul schemei din fig. 11.7 derivatele variabilelor de stare sînt:

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= p_1 x_1(t) + \lambda_1 u(t) \\ x_2'(t) &= p_2 x_2(t) + \lambda_2 u(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= p_n x_n(t) + \lambda_n u(t) \end{aligned}\right\} \tag{11.83}$$

de unde rezultă că matricea **F** are o formă diagonală:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & p_n \end{bmatrix} \tag{11.84}$$

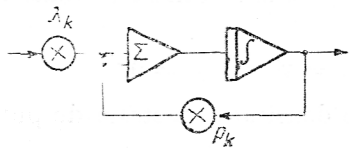


Fig. 11.6. Structura unui bloc de calcul pentru o variabilă de stare.

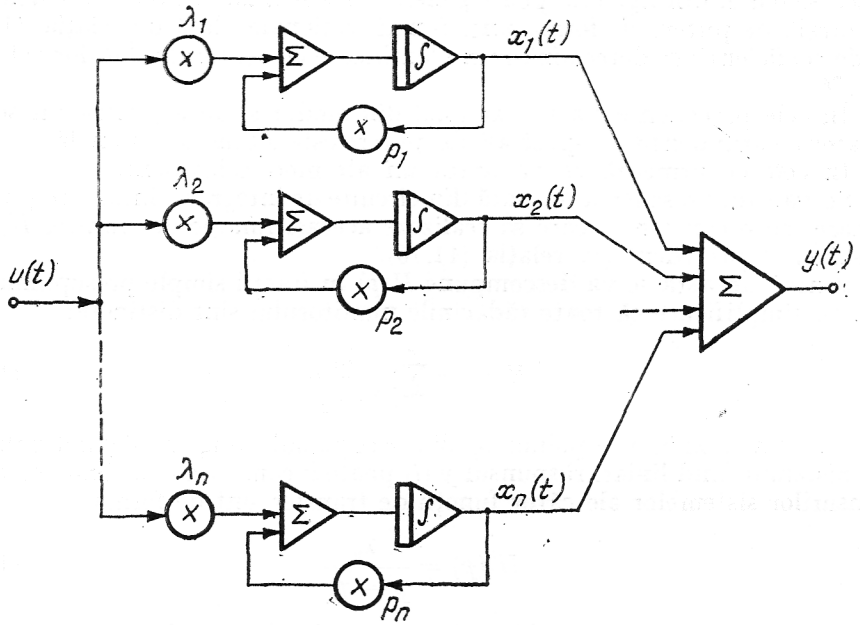


Fig. 11.7. Structura unui sistem dinamic.

iar matricea **G** este:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \tag{11.85}$$

Fiindcă răspunsul este:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t) \tag{11.86}$$

rezultă că matricea de selecție **C** este de forma:

$$\mathbf{C} = [1 \;\; 1 \ldots 1] \tag{11.87}$$

În cazul în care rădăcinile numitorului lui $H(p)$ sînt multiple, se procedează în același mod, însă ecuațiile diferențiale corespunzătoare polilor multipli vor avea un grad mai mare ca unu.

Avantajul acestei scheme este că ecuațiile care reprezintă variabilele de stare (11.83) sînt foarte simple.

Dezavantajul față de schema precedentă constă în necesitatea efectuării unor calcule pentru determinarea dezvoltării în fracții simple.

Ecuația diferențială (11.60) poate reprezenta fie procese staționare, fie procese nestaționare.

Dacă se presupune că excitația $u(t)$ este o realizare particulară a unui zgomot alb, care a fost aplicată la $T_0 = -\infty$ și se consideră toate condițiile inițiale nule:

$$y(T_0) = y^{(1)}(T_0) = \ldots = y^{(n-1)}(T_0) = 0 \tag{11.88}$$

atunci $y(t)$ este un proces staționar cu o densitate spectrală de putere dată de relația (11.79).

Dacă se presupune că excitația $u(t)$ este nulă (respectiv sistemul se presupune liber), dar că una sau mai multe din condițiile inițiale sînt variabile aleatoare, atunci sistemul poate genera un proces nestaționar.

11.3.2. Filtre optimale Kalman-Bucy

Fără a expune teoria filtrării optimale cu filtre Kalman-Bucy, vom căuta să expunem în mod intuitiv, ideea de bază a acestei filtrări, făcînd apel la un exemplu simplu.

Să considerăm relația (11.1):

$$r(t) = s(t) + n(t) \tag{11.89}$$

În cazul filtrării, semnalul dorit este $d(t) \cong s(t)$ și în cele ce urmează îl notăm cu $\hat{s}(t)$.

Cu ajutorul unui sistem dinamic, la intrarea căruia aplicăm zgomot alb, generăm un semnal care are aceeași densitate spectrală de putere ca și semnalul $s(t)$ pe care dorim să-l estimăm. Notăm cu $q_s(\omega) = \mathfrak{F}\{R_s(\tau)\}$ această densitate, iar $q(\omega)$ din relația (11.79) devine $q(\omega) = q_s(\omega)$.

Sistemul dinamic este o parte esențială a sistemului de estimare. În fig. 11.8 este arătat un sistem de estimare pentru cazul cînd ecuația diferențială (11.60) este de ordinul întîi.

Se observă că în cazul ideal cînd $\hat{s}(t) = s(t)$, la ieșirea din sumatorul Σ, avem numai zgomotul $n(t)$. Filtrul A transformă acest zgomot, a cărui densitate spectrală de putere se presupune cunoscută, într-un zgomot de densitate spectrală de putere constantă (zgomot alb), care excită sistemul dinamic, astfel încît acesta generează un semnal cu densitate spectrală de putere $q_s(\omega)$.

Să considerăm cazul în care D.S.P. a semnalului $s(t)$ este de forma:

$$q_s(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \tag{11.90}$$

O clasă mare de semnale au o D.S.P. de acest tip (Butterworth).

Pentru a determina parametrii sistemului dinamic, la ieșirea căruia se obține $q_s(\omega)$, facem apel la relația (11.78):

$$H(\omega)\,\overset{*}{H}(\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \tag{11.91}$$

Trecînd la variabila complexă $p = \sigma + j\omega$, relația (11.91) devine:

$$\frac{1}{\alpha^2 - p^2} = \frac{1}{\alpha + p} \frac{1}{\alpha - p} \tag{11.92}$$

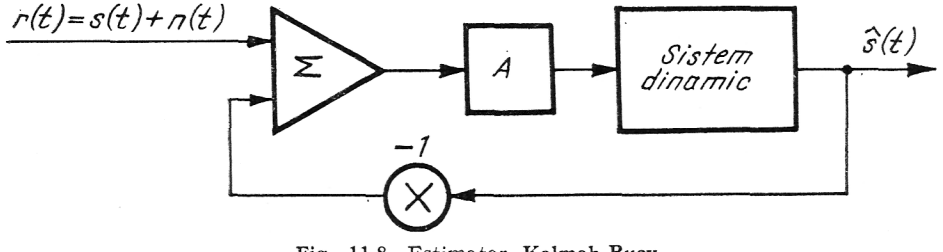


Fig. 11.8. Estimator Kalmah-Bucy.

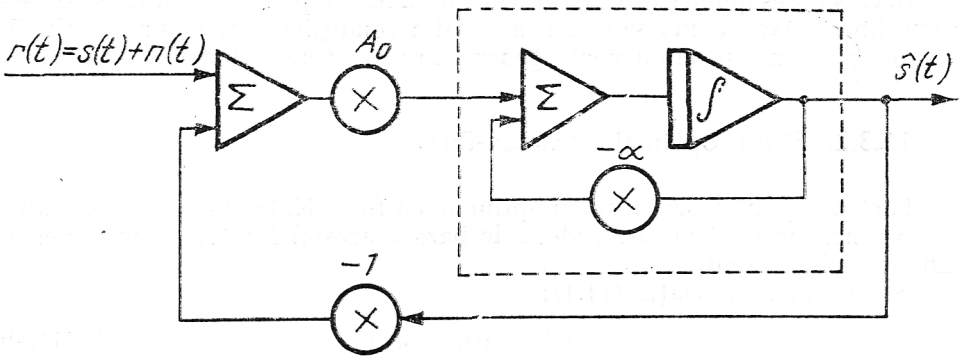


Fig. 11.9. Filtru optimal Kalman-Bucy.

Pentru a obține funcția de transfer a unui filtru realizabil, luăm în considerare numai polul din semiplanul stîng, $p_1 = -\alpha$, care are reziduul $\lambda_1 = 1$.

În aceste condiții, relația (11.80) devine:

$$H(p) = \frac{1}{\alpha + p} \tag{11.93}$$

sau, revenind la variabila ω, avem:

$$H(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \tag{11.94}$$

Sistemul dinamic care are această funcție de transfer, și generează D.S.P $q_s(\omega)$, este arătat în fig. 11.6 unde $\lambda_k = 1$ și $p_k = -\alpha$.

Acest sistem dinamic, introdus în fig. 11.8 ne dă schema de principiu a filtrului optimal Kalman-Bucy, arătat în fig. 11.9, unde $A = A_0$ este o constantă, fiindcă zgomotul din canal a fost considerat ca fiind zgomot alb.

CAPITOLUL 12

TRANSMISIUNI ÎN BANDA DE BAZĂ

Se numesc **transmisiuni în banda de bază** *toate tipurile de transmisiuni care utilizează porțiunea inferioară din banda de frecvență a canalului de transmisiune*. În această categorie intră transmisiunea directă a mesajului $m(t)$, care nu pune probleme deosebite, și toate tipurile de modulație în impulsuri.

12.1. Canalul de transmisiune

Canalele de transmisiune sînt afectate de perturbații coerente și de zgomote. Perturbațiile coerente sînt *diafoniile* și *distorsiunile*. Diafoniile în general sînt neglijabile, ele pot fi micșorate prin mijloace tehnice relativ simple. *Distorsiunile neliniare* sînt și ele neglijabile, dacă semnalul este menținut în domeniul liniar al canalului.

Pentru a studia efectul *distorsiunilor liniare* din canal, se introduce noțiunea de **canal ideal fără distorsiuni.** Cu cît canalul real se îndepărtează mai mult de cel ideal, cu atît distorsiunile liniare vor fi mai mari.

Canalul ideal fără distorsiuni (fig. 12.1) este definit de relația

$$y(t) = A\,x(t - \tau) \tag{12.1}$$

de unde:

$$Y(\omega) = A\,e^{-j\omega\tau}X(\omega) \tag{12.2}$$

dar:

$$Y(\omega) = H(\omega)\,X(\omega) \tag{12.3}$$

deci:

$$H(\omega) = A\,e^{-j\omega\tau} \tag{12.4}$$

Canalele reale se îndepărtează de acest model, în sensul că modulul funcției de transfer $A(\omega)$ este o funcție de frecvență, iar faza $\varphi(\omega)$ în general nu variază liniar cu frecvența. În aceste condiții spunem că avem de-a face cu **canale dispersive.**

Dacă notăm cu:

$$H(\omega) = A(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)} \tag{12.5}$$

atunci parametrii variabili cu frecvența care sînt responsabili pentru dispersia canalului sînt:

— *atenuarea*:

$$a = 20\,log\,\frac{A(\omega)}{A} \tag{12.6}$$

— *timpul de întîrziere de grup*:

$$\tau_g(\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \tag{12.7}$$

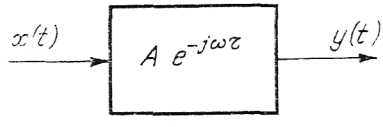


Fig. 12.1. Canal fără distorsiuni.

Distorsiunile liniare fiind distorsiuni reversibile, în principiu pot fi corectate cu ajutorul egalizorilor, dacă se cunosc caracteristicile canalului.

În realitate, canalul nu este niciodată cunoscut cu precizie — mai mult, unii din parametrii lui variază în timp, astfel se pune problema utilizării unor egalizori adaptivi.

În cazul transmisiunilor prin impulsuri, variația cu frecvența a parametrilor canalului duce la apariția fenomenului cunoscut sub numele de **interferență între simboluri.**

12.1.1. Transmisiunea impulsurilor prin canale dispersive

În scopul utilizării cît mai eficiente a canalului de transmisiune se pune *problema determinării numărului maxim de impulsuri* care pot fi transmise printr-un canal, asimilat cu un filtru ideal trece-jos, *fără a avea interferență între simboluri.*

Interferența între simboluri se datorează dispersiei canalului, care face ca în momentele de eșantionare a semnalului recepționat să existe valori provenite din impulsul precedent (fig. 12.2) fapt care duce la diafonii în cazul sistemelor analogice cu diviziunea căilor în timp, sau la erori în cazul sistemelor numerice.

12.1.1.1. Teorema lui Nyquist

Teorema lui Nyquist afirmă că *într-un canal echivalent cu un filtru ideal trece-jos* (fig. 12.3), *cu frecvența de tăiere B, este posibil să se transmită semnale binare* (impulsuri) *independente cu o viteză de semnalizare* $r \leqslant 2B$ *simboluri pe secundă, fără interferență între simboluri.*

Nu este posibil să se transmită un număr mai mare de semnale fără interferență între simboluri.

Prin definiție viteza de semnalizare este:

$$r = \frac{\text{numărul de impulsuri în intervalul } D}{D} \tag{12.8}$$

și este egală cu debitul de informație în cazul transmisiunilor liniare cu simboluri independente.

Să considerăm că semnalele utilizate sînt impulsuri rectangulare (fig. 12.4) de durată τ și amplitudine $\frac{1}{\tau}$ notate cu $p(t)$.

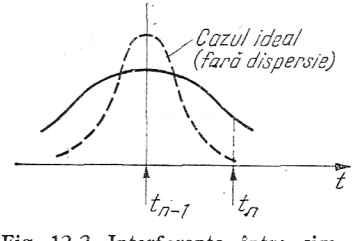


Fig. 12.2. Interferența între simboluri.

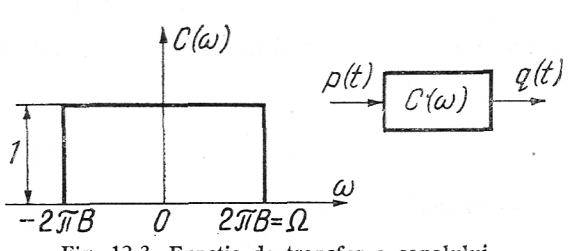


Fig. 12.3. Funcția de transfer a canalului.

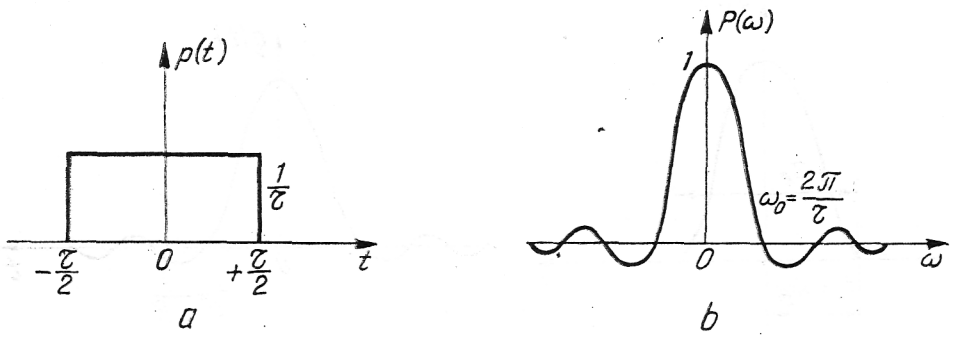


Fig. 12.4. Impuls rectangular:
a — reprezentare în timp; b — densitatea spectrală.

Transformata Fourier a acestui impuls este:

$$P(\omega) = \mathfrak{F}\{p(t)\} = \operatorname{sinc}\frac{\omega\tau}{2} \tag{12.9}$$

În acest caz viteza de semnalizare este: $r = \dfrac{1}{\tau}$ (12.10)

Notăm cu $q(t)$ semnalul de la ieșirea din canalul cu funcția de transfer $C(\omega)$ (filtru ideal trece jos), la intrarea căruia se aplică impulsul $p(t)$.

Pentru a vedea cum crește viteza de semnalizare dacă micșorăm durata τ a impulsurilor la intrare, considerăm următoarele cazuri:

1. *Durata impulsului la intrare τ este mare*, astfel încît lobul principal al densității spectrale $P(\omega)$, respectiv $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{\tau}$, este mai mic decît Ω, lărgimea de bandă a canalului (fig. 12.5, *a*)

$$\omega_0 < \Omega \tag{12.11}$$

În acest caz impulsul la ieșire este aproximativ egal cu cel de la intrare $q(t) \cong p(t)$, avînd fronturi cu un timp de creștere $t_c = \dfrac{1}{2B}$ (fig. 12.5, *b*) și o durată $\tau_e \cong \tau$.

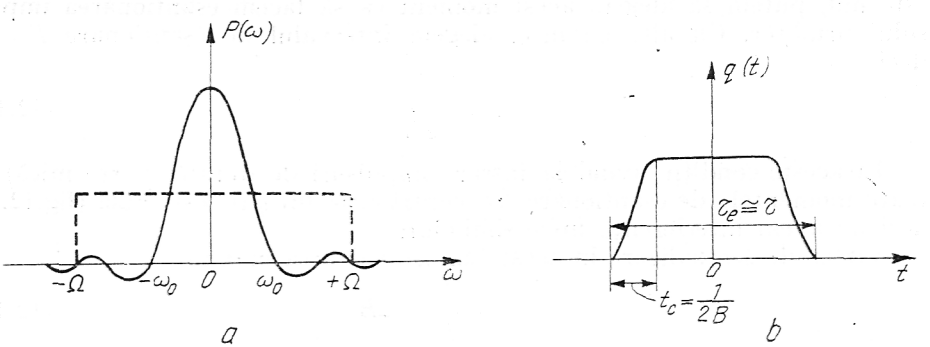


Fig. 12.5. Cazul cînd $\omega_e < \Omega$:
a — densitatea spectrală la intrare; b — semnalul $q(t)$ la ieșire.

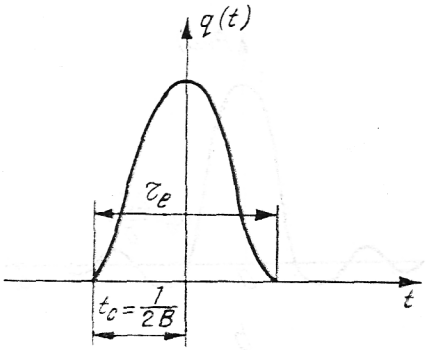


Fig. 12.6. Impulsul la ieșirea din canal.

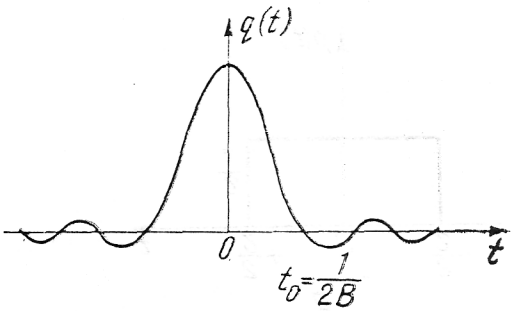


Fig. 12.7. Funcția de pondere a canalului echivalent cu un filtru trece-jos.

2. *Durata impulsului la intrare* τ *scade* pînă cînd

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} = \Omega \tag{12.12}$$

În acest caz numai lobul principal al lui $P(\omega)$ trece prin filtru, forma lui $q(t)$ se îndepărtează de $p(t)$ (fig. 12.6), dar durata semnalului la ieșire rămîne aproximativ aceeași:

$$\tau_e = 2t_e = \frac{1}{B} \tag{12.13}$$

3. *Durata impulsului la intrare scade foarte mult astfel că la limită el poate fi considerat un impuls „delta", $p(t) = \delta(t)$.* În acest caz $q(t)$ este funcția de pondere (fig. 12.7) a filtrului ideal $C(\omega)$

$$q(t) = \frac{\Omega}{\pi} \operatorname{sinc} \Omega t \tag{12.14}$$

Durata semnalului la ieșire poate fi considerată ca fiind:

$$\tau_e = 2t_0 = \frac{1}{B} \tag{12.15}$$

Cu alte cuvinte, dacă $\omega_0 \geqslant \Omega$, durata impulsului la ieșire τ_e nu mai depinde de durata impulsului de la intrare τ.

Ținînd seama de faptul că semnalul la ieșirea din canal la momentul t_0 este nul, putem să alegem acest moment ca să facem eșantionarea impulsului următor. Cu alte cuvinte, alegem intervalul de eșantionare $T = t_0$ deci:

$$T = \frac{1}{2B} \tag{12.16}$$

În aceste condiții (avînd la intrare impulsuri de durată foarte mică) la toate momentele de eșantionare kT contribuția lui $q(t)$ este nulă (fig.12.8), deci nu avem interferență între simboluri.

Viteza de semnalizare în acest caz are valoarea maximă:

$$r_M = \frac{1}{T} = 2B \tag{12.17}$$

Variația vitezei de semnalizare în funcție de durata impulsului de la intrare este arătată în fig. 12.9.

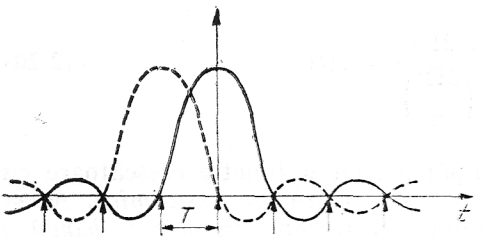


Fig. 12.8. Două impulsuri succesive la ieșirea din canal.

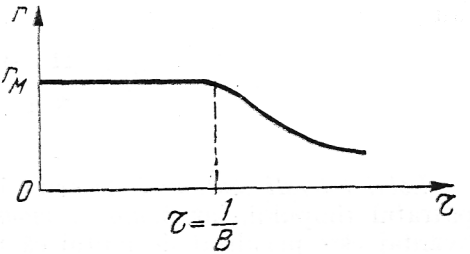


Fig. 12.9. Variația cu τ a vitezei de semnalizare.

12.1.1.2. Transmisiuni cu impulsuri de tip „cosinus ridicat"

Impulsurile de tip sinus cardinal „sinc" discutate în paragraful precedent nu sînt utilizate fiindcă au dezavantajul că au lobii secundari mari și că panta semnalului în momentele de eșantionare este mare. În felul acesta mici variații ale intervalului T de eșantionare (date de imperfecțiunile sistemului de sincronizare), duc la apariția unor valori apreciabile ale impulsului precedent, deci la interferențe între simboluri.

Acest dezavantaj este înlăturat dacă semnalele $q(t)$ care sînt eșantionate la recepție, nu se obțin la ieșirea dintr-un filtru ideal trece-jos (cu lărgime de bandă B), ci la ieșirea dintr-un filtru avînd caracteristica **„cosinus ridicat"** numită și **cosinus pătrat** cu o lărgime de bandă $B_c = 2B$.

Funcția de transfer a acestui filtru (fig. 12.10) este

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi\omega}{2\Omega}\right) = \cos^2\frac{\pi\omega}{4\Omega} \quad \text{pt} \quad |\omega| \leqslant 2\Omega \tag{12.18}$$

$$X(\omega) = 0 \quad \text{pentru} \quad |\omega| > 2\Omega$$

unde $2\Omega = 2\pi B_c$

Funcția de pondere a acestui filtru (fig. 12.11) este

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{\Omega}{\pi}\,\frac{\cos\Omega t}{1 - \left(\frac{2\Omega t}{\pi}\right)^2}\,\text{sinc}\,\Omega t \tag{12.19}$$

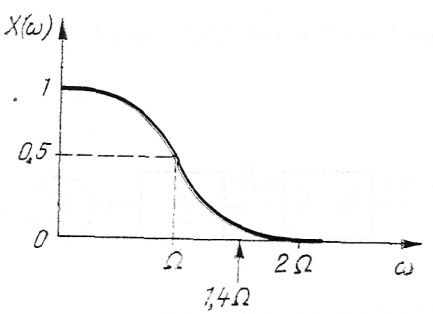


Fig. 12.10. Caracteristica „COS ridicat".

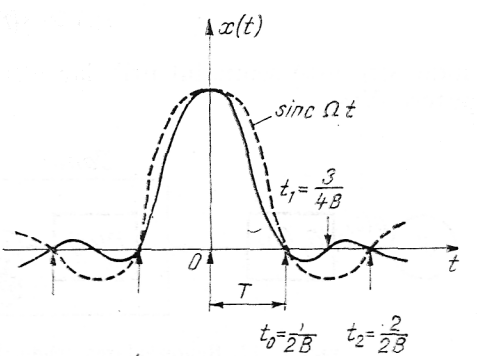


Fig. 12.11. Impulsul de tip „COS ridicat".

sau

$$x(t) = \frac{\Omega}{\pi} \frac{\operatorname{sinc} 2\Omega t}{1 - \left(\frac{2\Omega t}{\pi}\right)^2} = g(t) \tag{12.20}$$

Lobii laterali sînt mici datorită împărțirii cu o funcție crescătoare cu pătratul timpului, iar *panta în momentele de eșantionare este mică*. Acest avantaj este penalizat de faptul că trebuie să *dublăm lărgimea de bandă a canalului*.

Momentele la care se anulează $x(t) = g(t)$ sînt

$$\frac{2}{4B} = \frac{1}{2B}; \quad \frac{3}{4B}; \quad \frac{4}{4B} \ldots$$

În funcția $X(\omega)$ trebuie să fie înglobate toate funcțiile de transfer existente de la ieșirea din sursa care generează impulsurile purtătoare de informație, pînă la dispozitivul de eșantionare de la recepție, unde se face recunoașterea impulsurilor transmise.

Realizarea lui $X(\omega)$ asigură o transmisie fără interferențe între simboluri. Dar în afara acestui deziderat trebuie să asigurăm și o protecție cît mai bună împotriva perturbațiilor, respectiv trebuie să asigurăm un raport semnal/ /zgomot cît mai mare, în momentul eșantionării.

Acest lucru poate fi făcut cu ajutorul unui filtru adaptat G_R conectat înaintea dispozitivului de eșantionare. Introducerea lui G_R la recepție implică introducerea la emisie a unui filtru G_T care împreună cu $C(\omega)$ — funcția de transfer a canalului și cu G_R să asigure realizarea lui $X(\omega)$:

$$X(\omega) = G_T(\omega)\, C(\omega)\, G_R(\omega) \tag{12.21}$$

În fig. 12.12 este arătat un lanț de transmisiune care conține elementele menționate.

În cele ce urmează considerăm că se face o egalizare perfectă a canalului deci $C(\omega) = 1$. În acest caz:

$$X(\omega) = G_T(\omega)\, G_R(\omega) \tag{12.22}$$

Ținînd seama de zgomotele din canal, semnalul recepționat, respectiv semnalul la intrarea în filtrul G_R, este

$$r(t) = s(t) + n(t) \tag{12.23}$$

unde $s(t)$ este semnalul util, iar $n(t)$ zgomotul cu o densitate spectrală de putere $N(\omega)$.

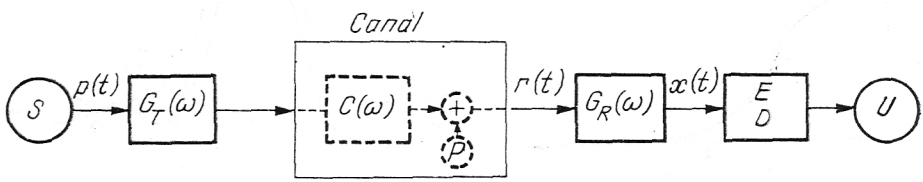


Fig. 12.12. Reprezentarea schematică a unui lanț de transmisiune:
S — sursă; U — utilizator; $G_T(\omega)$, $G_R(\omega)$ — filtre, E, D — eșantionare și demodulare.

În conformitate cu § 7.18.4, raportul semnal perturbație maxim, la ieșirea din filtrul G_R, se obține cînd acesta este adaptat la forma semnalului util $s(t)$, respectiv cînd (v. relația 7.280):

$$G_R(\omega) = \frac{S^*(\omega)}{N(\omega)} \tag{12.24}$$

unde s-a considerat constanta $K = 1$ și $t_0 = 0$, iar $S(\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\}$.

Dat fiind că impulsurile generate de sursă au o durată foarte mică, respectiv pot fi asimilate cu impulsuri *„delta"*, spectrul semnalului $s(t)$ este:

$$S(\omega) = G_T(\omega)\, C(\omega) = G_T(\omega) \tag{12.25}$$

sau ținînd seama de relația (12.22) și de faptul că $X(\omega)$ este real avem:

$$S^*(\omega) = \frac{X(\omega)}{G_R^*(\omega)} \tag{12.26}$$

Introducînd în relația (12.24) obținem

$$|G_R(\omega)| = \frac{X^{\frac{1}{2}}(\omega)}{N^{\frac{1}{2}}(\omega)} \tag{12.27}$$

iar

$$|G_T(\omega)| = X^{\frac{1}{2}}(\omega)\, N^{\frac{1}{2}}(\omega) \tag{12.28}$$

Dacă zgomotul este alb, $N(\omega)$ este o mărime constantă (în particular 1) iar modulele filtrelor sînt:

$$|G_R(\omega)| = |G_T(\omega)| = \cos\frac{\pi\omega}{4\Omega} \quad \text{pentru} \quad \omega \leqslant 2\Omega \tag{12.29}$$

Fazele filtrelor sînt arbitrare, supuse restricției

$$\varphi_R(\omega) + \varphi_T(\omega) = 0 \tag{12.30}$$

fiindcă faza lui $X(\omega)$ este nulă.

Caracteristica *„cosinus ridicat"* descrisă în cele precedente nu este singura caracteristică utilizată în practică, important este să se realizeze o funcție de transfer fără flancuri abrupte.

Rezumînd cele precedente, se poate afirma că *printr-un canal cu o caracteristică de filtru ideal trece-jos, cu frecvența de tăiere* $\Omega = 2\pi B$ *se pot transmite impulsuri cu o viteză de semnalizare* $r \leqslant 2B$.

Practic nu este posibil să se realizeze un asemenea filtru, și chiar dacă s-ar realiza, semnalul obținut la ieșire pune probleme în legătură cu sincronizarea. Aceste probleme pot fi eliminate utilizînd o caracteristică *„cosinus ridicat"* care are însă dezavantajul că mărește banda canalului $B_c = 2B$. După cum se vede însă din fig. 12.10 componentele spectrale mai mari decît $1{,}4\,\Omega$ (cifră aleasă empiric) sînt neglijabile. În consecință, $B_c = 1{,}4\,B$ și dacă considerăm $r = 2B$ rezultă $B_c = 0{,}7r$, relație care ne permite să calculăm lărgimea de bandă necesară B_c în funcție de viteza de semnalizare r bit/s.

12.1.1.3. **Tehnici cu răspuns parțial**

În unele cazuri, în mod deliberat, *se introduce o interferență* (controlată) *între simboluri, în scopul măririi vitezei de semnalizare.*

Printr-o codare adecvată a simbolurilor înainte de transmisia prin canal, la recepție simbolurile pot fi decodate fără dificultate. În felul acesta se poate dubla viteza de semnalizare față de cazul cînd se lucrează cu interferență nulă (sistemul duobinar însemnînd dublarea vitezei de semnalizare). Aceste tehnici se mai numesc **tehnici cu răspuns parțial,** fiindcă semnalul într-un interval T este numai o parte din semnalul total.

Sau, în mod echivalent, se poate spune că prin utilizarea tehnicilor duobinare, putem transmite cu viteza maximă $r = 2B$, utilizînd un filtru trece-jos cu frecvența de tăiere B însă avînd o caracteristică diferită de cea ideală, astfel încît să poată fi implementată fără dificultăți.

Un astfel de filtru poate fi filtrul trece jos cu funcția de transfer de tip *„cosinus"*:

$$\left.\begin{aligned} D(\omega) &= \frac{2\pi}{\Omega}\cos\frac{\pi\omega}{2\Omega} && |\omega| \leqslant \Omega \\ D(\omega) &= 0 && |\omega| > \Omega \end{aligned}\right\} \tag{12.31}$$

Funcția de pondere a acestui filtru este

$$d(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{D(\omega)\} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos \Omega t}{1 - \left(\frac{2\Omega t}{\pi}\right)^2}\right] \tag{12.32}$$

Ambele funcții sînt reprezentate în fig. 12.13.

La intrarea acestui filtru se aplică o succesiune de impulsuri de durată foarte scurtă, asimilată cu impulsuri „delta", cu o viteză de semnalizare $r = 2B = \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{\pi}$:

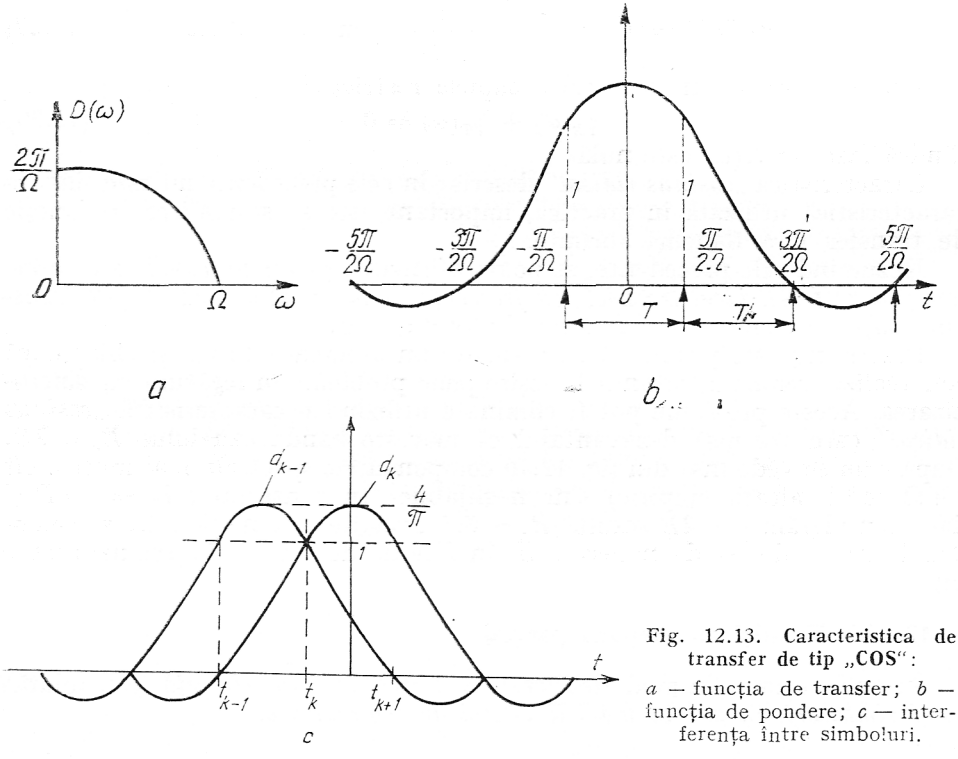


Fig. 12.13. **Caracteristica de transfer de tip „COS"**:
a — funcția de transfer; *b* — funcția de pondere; *c* — interferența între simboluri.

$$p(t) = \sum_k s_k \delta(t - kT) \tag{12.33}$$

unde coeficienții s_k sînt puși în corespondență cu simbolurile $a_k = \{0, 1\}$ generate de sursă, și au valorile $\{-1, +1\}$.

La recepție, respectiv la ieșirea din acest filtru, se obține semnalul

$$s(t) = \sum_k s_k d(t - kT) = \sum_k s_k d_k(t) \tag{12.34}$$

unde s-a notat $d_k(t) = d(t - kT)$.

Eșantionarea nu se face ca de obicei, în momentele $t = kT$, cînd $d_k(t)$ are valoarea maximă, ci la momentele $t = t_k = kT - \frac{T}{2}$ cînd $d_k(t_k) = d\left(-\frac{T}{2}\right) = 1$, așa cum se vede din relația (12.32), ridicînd nedeterminarea.

Rezultă că în momentul de eșantionare t_k avem o interferență între simboluri, dată de impulsul precedent $d_{k-1}(t)$, dar în momentele următoare, t_{k+1}, t_{k+2}, ..., interferența dată de $d_{k-1}(t)$ este nulă (fig. 12.13, *c*). În consecință, la decodare trebuie să se țină seama numai de interferența dată de impulsul precedent.

Notînd cu u_k valoarea eșantionului obținut în momentul t_k avem

$$u_k = s_k + s_{k-1} \tag{12.35}$$

În funcție de valoarea simbolurilor s_k și s_{k-1}, u_k poate lua trei valori:
— valoarea 0 cînd $s_k = 1$ și $s_{k-1} = -1$ sau cînd $s_k = -1$ și $s_{k-1} = 1$;
— valoarea 2, cînd $s_k = 1$ și $s_{k-1} = 1$;
— valoarea —2, cînd $s_k = -1$ și $s_{k-1} = -1$.

Din cele precedente rezultă că *șirul binar* $\{a_k\}$ *de la intrarea în canal este convertit la ieșirea într-un șir* $\{u_k\}$ *cu trei nivele, mărindu-se în felul acesta cantitatea de informație obținută la fiecare eșantionare.*

La apariția primului simbol a_1, neexistînd impuls anterior, avem $u_1 = s_1$. Deci cunoașterea lui u_1 ne dă valoarea lui s_1 deci a lui a_1. În continuare, cunoașterea lui u_2 ne dă valoarea $s_2 = u_2 - s_1$, deci a_2 ș.a.m.d.

Această metodă de decodare, bazată pe relația (12.35) are dezavantajul că dacă se ia o decizie eronată privind de ex. valoarea lui s_{k-1}, respectiv a_{k-1}, această eroare se propagă și la celelalte simboluri.

Pentru a evita acest lucru, înainte de a coda simbolurile a_k în semnalele $\{s_k\}$ se face o **precodare**, în conformitate cu regula:

$$b_k = a_k \oplus b_{k-1} \tag{12.36}$$

Simbolurile $\{b_k\}$ au tot valorile 0 și 1 care se codifică în (-1) respectiv $(+1)$.

Să presupunem că $a_k = 0$, atunci $b_k = b_{k-1}$ și $s_k = s_{k-1}$ iar din relația (12.35) rezultă $u_k = +2$.

Dacă presupunem că $a_k = 1$, atunci $b_k \neq b_{k-1}$, respectiv $s_k = -s_{k-1}$ iar $u_k = 0$.

Rezultă că decodarea se face după o regulă simplă: dacă $u_k = \pm 2$ se decide $a_k = 0$, iar dacă $u_k = 0$, se decide $a_k = 1$.

Implementarea decodării este simplă: se redresează semnalul u_k și semnalul obținut se compară cu pragul 1. Dacă semnalul redresat este mai mare decît 1, se decide $a_k = 0$, dacă semnalul redresat este mai mic decît 1, se decide $a_k = 1$.

Avantajul metodei „duobinare" constă în faptul că *se transmite cu viteza de informare maximă* $r = 2B$ *printr-un canal de lărgime de bandă* B, care

are o caracteristică de frecvență ușor de realizat, sistemul fiind foarte puțin sensibil la erori de sincronizare.

Dezavantajul constă în faptul că *pentru a obține aceeași probabilitate de decodare corectă*, ca sistemele cu interferență între simboluri nulă, *este nevoie de puteri mai mari.*

12.1.2. Măsurarea efectului perturbațiilor în canalele reale

Pentru a vizualiza efectul perturbațiilor în canalele reale, la ieșirea din filtrul $G_R(\omega)$ (fig. 12.12) se aplică un osciloscop (plăcile verticale) cu o bază de timp liniară de durată T (intervalul de eșantionare). În fig. 12.14 sînt reprezentate o succesiune de impulsuri polare (valori pozitive și negative pentru simbolurile 1 și 0) și imaginea care apare pe osciloscop, cunoscută sub numele de diagrama ochiului.

În fig. 12.15, este arătată cum se modifică diagrama ochiului dacă impulsurile sînt distorsionate. Se observă că deschiderea ochiului este cu atît mai mare cu cît distorsiunile sînt mai mici.

Dacă canalul are și zgomote importante, diagrama ochiului devine foarte neregulată și poate fi reprezentată schematic ca în fig. 12.16.

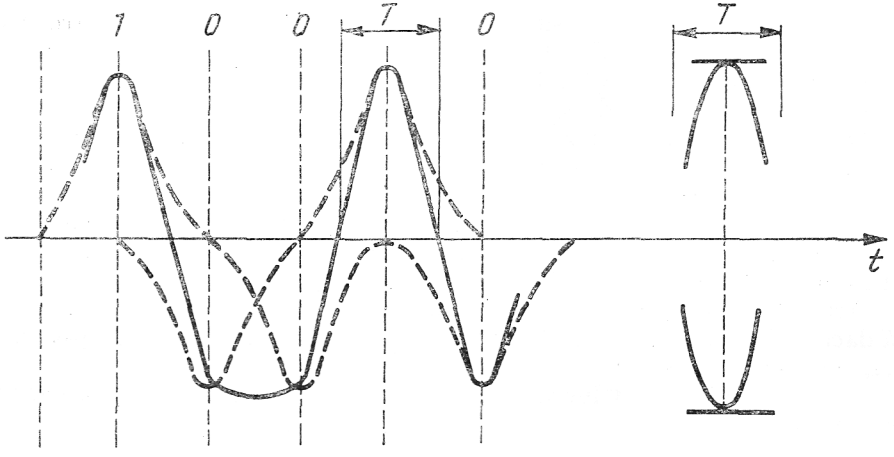


Fig. 12.14. Impulsuri ideale vizualizate pe osciloscop.

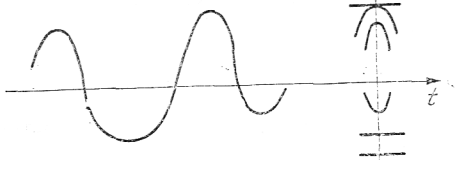


Fig. 12.15. Impulsuri reale vizualizate pe osciloscop.

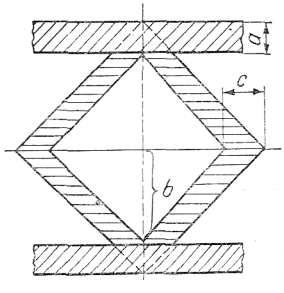


Fig. 12.16. Diagrama ochiului în prezența zgomotelor.

Grosimea barelor orizontale a este o măsură a distorsiunilor suferite de valoarea de vîrf a impulsurilor în momentul cînd deschiderea ochiului este maximă.

Dimensiunea b dă marginea minimă împotriva erorilor date de zgomote. Dimensiunea c este importantă pentru sistemele care-și extrag informația necesară sincronizării din momentele de anulare a semnalului. Cu cît c este mai mic, sincronizarea se va face în condiții mai bune.

12.2. Transmisiuni analogice

Se spune că avem **transmisiuni analogice** cînd *unul din parametrii semnalului transmis este variat proporțional cu eșantionul $m(kT)$ al mesajului pe care dorim să-l transmitem.*

În această categorie intră modulația impulsurilor în amplitudine, în frecvență, în durată, în poziție și în interval. Dintre acestea, cele mai des utilizate sînt modulația impulsurilor în amplitudine, în poziție și în interval.

12.2.1. Transmisiuni multiple cu diviziune a căilor în timp

Se numesc **transmisiuni multiple cu diviziunea căilor în timp,** transmisiunile în care *între două eșantioane ale mesajului $m(t)$ se transmit eșantioanele altor mesaje.* În fig. 12.17,*a* sînt arătate impulsurile nemodulate corespunzătoare mai multor căi.

În intervalul de eșantionare $T = \frac{1}{2W}$ se introduc impulsurile corespunzătoare altor căi. La recepție, o poartă comandată de dispozitivele de sincronizare se deschide numai în momentul în care la intrarea ei este prezent impulsul corespunzător respectivei căi. Sistemul cu diviziunea căilor în timp este arătat schematic în fig. 12.17,*b*. Cheia „C" se rotește cu perioada T.

Dacă notăm cu N numărul de căi introduse în intervalul T, atunci viteza de semnalizare este:

$$r = \frac{N}{T} = 2WN \qquad (12.37)$$

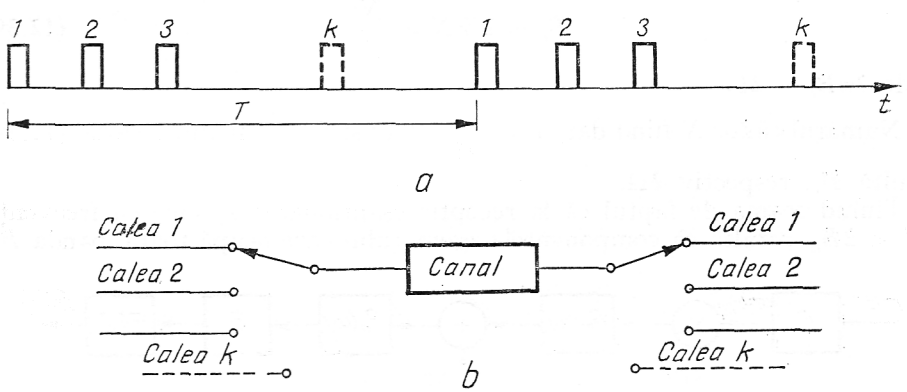


Fig. 12.17. Diviziunea căilor în timp.

Fiindcă lărgimea de bandă a canalului $B_c = 0{,}7\ r$ avem:

$$B_c = 1{,}4\ WN \tag{12.38}$$

Lărgimea de bandă a canalului B_c crește direct proporțional cu numărul de căi N.

În aplicații numărul N de căi este limitat de considerente tehnologice, chiar dacă dispunem de lărgimea de bandă necesară.

Prezența unei interferențe între simboluri se traduce cu apariția unei diafonii între căi.

12.2.2. Modulația impulsurilor în amplitudine (M.I.A.)

Sistemele cu modulația impulsurilor în amplitudine sînt ușor de implementat, însă *stabilitatea* lor *la perturbații este redusă.*

Operațiile care se efectuează într-o cale de transmisiune sînt arătate în fig. 12.18.

În E se efectuează o eșantionare cu pasul $T = \frac{1}{2W}$. Eșantioanele $m(kT)$ se multiplică cu impulsurile rectangulare $p(t)$ (de durată foarte mică). Filtrele $G_T(\omega)$ și $G_R(\omega)$ formează semnalul în conformitate cu cele stabilite în § 12.1.1.2 sau § 12.1.1.3. La ieșirea din filtrul adaptat $G_R(\omega)$ se obține raportul maxim între semnal și perturbație și se face o nouă eșantionare, obținîndu-se eșantioanele $\hat{m}(kT)$ și printr-o filtrare trece-jos, sau printr-o altă metodă de recuperare (§ 8.4) se obține mesajul estimat $\hat{m}(t)$.

● **Raportul semnal/perturbație în M.I.A.** Considerăm că zgomotul $n(t)$ are o densitate spectrală de putere constantă $\frac{1}{2}N_0$, că mesajul estimat $\hat{m}(t)$ este aproximativ egal cu mesajul original, că demodularea se face cu un filtru ideal trece-jos cu frecvență de tăiere W, cea mai înaltă frecvență din spectrul lui $m(t)$, și că numărul de căi este N.

Pentru simplificarea calculelor considerăm că lărgimea de bandă teoretică a canalului este 2Ω (și nu $1{,}4\Omega$). În acest caz, din relația (12.38) se obține

$$B_c = 2WN = \frac{N}{T} \tag{12.39}$$

unde $2\pi B_c = 2\Omega$.

Numărul căilor N fiind dat, $T = \frac{1}{2W}$ este și el dat și din relația (12.39) rezultă B_c, respectiv 2Ω.

Ținînd seama de faptul că la recepție eșantionarea se face cu frecvența $2W < 2B_c$, rezultă că componentele zgomotului care ocupă toată banda B_c,

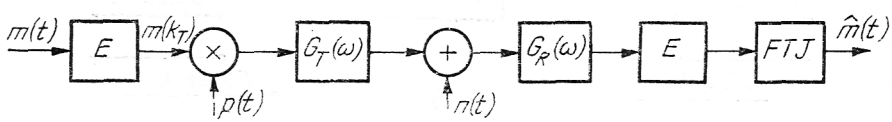


Fig. 12.18. Sistem cu modulația impulsurilor în amplitudine.

prin eșantionare se suprapun, astfel încît puterea zgomotului la ieșire, în lărgimea de bandă W se calculează ținînd seama de aceste suprapuneri. Componentele zgomotului fiind independente, densitățile spectrale care se suprapun în domeniul $(-2\pi W)$ la $(+2\pi W)$, se adună. Rezultatul acestor adunări este echivalent cu integrala

$$P = \frac{N_0}{4\pi}\int_{-2\Omega}^{+2\Omega} |G_R(\omega)|^2 \, d\omega \tag{12.40}$$

Înlocuind pe $G_R(\omega)$ cu valoarea dată de relația (12.29) se obține puterea de zgomot la ieșirea din filtrul demodulatorului:

$$P = \frac{N_0}{4\pi}\int_{-2\Omega}^{+2\Omega} \cos^2 \frac{\pi\omega}{4\Omega} \, d\omega = \frac{1}{2} N_0\Omega = \frac{1}{2} N_0 B_c \tag{12.41}$$

La același rezultat se ajungea dacă considerăm dispersia unui eșantion oarecare a zgomotului $n(t)$. Dispersia acestui eșantion σ_n^2 este egală cu puterea zgomotului dată de relația (12.41). Raportul semnal/perturbație poate fi exprimat și ca raportul dintre dispersia eșantionului mesajului $m(t)$ și dispersia zgomotului $n(t)$.

Raportul semnal/perturbație la ieșire din demodulator este:

$$\frac{S}{P} = \frac{\widetilde{m^2(t)}}{P} = 2\frac{\widetilde{m^2(t)}}{N_0 B_c} \tag{12.42}$$

unde B_c este lărgimea de bandă a canalului.

Înlocuind relația (12.39) în relația (12.42) se obține

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{\widetilde{m^2(t)}}{WNN_0} \tag{12.43}$$

adică **raportul semnal/perturbație** *este invers proporțional cu lărgimea de bandă a mesajului și cu numărul de canale.*

12.2.3. Modulația impulsurilor în poziție (M.I.P.)

Parametrul care transmite informația este *deplasarea* Δp *a poziției impulsurilor față de momentele de eșantionare* (fig. 12.19).

Această deplasare este direct proporțională cu eșantioanele mesajului

$$\Delta p = cm(kT) \tag{12.44}$$

unde c este constanta modulatorului.

În cele ce urmează vom considera $c = 1$.

La recepție impulsurile de tipul cos^2 sau de alt tip, sînt comparate în demodulator cu un nivel constant, și momentul în care semnalul ajunge la acest nivel este considerat ca fiind momentul de apariție a impulsului. Diferența între acest moment și momentele de eșantionare ne dă deplasarea Δp a impulsului (fig. 12.20).

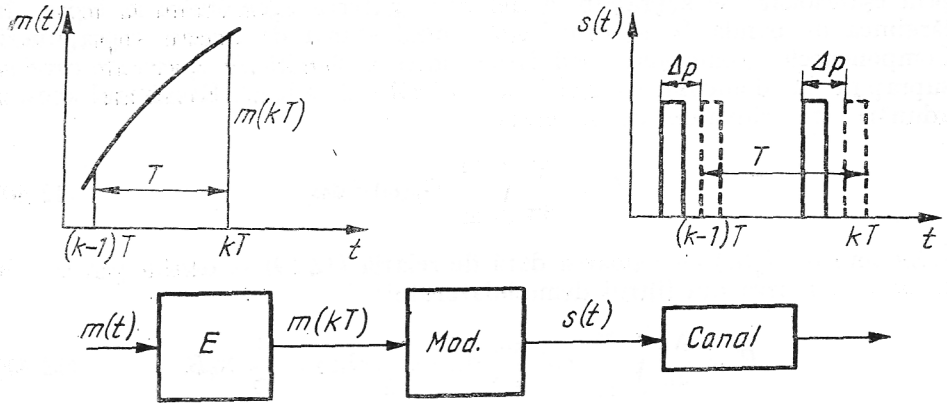


Fig. 12.19. Modularea impulsurilor în poziție.

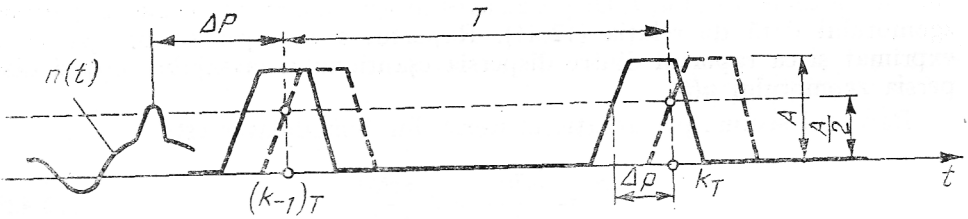


Fig. 12.20. Impulsuri recepționate — modulate în poziție.

Pentru a calcula numărul de căi ale sistemului multiplex, trebuie să se țină seama și de deviația maximă Δp_M a impulsurilor corespunzînd diferitelor căi (fig. 12.21).

Pentru a avea maxim de protecție împotriva perturbațiilor și a diafoniilor, intervalul „θ" între două impulsuri se ia:

$$\theta = t_{k+1} - t_k = \tau + 2\Delta p_M \tag{12.45}$$

unde τ este durata unui impuls.

Dacă impulsurile sînt de tipul *„cos ridicat"* (rel. 12.20) durata este:

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2}{B_c} \tag{12.46}$$

B_c fiind lărgimea de bandă a canalului, $2\pi B_c = 2\Omega$.

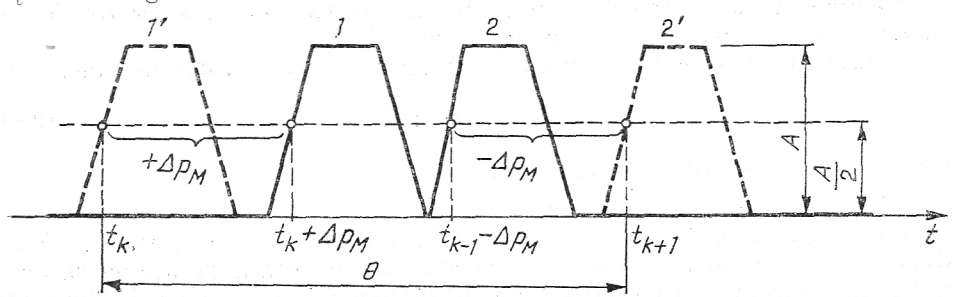


Fig. 12.21. Impulsurile modulate în poziție a două căi alăturate (apropierea maximă):
1' — impulsul nemodulat al căii unu; 2' — impulsul nemodulat al căii doi; 1 și 2 — impulsuri modulate cu polarități diferite.

Numărul maxim de căi care se pot însera între două impulsuri aparținînd aceleași căi este:

$$N = \frac{T}{\theta}\frac{B_c}{4W}\frac{1}{1 + B_c\Delta p_M} \tag{12.47}$$

unde W este cea mai înaltă frecvență din spectrul mesajului.

Dacă deviațiile de poziție Δp_M sînt mici, avem aproximativ:

$$N = \frac{B_c}{4W} \tag{12.48}$$

deci *numărul de căi este egal cu jumătate din numărul căilor în cazul M.I.A.* (relația (12.39)). Să considerăm că peste succesiunea de impulsuri $s(t)$ modulate în poziție se suprapune zgomotul $n(t)$:

$$r(t) = s(t) + n(t) \tag{12.49}$$

Dacă valoarea de vîrf a zgomotului depășește nivelul $\frac{A}{2}$ se comparație (fig. 12.20) receptorul interpretează acest fapt, ca fiind prezent un impuls purtător de informație cu o deplasare ΔP, cînd în realitate această deplasare este produsă numai de zgomote și deci apare ca un zgomot puternic la ieșirea din demodulator. Pentru a evita acest lucru se pune condiția

$$n_v < \frac{A}{2} \tag{12.50}$$

unde $n_v = 4\sigma$ este valoarea de vîrf a zgomotului, iar σ^2 este dispersia zgomotului (de componentă medie nulă) egală cu puterea lui

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi B_c} N(\omega)\,d\omega \tag{12.51}$$

unde $N(\omega)$ este D.S.P. a zgomotului și B_c lărgimea de bandă a canalului.

Ținînd seama de cele precedente avem:

$$A > 8\sigma \tag{12.52}$$

Dacă această condiție nu este îndeplinită, la ieșire apar zgomote foarte puternice. Din această cauză se spune că *M.I.P. are un* **prag** (dat de rel. 12.52) *și nu funcționează în condiții normale decît dacă pragul este depășit.*

Pentru a evalua raportul semnal/perturbație, considerăm în cele ce urmează că pragul este depășit, respectiv condiția (12.52) este îndeplinită.

Semnalul $s(t)$ în jurul valorii t_k care ne interesează poate fi considerat ca avînd o creștere liniară (fig. 12.22).

$$s(t) = \frac{A}{\varepsilon}\,t \tag{12.53}$$

unde ε este timpul de creștere al semnalului.

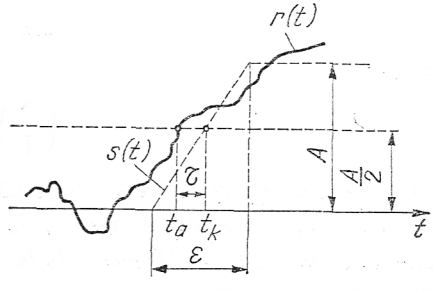


Fig. 12.22. Semnalul recepționat $r(t)$

În jurul momentului t_k semnalul recepționat nemodulat este

$$r(t) = \frac{A}{\varepsilon} t + n(t) \tag{12.54}$$

Nivelul $\frac{A}{2}$ este atins în momentul notat cu t_a:

$$r(t_a) = \frac{A}{2} \tag{12.55}$$

Notăm cu $\Delta\tau$ diferența

$$\Delta\tau = t_k - t_a \tag{12.56}$$

Înlocuind în rel. (12.54) obținem:

$$r(t_k - \Delta\tau) = \frac{A}{\varepsilon}(t_k - \Delta\tau) + n(t_k - \Delta\tau) = \frac{A}{2} \tag{12.57}$$

Ținînd seamă că $\frac{A}{\varepsilon} t_k = \frac{A}{2}$ se obține:

$$\frac{A}{\varepsilon} \Delta\tau = n(t_k - \Delta\tau) \tag{12.58}$$

Deplasarea $\Delta\tau$ fiind produsă numai de perturbații va produce un zgomot la ieșire.

Considerînd că $c = 1$, rezultă că semnalul la ieșire din demodulator este $\Delta u = \Delta\tau$. În consecință, puterea zgomotului de la ieșire este:

$$\overline{\Delta u^2} \frac{A^2}{\varepsilon^2} = \overline{n^2(t - \Delta\tau)} = \sigma^2 \tag{12.59}$$

fiindcă zgomotul $n(t)$ este un proces staționar.

Ținînd seama de cele precedente, raportul semnal/perturbație la ieșire este:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\overline{\Delta u^2}} = \frac{A^2}{\varepsilon^2} \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\sigma^2} \tag{12.60}$$

Considerînd cazul particular cînd

$$m(t) = \Delta p \sin \omega_m t$$

avem:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{A^2}{2\sigma^2}\left(\frac{\Delta p}{\varepsilon}\right)^2 \tag{12.61}$$

Din relațiile precedente se vede că *raportul semnal/perturbație la ieșire poate fi mărit dacă micșorăm timpul de creștere* ε. Această *micșorare* a lui ε *este limitată de creșterea lărgimii de bandă a canalului,* care duce la creșterea zgomotului peste limita impusă de relația (12.52).

Ținînd seamă că $\sigma^2 = B_c N_0$ și că $\varepsilon = \frac{1}{B_c}$ (la semnalele de tip „cos ridicat") și făcînd ipoteza că $B_c \Delta p_M \ll 1$, raportul semnal/perturbație dat de relația (12.60) poate fi pus sub forma:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{B_c A^2}{N_0} \widetilde{\widetilde{m^2(t)}} \tag{12.62}$$

din care se vede că *raportul semnal/perturbație crește cu lărgimea de bandă dacă relația* (12.52) *este satisfăcută.*

Luînd în considerare rel. (12.48) avem:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{4WN}{N_0} A^2 \widetilde{\widetilde{m^2(t)}} \tag{12.63}$$

Pentru a compara sistemele M.I.A. și M.I.P. din punctul de vedere al stabilității la perturbații, considerăm că $A = 1$ și evaluăm raportul:

$$\rho = \frac{\left(\frac{S}{P}\right)_{\text{M.I.P.}}}{\left(\frac{S}{P}\right)_{\text{M.I.A.}}} = 2W^2N^2 \tag{12.64}$$

din care rezultă *superioritatea M.I.P. față de M.I.A. din punctul de vedere al realizării unui raport semnal/perturbație la ieșire, ridicat.*

12.2.4. Modulația impulsurilor în interval (M.I.I.)

Modulația impulsurilor în interval este înrudită cu modulația impulsurilor în poziție, cu diferența că *parametrul care transportă informația* nu este deplasarea impulsurilor față de un reper fix de timp (dat de sistemul de sincronizare), ci *intervalul între două impulsuri* (fig. 12.23).

Rezultă deci că *sistemul este asincron,* fapt care este un mare avantaj.

Fundamentarea teoretică a acestui sistem, respectiv eșantionarea la intervale de timp aleatoare, este o problemă complexă care depășește cadrul acestei lucrări.

În fig. 12.24 este arătată o modalitate simplă de a realiza un sistem cu M.I.I.

Calculul raportului semnal/perturbație este asemănător celui de la M.I.P.

Se remarcă că *M.I.I. nu poate fi utilizată pentru transmisiuni multiple.*

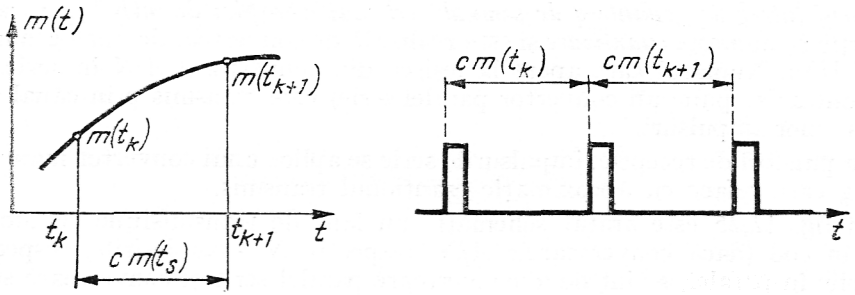


Fig. 12.23. Modulația impulsurilor în interval.

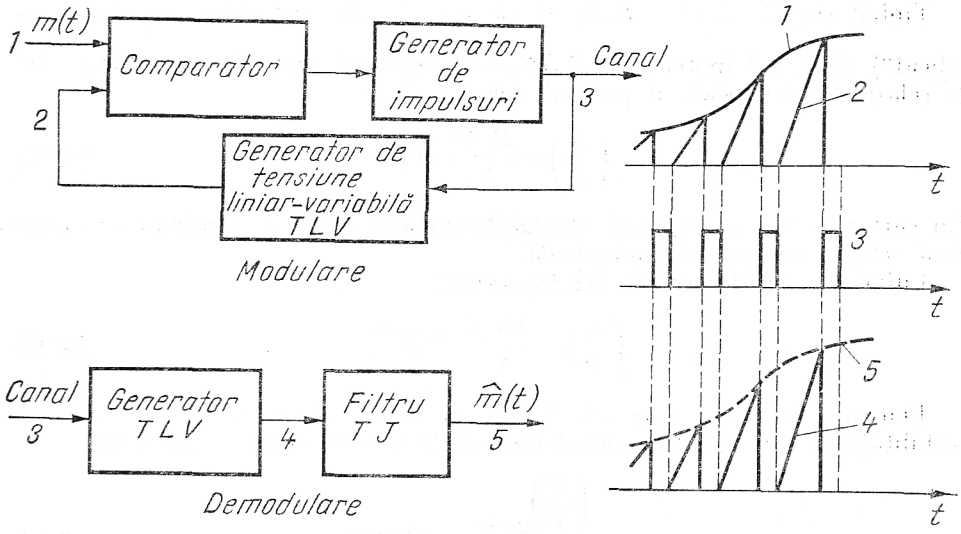


Fig. 12.24. Modularea și demodularea M.I.I.

12.3. Transmisiuni numerice

Transmisiunile numerice se caracterizează prin faptul că *informația necesară reconstituirii mesajului se transmite sub formă numerică*, respectiv ca o succesiune de semnale care reprezintă cifrele 0 și 1 ale unui număr binar. În felul acesta se realizează o *stabilitate foarte mare la perturbații*, fiindcă receptorul nu trebuie să recunoască forma semnalului, ci să facă numai o detecție de semnale. În canalul de transmisiune din loc în loc, impulsurile pot fi refăcute, astfel încît efectul perturbațiilor nu se cumulează.

Sistemele de transmisiune numerice sînt *foarte stabile în timp*, neavînd nevoie de reglaje de ajustare. Se realizează cu ușurință cu circuite integrate, deci la un preț scăzut.

12.3.1. Modulația în cod (M.I.C.)

La **modulația în cod** *fiecare eșantion* $m(kT)$ *al mesajului este înlocuit cu numărul întreg de „cuante q de semnal" cel mai apropiat de* $m(KT)$. Această operație se numește *cuantizare* și este realizată de convertoarele analog/numerice (A/N). Numărul care apare la ieșirea din convertorul A/N în serie (în caz contrar se pune un convertor paralel-serie) este transmis prin canal sub forma unor impulsuri.

La punctul de recepție, impulsurile serie se aplică unui convertor numeric/analog care reface cu aproximație eșantionul transmis.

În fig. 12.25 este arătat schematic un lanț de transmisiune cu modulație în cod (dacă convertoarele A/N, respectiv N/A au ieșirile, respectiv intrările în paralel, se introduc convertoare paralel serie și convertoare serie paralel).

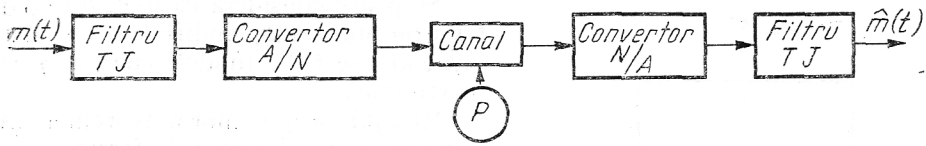


Fig. 12.25. Modulația în cod.

12.3.1.1. Cuantizarea uniformă

Pentru a simplifica expunerea, vom considera cazul mesajelor unipolare. În cazul semnalelor bipolare se utilizează convertoare A/N și N/A bipolare, la care cifra cea mai semnificativă este cifra de semn.

Notînd cu V valoarea de vîrf a mesajului, numărul de nivele de cuantizare este:

$$N = \frac{V}{q} = 2^n \tag{12.65}$$

unde „q" este o *„cuantă de semnal"* de mărime constantă (fig. 12.26).

Valoarea de vîrf V se alege astfel încît să fie o putere a lui 2. În acest caz spunem că facem o *cuantizare cu n cifre binare*, care se transmit sub formă de impulsuri, între două eșantioane.

Cele N nivele de cuantizare, notate în fig. 12.26 cu simbolurile $s_0, s_1, \ldots, s_n$ pot să fie codificate în diferite moduri. Cel mai simplu cod este codul binar, care alocă nivelului s_i numărul binar i.

Faptul că eșantioanele $m(kT)$ nu sînt redate decît cu o anumită aproximație face ca la recepție să apară un zgomot, numit *zgomot de cuantizare*.

Eșantionul refăcut din cuante, notat cu $m_q(kT)$, fig. 12.27, are expresia

$$m_q(kT) = m(kT) + \theta_k q \tag{12.66}$$

unde θ_k este o variabilă aleatoare cu distribuție uniformă (fig. 12.28):

$$w(\theta) = 1 \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \theta_k \leqslant \frac{1}{2} \tag{12.67}$$

$$w(\theta) = 0 \qquad \frac{1}{2} < \theta_k ; \quad -\frac{1}{2} > \theta_k$$

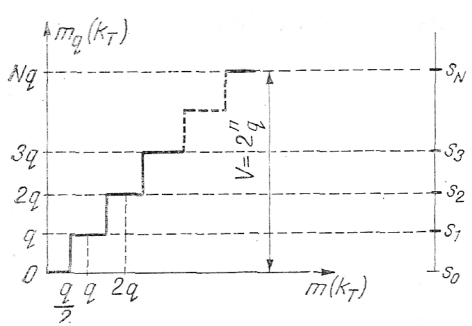


Fig. 12.26. Cuantizarea uniformă.

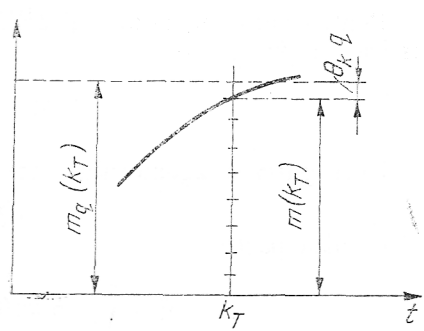


Fig. 12.27. Aproximarea eșantioanelor.

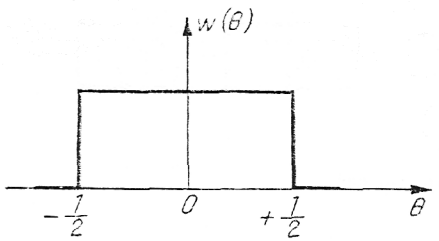


Fig. 12.28. Densitatea de probabilitate a V.A.O.

Se poate considera că $w(\theta)$ este o distribuție uniformă, indiferent ce distribuție are $m(kT)$, fiindcă cuanta q este foarte mică.

Mesajul $m(t)$ conform teoremei eșantionării poate fi pus sub forma:

$$m(t) = \sum_k m(kT)\ \text{sinc}\ \frac{\pi}{T}(t - kT) \tag{12.68}$$

Dacă în loc să se transmită eșantioanele $m(kT)$ se transmit eșantioanele $m_q(kT)$ se obține semnalul:

$$m_q(t) = \sum_k m_q(kT)\ \text{sinc}\ \frac{\pi}{T}(t - kT) \tag{12.69}$$

Semnalul eroare este:

$$e(t) = m_q(t) - m(t) \tag{12.70}$$

Semnalul eroare poate fi interpretat ca fiind zgomot, din cauză că semnalul recepționat este:

$$m_q(t) = m(t) + e(t) \tag{12.71}$$

Pentru a evalua raportul semnal/perturbație, trebuie să evaluăm întîi puterea zgomotului $e(t)$.

Înlocuim în relația (12.70) pe (12.68) și (12.69) și se obține:

$$e(t) = \sum_k [m_q(kT) - m(kT)]\ \text{sinc}\ \frac{\pi}{T}(t - kT) \tag{12.72}$$

sau ținînd seama de (12.66) și considerînd un mesaj de durată finită D limitat la frecvența W avem:

$$e(t) = q \sum_{k=1}^{2WD} \theta_k\ \text{sinc}\ \frac{\pi}{T}(t - kT) \tag{12.73}$$

Ținînd seama de relația (6.50) privind ortogonalitatea funcțiilor sinc, puterea medie a zgomotului $e(t)$ este:

$$P = \frac{1}{D}\int_0^D e^2(t)\,dt = \frac{Tq^2}{D}\sum_{k=1}^{2WD}\theta_k^2 = \frac{q^2}{2WD}\sum_{k=1}^{2DW}\theta_k^2 \tag{12.74}$$

Pentru valori mari ale lui $2WD$ media aritmetică tinde spre media statistică, și putem scrie:

$$\sigma_\theta^2 = \frac{1}{2WD}\sum_{k=1}^{2WD}\theta_k^2 \tag{12.75}$$

Deci puterea zgomotului este:

$$P = q^2\sigma_\theta^2 \tag{12.76}$$

Pe de altă parte

$$\sigma_\theta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2 w(\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\theta^2\,d\theta = \frac{1}{12} \tag{12.77}$$

deci:

$$P = \widetilde{\widetilde{e^2(t)}} = \frac{1}{12} q^2 \tag{12.78}$$

Raportul semnal/perturbație este:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{\widetilde{\widetilde{m^2(t)}}}{\widetilde{\widetilde{e^2(t)}}} = 12 \frac{\widetilde{\widetilde{m^2(t)}}}{q^2}$$

Sau, ținînd seama de relația (12.65):

$$\left(\frac{S}{P}\right) = 12N^2 \frac{\widetilde{\widetilde{m^2(t)}}}{V^2} \tag{12.79}$$

rezultă că *raportul semnal/perturbație crește cu pătratul numărului de nivele de cuantizare.*

Se numește **factor de vîrf al mesajului,** raportul:

$$C = \frac{V^2}{\widetilde{\widetilde{m^2(t)}}} \tag{12.80}$$

Introducînd în relația (12.79) se obține:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{12N^2}{C^2} \tag{12.81}$$

din care rezultă că *pentru un N dat, cuantizarea uniformă dă rezultate mai bune în cazul semnalelor cu C mic.*

În multe cazuri, cum este cazul semnalului telefonic, valoarea patratică medie este mult mai mică decît valoarea de vîrf, deci C este mare și deci raportul semnal/perturbație este mic.

Acest neajuns poate fi înlăturat printr-o cuantizare neuniformă.

● **Utilizarea unui semnal cuasialeator în cazul cuantizării uniforme cu cuante mari.** În cele precedente, efectul cuantizării a fost evaluat prin mărimea erorii patratice medii. În cazul televiziunii sau al telefoniei apar însă și alte efecte importante pentru observator, respectiv ascultător.

Dacă numărul de biți în care se cuantizează mesajul este redus, respectiv cuanta este mare, nu se mai poate spune că variabila aleatoare θ are o distribuție independentă de mesaj. În acest caz, *zgomotul de cuantizare devine dependent de mesaj și produce efecte supărătoare.*

Pentru a se micșora dependența zgomotului de cuantizare de mesaj, la eșantioanele mesajului, înainte de cuantizare, se însumează un semnal pseudoaleator cu o distribuție uniformă, care apoi la recepție este scăzut din eșantionul reconstituit.

Dat fiind că semnalul este pseudoaleator, printr-o sincronizare adecvată, el poate fi reconstituit la punctul de recepție.

Adunarea semnalului pseudoaleator la eșantioanele care urmează să fie cuantizate face ca zgomotul de cuantizare să capete un caracter aleator independent de eșantioanele mesajului transmis.

În cazul semnalului de televiziune cuantizat cu puține nivele, dependența erorii de cuantizare de mesaj duce la așa-numitele *„efecte de conturare"* care sînt mult mai neplăcute decît efectele unui zgomot de cuantizare de aceeași valoare patratică medie dar fără efecte de conturare.

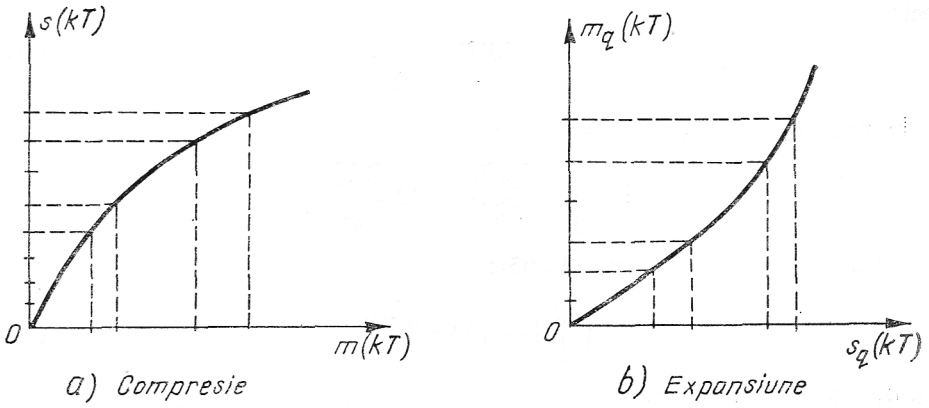


Fig. 12.29. Compandare:
a — compresie; *b* — expansiune.

12.3.1.2. Cuantizarea neuniformă

Cuantizarea neuniformă este bazată pe ideea de *a utiliza cuante mai mari, la valorile semnalului care au o probabilitate mică, și cuante mici pentru valorile semnalului cu probabilitatea mare.* Rezultă că pentru toate semnalele cu o distribuție gaussiană este util să se facă o *cuantizare neuniformă.* Acest lucru poate fi realizat printr-o compresie logaritmică a mesajului, urmată de o cuantizare uniformă (fig. 12.29).

Eșantionul mesajului este comprimat în conformitate cu relația:

$$s(kT) = a \log\left[1 + \mu \frac{m(kT)}{V}\right] \tag{12.82}$$

unde:

a este o constantă;

μ — factorul de compresie;

V — valoarea de vîrf a mesajului.

La recepție se face transformarea inversă, adică o expansiune exponențială. Operația în ansamblul ei se numește *compandare.*

12.3.1.3. Raportul semnal/perturbație datorat erorilor numerice

Cifrele care conțin informația privind valoarea fiecărui eșantion se transmit sub formă de impulsuri, în general de tipul „cos^2". Datorită *perturbațiilor din canal apar erori* în detectarea acestor impulsuri. *Probabilitatea acestor erori depinde de zgomotul din canal și de procedeul de detecție.*

Practic, se poate considera că această probabilitate este de ordinul 10^{-4} la 10^{-7}. Rezultă că probabilitatea ca într-un cuvînt de cod (care corespunde unui eșantion) să existe mai mult de o eroare este extrem de mică. În consecință, în cele ce urmează vom considera că într-un cuvînt avem o singură eroare și că transmisiunea se face fără protecție împotriva erorilor (fără redundanță).

Vom nota cu p probabilitatea unei erori și importanta acestei erori depinde de ponderea simbolului (cifrei) afectate.

Considerăm că se face o codare binară (pentru alte tipuri de coduri, problema se pune în același mod):

$$m_q(kT) = (\alpha_{n-1}2^{n-1} + \alpha_{n-2}2^{n-2} + \ldots + \alpha_j 2^j + \ldots + \alpha_0 2^0)\, q \qquad (12.83)$$

Dacă una din cifrele α_j se transmite eronat $\bar{\alpha}_j$, după decodare se obține

$$\hat{m}_q(kT) = (\alpha_{n-1}2^{n-1} + \ldots + \bar{\alpha}_j 2^j + \ldots + \alpha_0 2^0)\, q \qquad (12.84)$$

unde:

$$\bar{\alpha}_j = 0 \quad \text{dacă} \quad \alpha_j = 1 \quad \text{și} \quad \bar{\alpha}_j = 1 \quad \text{dacă} \quad \alpha_j = 0$$

Eroarea după demodulare este:

$$\Delta m(kT) = m_q(kT) - \hat{m}_q(kT) = (\alpha_j - \bar{\alpha}_j)\, 2^j q \qquad (12.85)$$

însă:

$$|\alpha_j - \bar{\alpha}_j| = 1$$

deci

$$|\Delta m(kT)| = 2^j q \qquad (12.86)$$

Ori, conform relației (12.65) avem:

$$q = \frac{V}{2^n} \qquad (12.87)$$

Înlocuind în relația (12.86) se obține

$$\varepsilon_j = |\Delta m(kT)| = \frac{V}{2^n} 2^j \qquad (12.88)$$

Această eroare nu depinde de ordinul k al eșantionului, ci numai de poziția cifrei eronate. Ea este cu atît mai mare, cu cît cifra eronată are o pondere mai mare. Probabilitatea ei este p.

Valoarea pătratică medie a acestei erori este

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^2 p = \frac{V^2 p}{2^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} 2^{2j} \qquad (12.89)$$

sau efectuînd suma progresiei geometrice:

$$\overline{\varepsilon^2} = pV^2 \frac{2^{2n} - 1}{3 \cdot 2^{2n}} \qquad (12.90)$$

sau ținînd seama de relația (12.65):

$$\overline{\varepsilon^2} = pV^2 \frac{N^2 - 1}{3N^2} \qquad (12.91)$$

Raportul semnal/perturbație după decodare este:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{\widetilde{m_q^2(t)}}{\overline{\varepsilon^2}} = \frac{\widetilde{m_q^2(t)}}{V^2} \frac{3N^2}{p(N^2 - 1)} \qquad (12.92)$$

Fiindcă $m_q(t) \cong m(t)$, introducînd factorul de vîrf al mesajului dat de relația (12.80) se obține:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{1}{C^2} \frac{3N^2}{p(N^2 - 1)} \tag{12.93}$$

Fiindcă în general $N^2 \gg 1$ avem:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{3}{pC^2} \tag{12.94}$$

adică *raportul semnal/perturbație este cu atît mai mare cu cît probabilitatea p a erorii este mai mică și factorul de vîrf C mai mic.*

Factor de vîrf C mic a fost o condiție de maxim și pentru raport semnal/zgomot de cuantizare. Deci, *printr-o compresiune a mesajului*, micșorîndu-se C *se îmbunătățesc ambele rapoarte semnal/perturbație* (date de erori cifrice și de erori de cuantizare).

Dacă zgomotul este gaussian cu dispersie σ, dacă cifrele binare se transmit prin impulsuri cu valoare de vîrf A (cifra 1) și prin absență de semnal (cifra 0) și dacă decizia se ia la nivelul $\frac{A}{2}$, atunci probabilitatea erorii este dată de probabilitatea ca zgomotul $\xi(t_i)$ să depășească nivelul $\frac{A}{2}$.

$$p = P\left\{\xi > \frac{A}{2}\right\} = P\left\{\frac{\xi}{\sigma} > \frac{A}{2\sigma}\right\} = 1 - P\left\{\frac{\xi}{\sigma} \leqslant \frac{A}{2\sigma}\right\} \tag{12.95}$$

Notăm $\zeta = \frac{\xi}{\sigma}$ și $\rho = \frac{A}{2\sigma}$ și avem:

$$p = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\rho} e^{\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = 1 - F(\rho) \tag{12.96}$$

Funcția $F(\rho)$ este dată în tabele.

12.3.1.4. Raportul semnal/perturbație total

Dat fiind că zgomotul de cuantizare și zgomotul dat de erorile numerice sînt procese aleatoare independente, puterea totală se obține adunînd puterile celor două tipuri de zgomote:

$$P_T = \frac{1}{12} q^2 + pV^2 \frac{N^2 - 1}{3N^2} \tag{12.97}$$

dar, fiindcă $q = \frac{V}{N}$ și $N^2 \gg 1$ avem:

$$P_T = V^2 \frac{1 + 4pN^2}{12N^2} \tag{12.98}$$

iar raportul semnal/zgomot total este:

$$\left(\frac{S}{P}\right)_T = \frac{1}{C^2} \frac{12N^2}{1 + 4pN^2} \tag{12.99}$$

12.3.1.5. Lărgimea de bandă a semnalului M.I.C.

Între două eșantioane, deci în intervalul de timp $T = \frac{1}{2W}$ trebuie să fie N impulsuri care reprezintă în binar valoarea ultimului eșantion. Deci viteza de semnalizare este:

$$r = \frac{N}{T} = 2WN \tag{12.100}$$

iar lărgimea de bandă necesară pentru a transmite cu această viteză este

$$B_c = 0{,}7r = 1{,}4WN \tag{12.101}$$

12.3.1.6. Tipuri de semnale utilizate în transmisiunile numerice

Simbolurile binare (1, 0) generate de sursă se transmit prin canal sub forma unor impulsuri care pot fi încadrate în următoarele tipuri (fig. 12.30).

● **Semnale N.R.Z.** Tipul cunoscut sub numele N.R.Z. (Nonreturn to zero) fără întoarcere la zero, se caracterizează prin nivel „0" pentru simbolul zero și nivelul „1" pentru simbolul unu, fără revenire la zero dacă avem o succesiune de simboluri „unu" (fig. 12.30, *a*).

Nivelul de decizie este 0,5. Dacă semnalul recepționat depășește nivelul 0,5, se decide că s-a transmis simbolul „1". În caz contrar, se decide că s-a transmis simbolul „0".

● **Semnale polare.** În loc de prezență sau absență de semnal, pentru simbolurile „1" și „0" se pot utiliza impulsuri de polarități diferite. În acest caz, nivelul de decizie este nivelul zero, iar semnalul se numește *„polar"* (fig. 12.30, *b*).

● **Semnale R.Z.** În unele cazuri este util ca simbolurile „1" să fie separate între ele. Acest lucru se face prin revenirea la zero după fiecare impuls „1" și în acest caz se spune că avem un semnal R.Z. (return to zero), fig. 12.30 *c*,

● **Semnale polar — R.Z.** În sistemele asincrone se uti-

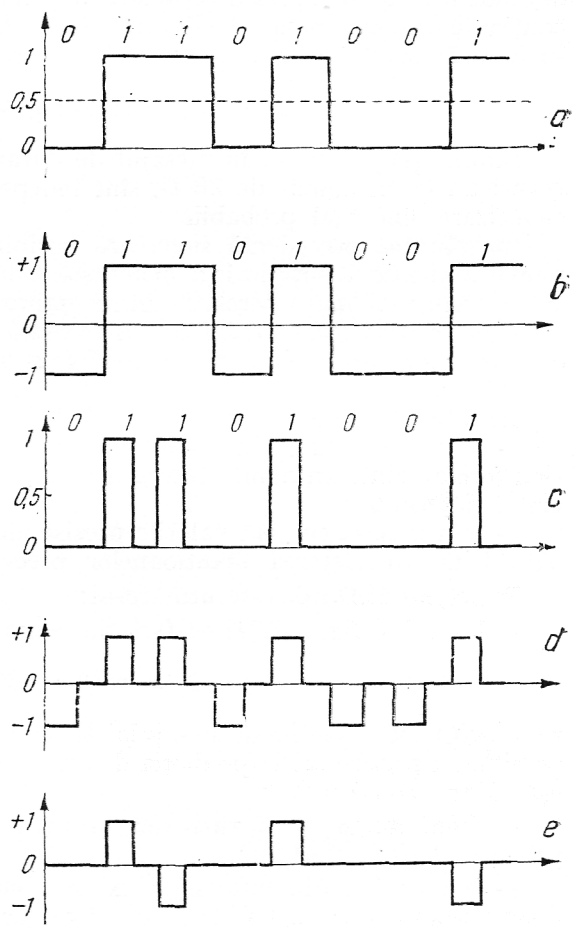


Fig. 12.30. Tipuri de semnale pentru transmisiuni numerice.

lizează semnalul numit Polar — *R.Z.*, la care simbolului „1" îi corespunde un impuls pozitiv cu întoarcerea la zero, iar simbolului „0" îi corespunde un impuls negativ cu întoarcere la zero. În acest caz, nivelul zero poate fi considerat ca al treilea simbol care face separarea între simbolurile „1" și „0", astfel încît nu mai este nevoie de sincronizare (fig. 12.30, *d*).

● **Semnale bipolare.** La semnalul numit *„bipolar"*, simbolului „0" îi corespunde nivelul zero, iar simbolurilor „1" le corespunde în mod alternativ un nivel pozitiv și apoi unul negativ, cu întoarcere la zero după fiecare impuls Această alternanță a impulsurilor impune o componentă medie nulă, independent de faptul că probabilitățile simbolurilor „0" și "1„ sînt sau nu egale (fig. 12.30, *e*).

12.3.2. Modulația diferențială a impulsurilor în cod (M.D.I.C.)

Între eșantioanele $m(kT)$ ale mesajului în general există o importantă dependență statistică. Datorită acestei dependențe, cantitatea de informație H conținută într-un mesaj de durată D, de frecvență maximă W, cuantizat în $N = 2^n$ nivele, este mult mai mică decît valoarea maximă:

$$H < H_M = 2WD \log N = 2WDn \qquad (12.102)$$

Informația conținută în mesajul de durată D are valoarea maximă cînd eșantioanele, în număr de $2WD$, sînt independente și cînd cele N nivele de cuantizare sînt egal probabile.

Inegalitatea precedentă sugerează posibilitatea unei transmisiuni cu un număr mai mic de biți decît n, și această reducere poate fi cu atît mai mare cu cît este mai mare corelația între eșantioanele mesajului.

Prin reducerea numărului de biți transmiși între două eșantioane se obține o reducere a benzii de frecvență ocupată de semnal, adică se obține *o compresie de spectru.*

Înainte de a expune principiul M.D.I.C. introducem următoarele notații:

— se vor nota cu „prim" toate mărimile cuantizate reprezentînd un eșantion format dintr-un număr întreg de cuante sau numărul binar (de cuante) care-l determină;

— se vor nota cu „$\widehat{m}$" valorile prezise ale unui eșantion, prezicerea fiind bazată pe cunoașterea eșantioanelor precedente.

Principiul M.D.I.C. este următorul:

— la emisie fig. (12.31) se face diferența:

$$\Delta_r = m(t_r) - \widehat{m}(t_r) \qquad (12.103)$$

unde $m(t_r)$ este eșantionul mesajului la momentul t_r, iar $\widehat{m}(t_r)$ este valoarea prezisă. În particular, la predicția de ordin zero, Δ este diferența între două eșantioane consecutive;

— diferența Δ_r se cuantizează și valoarea cuantizată Δ'_r se transmite prin canal (fig. 12.31, *b*);

— la recepție, din diferențele Δ'_r se reconstituie eșantionul $m'(t_r)$, care aplicat unui convertor (N/A) dă o valoare ce aproximează pe $m(t_r)$.

Sistemul prezintă **avantaj** *numai în cazul cînd valoarea de vîrf a diferențelor Δ_r este mai mică decît valoarea de vîrf a mesajului $m(t)$. În caz contrar,*

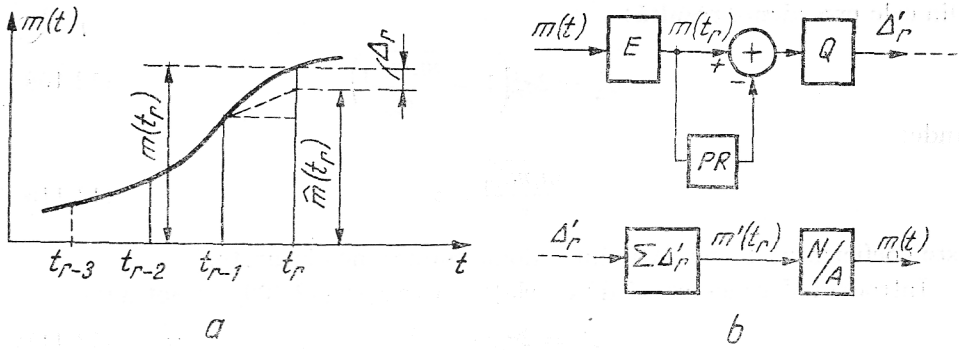


Fig. 12.31. Modulația diferențială a impulsurilor în cod.

diferența Δ *trebuie cuantizată cu un număr mai mare de nivele decît mesajul eșantionat* $m(t_r)$. Pentru a ilustra acest lucru să presupunem că eșantioanele sînt independente cu o valoare de vîrf $+\frac{V_v}{2}$, respectiv $-\frac{V_v}{2}$ (presupunînd că valorile pozitive au aceeași valoare de vîrf ca și cele negative). În sistemul M.I.C. se cuantizează nivelul $\frac{V_v}{2}$ în $N = 2^n$ nivele, respectiv în n biți și se adaugă un bit de semn. Fiindcă eșantioanele sînt independente, se poate întîmpla ca un eșantion să aibă valoarea $+\frac{V_v}{2}$, iar următorul $-\frac{V_v}{2}$. În acest caz, $\Delta = V_v$ și numărul de nivele de cuantizare pentru același zgomot de cuantizare este $2N = 2^{n'}$, la care se adaugă un bit de semn. Evident că $n' > n$, deci M.D.I.C. nu este avantajoasă în acest caz.

Pentru a calcula valoarea de vîrf Δ_v a diferenței Δ și valoarea de vîrf $\frac{V_v}{2}$ a mesajului, trebuie să calculăm dispersiile σ_Δ și σ_m fiindcă:

$$\Delta_v = 4\sigma_\Delta \quad \text{și} \quad \frac{V_v}{2} = 4\sigma_m$$

Pentru a evalua dispersiile, considerăm o predicție de ordinul zero:

$$\hat{m}(t_r) = m(t_{r-1}) \tag{12.104}$$

În acest caz:

$$\Delta_r = m(t_r) - m(t_{r-1}) = m_r - m_{r-1} \tag{12.105}$$

Presupunem că mesajul $m(t)$ are valoare medie nulă, deci și diferența Δ_r are valoare medie nulă. În aceste condiții:

$$\overline{\Delta_r^2} = \overline{(m_r - m_{r-1})^2} = \overline{m_r^2} + \overline{m_{r-1}^2} + \overline{2m_r m_{r-1}} \tag{12.106}$$

reprezintă dispersia diferenței.

Mesajul fiind un proces staționar, avem:

$$\sigma_m^2 = \overline{m_r^2} = \overline{m_{r-1}^2} \quad \text{pentru} \quad \forall r \tag{12.107}$$

Pentru aceleași motive:

$$\sigma_\Delta^2 = \overline{\Delta_r^2} \quad \text{pentru} \quad \forall r \tag{12.108}$$

Din cele precedente rezultă:

$$\sigma_\Delta^2 = 2\sigma_m^2\left(1 - \frac{\overline{m_r m_{r-1}}}{\sigma_m^2}\right) \tag{12.109}$$

unde:

$$\frac{\overline{m_r m_{r-1}}}{\sigma_m^2} = \rho \tag{12.110}$$

este coeficientul de corelație între două eșantioane alăturate.

Introducînd coeficientul de corelație în relația (12.109) se obține:

$$\sigma_\Delta^2 = 2\sigma_m^2(1 - \rho) \tag{12.111}$$

Dacă:

$$\rho > 0{,}5; \qquad \sigma_\Delta^2 < \sigma_m^2$$

$$\rho = 0{,}5; \qquad \sigma_\Delta^2 = \sigma_m^2$$

$$\rho < 0{,}5; \qquad \sigma_\Delta^2 > \sigma_m^2$$

Din cele precedente rezultă că *M.D.I.C. este mai avantajoasă decît M.I.C. numai dacă* $\rho > 0{,}5$.

Presupunînd că $\rho > 0{,}5$, să considerăm cazul predicției liniare, de ordin zero în care $\hat{m}_r = m_{r-1}$, adică valoarea prezisă este obținută prin memorarea eșantionului precedent.

În acest caz, la apariția mesajului primul eșantion m_0 este considerat ca o diferență:

$$\Delta_0 = m_0 \tag{12.112}$$

care cuantizată Δ_0', se transmite prin canal și se memorează la recepție:

$$\Delta_0' = m_0 + \varepsilon_0 \tag{12.113}$$

unde ε_0 este eroarea de cuantizare.

La al doilea eșantion se face diferența:

$$\Delta_1 = m_1 - m_0 \tag{12.114}$$

și se transmite valoarea cuantizată:

$$\Delta_1' = \Delta_1 + \varepsilon_1 \tag{12.115}$$

La recepție, din această diferență Δ_1' și din eșantionul precedent m_0' (memorat) se formează:

$$m_1' = m_0' + \Delta_1' = m_0 + \varepsilon_0 + \Delta_1 + \varepsilon_1 \tag{12.116}$$

respectiv:

$$m_1' = m_1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \tag{12.117}$$

În același mod obținem:

$$\Delta_2 = m_2 - m_1 \tag{12.118}$$

$$\Delta_2' = \Delta_2 + \varepsilon_2 \tag{12.119}$$

$$m_2' = m_1' + \Delta_2' = m_1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \Delta_2 + \varepsilon_2 \tag{12.120}$$

respectiv:

$$m_2' = m_2 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{12.121}$$

și pe măsură ce procesul continuă, erorile de cuantizare se însumează algebric.

Pentru a evita acest fenomen, cunoscut sub numele de **propagare a erorilor**, *valoarea prezisă nu se obține din memorarea eșantionului precedent, ci se formează din diferențele* Δ_2', *transmise prin canal.*

Acest lucru poate fi realizat așa cum se arată în fig. 12.32 și fig. 12.33, care ilustrează un mod de implementare a M.D.I.C. la emisie, și la recepție.

Din analiza acestor scheme rezultă că nu mai avem fenomenul de propagare a erorilor.

● *Operațiile efectuate la emisie* sînt următoarele:

— Mesajul $m(t)$ este eșantionat în E, obținîndu-se $m(t_r)$, din care se scade valoarea prezisă $\hat{m}(t_r)$.

— Valoarea prezisă și cuantizată $\hat{m}(t_r)$, în cazul predicției liniare, este:

$$\hat{m}'(t_r) = \sum_{i=1}^{k} a_i m'(t_{r-i}) \tag{12.122}$$

unde coeficienții a_i sînt astfel aleși încît eroarea de predicție

$$\Delta_r = m(t_r) - \hat{m}'(t_r)$$

să fie cît mai mică.

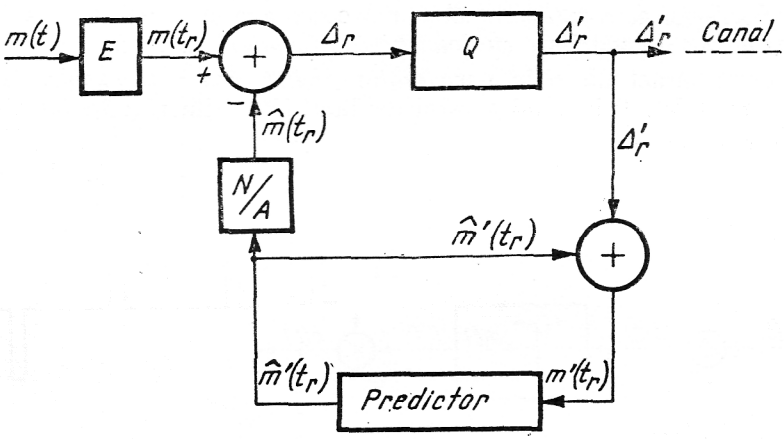


Fig. 12.32. M.D.I.C. — Emisie.

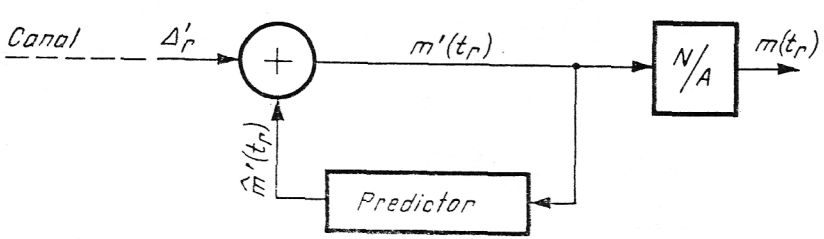


Fig. 12.33. M.D.I.C. — Recepție.

În cazul predicției de ordin zero, suma de mai sus conține un singur termen, iar predictorul este un dispozitiv care realizează o întîrziere $T = t_r - t_{r-1}$, semnalul la ieșirea lui fiind:

$$\hat{m}'(t_r) = m'(t_{r-1})$$

— Eșantionul prezis, cuantizat, respectiv $\hat{m}'(t_r)$, este introdus în convertorul numeric-analogic (N/A), la ieșirea căruia se obține valoarea $\hat{m}(t_r)$ care se scade din $m(t_r)$ și se obține diferența Δ_r.

— Diferența Δ_r este cuantizată (uniform sau neuniform) și se obține semnalul cuantizat Δ_r', respectiv numărul binar corespunzător care sub formă de impulsuri, se transmite prin canal.

● *Operațiile efectuate la recepție* sînt următoarele:

— Din diferențele Δ_r', în mod identic cu cel de la emisie, se obține valoarea prezisă $\hat{m}'(t_r)$.

— Însumarea $\Delta_r' + \hat{m}'(t_r) = m'(t_r)$ dă eșantionul cuantizat care este aplicat unui convertor (N/A) pentru a obține pe $m(t_r)$ cu o anumită aproximație. În afara proprietăților amintite, *M.D.I.C, are proprietatea de a înlătura nestaționarităţile existente în semnal.*

12.3.3. Modulația delta (M.D.)

Utilizarea corelației dintre eșantioanele mesajului în scopul micșorării numărului nivelelor de cuantizare la M.D.I.C, sugerează posibilitatea ca *prin mărirea frecvenței de eșantionare* să se mărească această corelație, astfel încît *să se poată face o cuantizare cu două nivele, respectiv cu 1 bit.*

Din acest punct de vedere *modulația „delta" poate fi considerată ca o M.D.I.C. cu 1 bit.* Principiul acestei modulații este ilustrat în fig. 12.34 în variantă analogică.

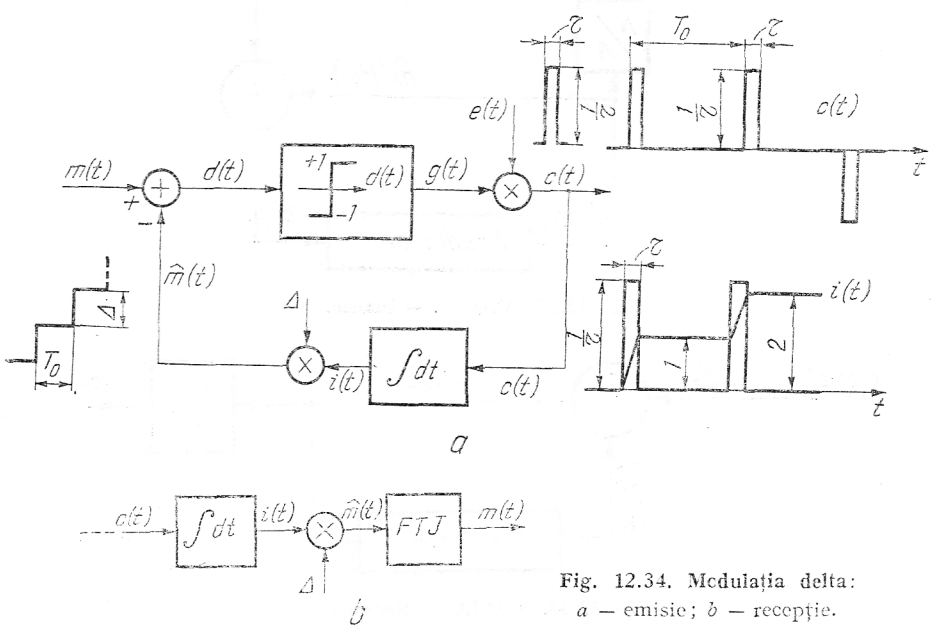


Fig. 12.34. Modulația delta: *a* — emisie; *b* — recepție.

Principiul modulației delta este următorul:

— Se face diferența:

$$d(t) = m(t) - \hat{m}(t) \tag{12.123}$$

unde $m(t)$ este mesajul, iar $\hat{m}(t)$ este valoarea aproximată în trepte obținută după cum se va vedea.

— Diferența $d(t)$ se cuantizează cu 1 bit, obținîndu-se:

$$g(t) = \operatorname{sgn}[d(t)] \tag{12.124}$$

— Semnalul $g(t)$ care ia numai valorile ± 1 se eșantionează cu funcția rectangulară periodică unipolară $e(t)$, formată din impulsuri de durată τ și amplitudine $\frac{1}{\tau}$, care au o frecvență de repetiție:

$$f_0 > 2W \tag{12.125}$$

Semnalul rezultant care se transmite în canal este

$$c(t) = \operatorname{sgn}[d(t)]\, e(t) \tag{12.126}$$

— Din semnalul $c(t)$, prin integrare, se obține un semnal în trepte, care dacă τ este mic poate fi asimilat cu o sumă de funcții treaptă unitate:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sgn}[d(t)]\, u(t - kT_0) \tag{12.127}$$

unde $T_0 = \frac{1}{f_0}$

— Semnalul $i(t)$ este multiplicat cu Δ, mărimea pasului, și se obține:

$$\hat{m}(t) = \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sgn}[d(t)]\, u(t - kT_0) \tag{12.128}$$

— La recepție prin integrare și multiplicare cu Δ se obține semnalul în trepte $\hat{m}(t)$ care aproximează pe $m(t)$, iar la ieșirea din filtrul trece-jos se obține o aproximație și mai bună a lui $m(t)$.

Modulația delta descrisă este cunoscută sub numele de *modulație delta liniară* (M.D.L.) din cauză că Δ în relația (12.128) este o mărime constantă.

Pentru a studia zgomotul intrinsec al sistemului, vom considera două semnale particulare: *semnalul în rampă* (fig. 12.35) și *semnalul constant* (fig. 12.36).

După cum se vede în fig. 12.35, *a* semnalul $m(t)$ urmărește mesajul $\hat{m}(t)$ dar dacă panta lui $m(t)$ este prea mare, urmărirea nu mai are loc (fig. 12.35, *b*) și spunem că avem *zgomot de neurmărire*.

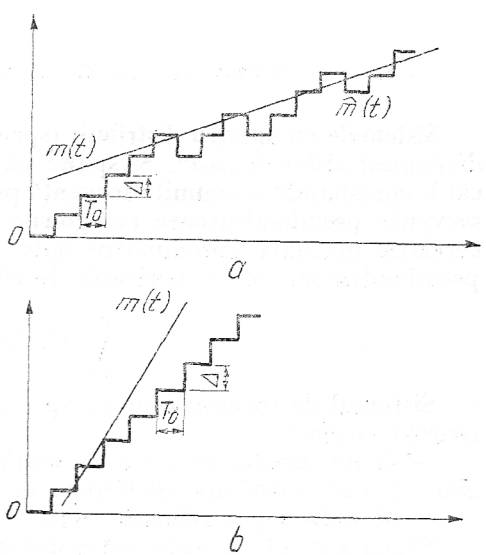


Fig. 12.35. Semnal în rampă:
a — $m(t)$ este urmărit; *b* — $m(t)$ nu poate fi urmărit

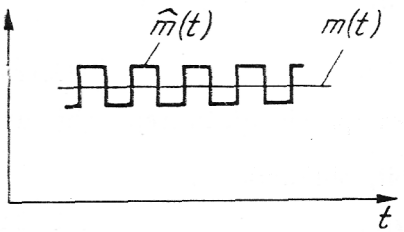


Fig. 12.36. Semnal constant.

Pentru a nu avea erori de neurmărire trebuie ca:

$$\left|\frac{\Delta}{T_0}\right| < \left|\frac{dm(t)}{dt}\right| \qquad (12.129)$$

respectiv

$$f_0\Delta < \left|\frac{dm(t)}{dt}\right| \qquad (12.130)$$

deci *zgomotul de neurmărire poate fi micșorat fie prin mărirea lui* Δ, *fie prin mărirea lui* f_0.

Dacă semnalul este constant (fig. 12.36), el este aproximat prin semnale rectangulare, fapt care dă naștere unui zgomot numit *zgomot granular. Zgomotul granular este cu atît mai mare cu cît* Δ *este mai mare.* Micșorarea lui Δ mărește însă zgomotul de neurmărire. Pentru a ieși din această situație contradictorie se utilizează *sistemul de modulație delta adapiv.*

● **Modulația delta adaptivă M.DA.**

Ideea de bază a **sistemului M.D.A.** *este de a utiliza valori mari pentru* Δ cînd mesajul $m(t)$ are o pantă mare și valori mici, cînd panta este mică. Secvența de impulsuri $c(t)$ conține informația privind tipul de zgomot prezent în semnalul reconstituit: dacă impulsurile sînt formate din șiruri lungi de polarități alternative $+ - + - + -$, probabilitatea de a avea zgomot de granulație, este mare; dacă impulsurile sînt însă formate din șiruri de același semn, probabilitatea de a avea zgomot de neurmărire este mare.

Un dispozitiv de circuite logice (fig. 12.37) sesizează aceste stări și în primul caz micșorează pe Δ, iar în al doilea caz îl urmărește.

Un dispozitiv identic variază în mod corespunzător mărimea pasului Δ *la recepție.*

12.3.4. Transmisiuni cu spectru distribuit (T.S.D.)

Sistemele cu spectru distribuit (spread spectrum) sînt *sisteme multiplex cu diviziunea căilor în „cod".* Se spune că avem diviziune în cod fiindcă fiecărei căi îi corespunde o anumită secvență pseudo-aleatoare (cod) dintr-o familie de secvențe pseudo-aleatoare ortogonale. Secvențele ortogonale au funcții de corelație mutuală aproximativ nule. Dacă $c(t)$ și $c'(t)$ sînt două secvențe pseudo-aleatoare cu o perioadă de repetiție T avem:

$$\int_0^T c(t)\, c'(t)\, dt = 0 \qquad (12.131)$$

Sistemul de transmisiune cu spectru distribuit trebuie să realizeze următoarele sarcini:

— să fie capabil *să separe semnalul unei anumite căi, de toate semnalele altor căi care ocupă aceeași lărgime de bandă, în același timp;*

— *să reducă perturbațiile provenite din canal.*

Prima sarcină se realizează utilizînd ca semnal „purtător" o secvență $c(t)$, dintr-o familie de secvențe de corelație mutuală nulă. La recepție se face corelația mutuală cu aceeași purtătoare $c(t)$ și ca urmare la ieșirea din corelator se obține numai mesajul cu care a fost modulat $c(t)$.

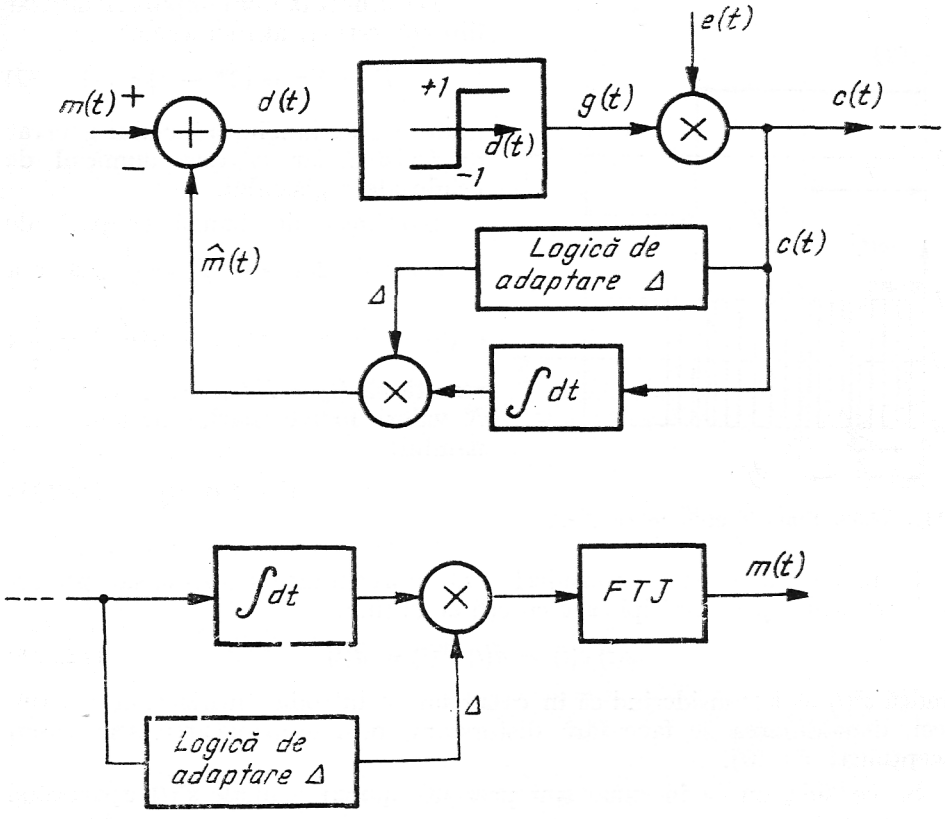


Fig. 12.37. Modulația delta adaptivă.

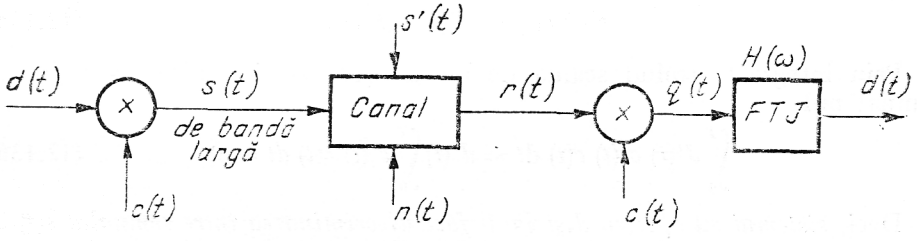


Fig. 12.38. Sistem de transmisiune cu spectru distribuit.

A doua sarcină se realizează dacă la recepție se face o operație de împrăștiere a spectrului perturbației într-o bandă foarte mare de frecvențe, din care numai o mică parte pătrunde prin filtrul trece-jos de la ieșire. Acest lucru se realizează dacă purtătoarea $c(t)$ are un spectru foarte larg.

Principiul transmisiunii cu spectru distribuit este ilustrat în fig. 12.38.

Secvența de date $d(t)$ formată din impulsuri bipolare de durată T, (fig. 12.39, *a*) este multiplicată cu o secvență pseudo-aleatoare $c(t)$ (fig. 12.39, *b*) generată cu ajutorul unui registru de deplasare cu reacție de perioadă maximă.

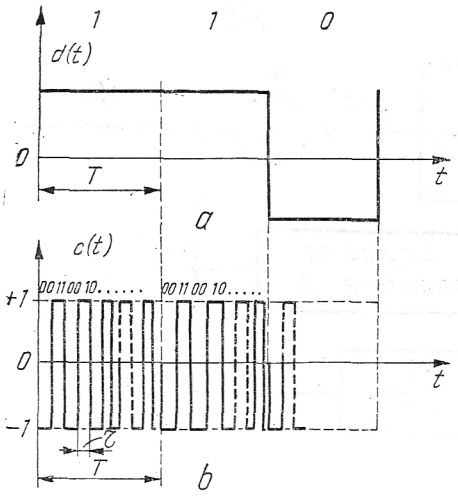


Fig. 12.39. Semnale utilizate cu T.S.D.

Dacă durata unui impuls elementar din $c(t)$ este τ, atunci avem:

$$T = N\tau = (2^m - 1)\,\tau \quad (12.132)$$

unde N este lungimea ciclului generat de registru, iar m este numărul de celule ale registrului.

Lărgimea de bandă ocupată de secvența de date este $B_d = \frac{1}{T}$, iar cea ocupată de secvența $c(t)$ este $B_c = \frac{1}{\tau}$; rezultă că $B_c = NB_d$. Alegînd pentru N valori foarte mari, spectrul semnalului:

$$s(t) = d(t)\,c(t) \quad (12.133)$$

va fi foarte mare, respectiv B_c.

La punctul de recepție, considerînd că nu avem alte semnale, sau perturbații prezente, prin multiplicare cu $c(t)$ se obține:

$$s(t)\,c(t) = d(t)\,c^2(t) = d(t) \quad (12.134)$$

fiindcă $c^2(t) = 1$ (considerînd că în canal nu se introduc întîrzieri aleatoare). Deci, demodularea se face fără distorsiuni, prin multiplicarea semnalului recepționat cu $c(t)$.

Să considerăm că în canal sînt prezente numai semnale $s'(t)$ aparținînd altor canale.

În acest caz, considerînd că toate semnalele din sistem sînt sincrone, la recepție se obține:

$$s'(t)\,c(t) = d'(t)\,c'(t)\,c(t) \quad (12.135)$$

Prin integrare, ținînd seama de relația (12.131) se obține la ieșire un semnal nul

$$\int_0^T d'(t)\,c'(t)\,c(t)\,\mathrm{d}t = d'(t)\int_0^T c'(t)\,c(t)\,dt = 0 \quad (12.136)$$

Deci, *sistemul cu spectru distribuit face discriminarea între semnalul $s(t)$ al propriei căi și semnalele $s'(t)$ aparținînd altor căi.* Operația de integrare este făcută, aproximativ, de filtrul $H(\omega)$.

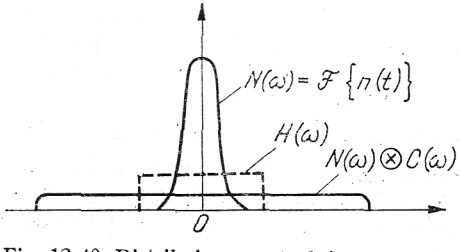


Fig. 12.40. Distribuirea spectrului perturbației.

Să considerăm acum că sînt prezentate numai zgomotele $n(t)$. Prin multiplicarea cu $c(t)$ se obține o lărgime a spectrului perturbației (fig. 12.40), puterea rămînînd aceeași:

$$\frac{1}{T}\int_0^T [n(t)\,c(t)]^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T n^2(t)\,\mathrm{d}t \quad (12.137)$$

fiindcă $c^2(t) = 1$.

Spectrul produsului $n(t)\,c(t)$ este:

$$\mathfrak{F}\{n(t)\,c(t)\} = N(\omega) \otimes C(\omega) \tag{12.138}$$

unde $N(\omega)$ este spectrul zgomotului și $C(\omega)$ este spectrul secvenței $c(t)$.

Se vede că cu cît împrăștierea spectrului $N(\omega)$ este mai mare, cu atît puterea perturbațiilor la ieșirea din filtrul trece-jos, $H(\omega)$, este mai mică, fiindcă spectrul perturbației la ieșire este limitat la banda de trecere B_d a filtrului $H(\omega)$. Spectrul perturbației la ieșire este:

$$N_e(\omega) = [N(\omega) \otimes C(\omega)]\,H(\omega) \tag{12.139}$$

Să presupunem că semnalul perturbator este un semnal sinusoidal:

$$n(t) = A\cos\omega_1 t \tag{12.140}$$

deci:

$$N(\omega) = \pi A[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] \tag{12.141}$$

După multiplicare cu $c(t)$ se obține:

$$N(\omega) \otimes C(\omega) = \pi A \int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)[\delta(\omega - \omega_1 - \lambda) + \delta(\omega + \omega_1 - \lambda)]\,d\lambda \tag{12.142}$$

$$N(\omega) \otimes C(\omega) = \pi A[C(\omega - \omega_1) + C(\omega + \omega_1)] \tag{12.143}$$

de unde se vede că distribuția (împrăștierea) spectrului perturbației este extrem de mare și, ca urmare, la ieșirea din filtrul $H(\omega)$ se obține o perturbație neglijabilă.

Cele precedente arată că *sistemele cu spectru distribuit sînt foarte eficiente în reducerea interferențelor și a bruiajelor, în general a tuturor perturbațiilor care au un spectru concentrat într-un domeniu îngust de frecvențe.*

12.3.5. Metode de sincronizare

Sistemele de transmisiuni numerice se împart în două grupe: **sisteme sincrone,** în care *datele sînt transmise în mod continuu,* și **sistemele asincrone** în care *datele sînt transmise în orice interval de timp.* Eficiența transmisiunii sincrone este mult mai mare decît a acelei asincrone. Complexitatea sistemelor sincrone este însă mult mai mare decît a celor asincrone.

Impulsurile, care reprezintă datele care trebuie transmise sînt conrupte de zgomote, iar la recepție sînt refăcute prin eșantionare.

Este important ca *eșantionarea la recepție să fie sincronă cu cea de la emisie.* Această sincronizare se numește **sincronizare de bit.**

Dacă această sincronizare nu este corectă, respectiv eșantionarea se face mai rapid sau mai lent decît la emisie, are loc așa-numita *„pierdere a integrității biților"* care înseamnă adăugarea sau pierderea de biți față de secvența emisă. Acest fenomen produce distorsiuni foarte mari ale mesajului transmis.

În aproape toate aplicațiile secvența de date (de biți) este organizată în cuvinte, sau blocuri de cuvinte numite *grupe* sau *cadre.* Fiindcă cuvintele, respectiv grupele, au o anumită semnificație, este important ca receptorul să le recunoască.

În mod ideal, receptorul ar putea recunoaște diferitele grupuri dacă cunoaște lungimea lor, prin simpla procedură de numărare. Această metodă este însă foarte vulnerabilă, erorile comise se propagă și practic nu poate fi utilizată. Din această cauză, *la începutul fiecărui grup* (cadru) *se transmit unul sau mai mulți biți* care permit să se recunoască începutul unui nou grup. În acest caz spunem că avem de-a face cu **sincronizarea de grup** (sincronizare de cadru).

12.3.5.1. Sincronizarea de bit

Secvența de date $d(t)$ fiind un semnal aleator are o densitate spectrală de putere continuă, care nu conține componente discrete (relația 7.344). În consecință, *prin prelucrări trebuie să formăm o componentă discretă pe frecvența* $f_s = \frac{1}{T}$.

Pentru aceasta observăm că dacă la fiecare interval T ar avea loc o tranziție, semnalul ar deveni determinist și periodic cu o frecvență fundamentală $f_s = \frac{1}{T}$. Fiindcă acest lucru nu poate fi făcut, vom căuta să prelucrăm semnalul astfel încît să crească numărul tranzițiilor. Cu cît acesta este mai mare, cu atît componenta de frecvență $f_s = \frac{1}{T}$ este mai mare și poate fi extrasă cu un filtru.

În fig. 12.41 este arătată schema bloc a unei metode de obținere a frecvenței de tact f_s pe baza principiului enunțat. În fig. 12.42 sînt arătate semnalele în succesiunea în care se fac operațiile de prelucrare. Secvența $d(t)$ este înmulțită cu secvența $d\left(t - \frac{T}{2}\right)$, întîrziată cu $\frac{T}{2}$. Rezultatul înmulțirii este secvența $e(t) = d(t)\, d\left(t - \frac{T}{2}\right)$, care are un număr dublu de treceri prin zero față de secvența $d(t)$. La rîndul ei, secvența $e(t)$ se poate descompune în două secvențe $e(t) = g(t) + h(t)$, astfel încît secvența $g(t)$ să fie periodică cu perioada T (secvența $h(t)$ fiind aleatoare). Un filtru de bandă cu frecvența centrală $f_c = f_s$ extrage componenta fundamentală de frecvență f_0, iar limitatorul care îl urmează formează, din semnalul sinusoidal, un semnal rectangular $v(t)$ sincron cu semnalul $d(t)$.

Este de remarcat că *pentru a extrage o componentă de frecvență* $f_0 = \frac{1}{T}$, *în toate metodele de sincronizare este utilizat un element neliniar*. În metoda prezentată elementul neliniar este multiplicatorul.

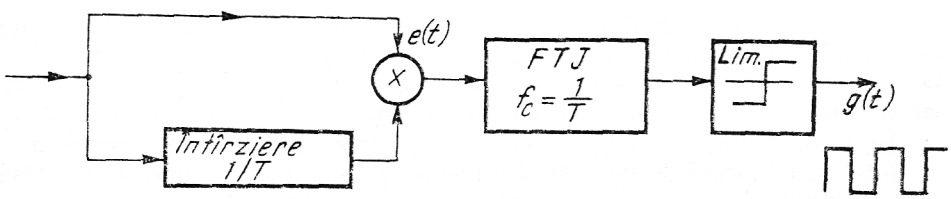


Fig. 12.41. Circuit de sincronizare prin întîrziere și multiplicare.

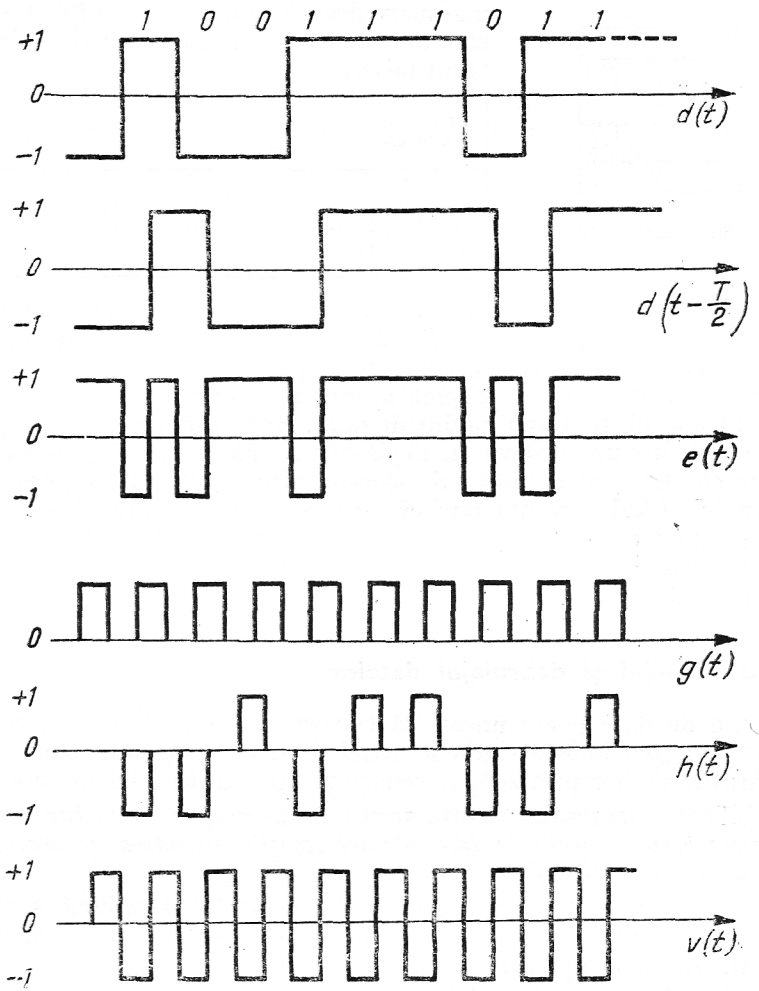


Fig. 12.42. Diagrama semnalelor circuitului de sincronizare.

12.3.5.2. Sincronizare de grup

Pentru **sincronizarea de grup** *se poate însera în secvența de date un cuvînt destinat sincronizării, care să poată fi cu ușurință recunoscut de receptor.* Un astfel de cuvînt poate să fie format dintr-o *secvență Barker sau Neuman-Hofman* care are proprietatea că funcția de autocorelație în origine este mult mai mare decît pentru orice decalaj k între simboluri.

Funcția de autocorelație, în conformitate cu § 7.20.2 este proporțională cu:

$$C_k = \sum_{i=1}^{N=k} x_i x_{i+k} \qquad (12.144)$$

unde N este lungimea cuvîntului de sincronizare, iar simbolurile datelor adiacente cuvîntului nu sînt luate în considerare. În aceste condiții C_0 este mult

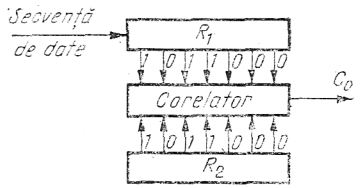


Fig. 12.43. Sincronizare de grup.

mai mare decît $\forall C_k$ pt. $k \neq 0$. Cîteva secvențe care au această proprietate sînt date în următorul tabel:

Cuvînt de sincronizare	N	C_k									
		$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0001101	7	7	0	−1	−0	−1	0	−1			
00001110 1	9	9	2	1	−2	−1	−2	−1	0	−1	
00001101 01	10	10	−1	2	−1	−2	1	0	−1	0	−1

Din cauză că în realitate datele adiacente intervin în evaluarea funcției de corelație, datele din tabel pot să fie altele, însă cu o probabilitate mare valoarea în origine, respectiv C_0, nu este depășită.

În fig. 12.43 este arătat schematic modul în care se determină poziția, respectiv începutul unui nou cuvînt de date. Secvența de date recepționată este introdusă într-un registru cu deplasare R_1 cu N celule și se calculează funcția de corelație cu cuvîntul de sincronizare (secvență Barker) conținut în registrul R_2. Cînd secvența Barker care formează cuvîntul de sincronizare al secvenței de date se află în registrul R_1, coeficientul C_0 are valoarea maximă, și la ieșirea din corelator apare un „1", indicație că începe un nou grup de simboluri.

12.3.5.3. Bruiajul și debruiajul datelor

Secvența de date poate uneori să consiste dintr-un număr mare de simboluri „1" sau „0", îndepărtîndu-se astfel de o secvență aleatoare. În acest caz numărul trecerilor prin zero se reduce și apar dificultăți de sincronizare

Restabilirea caracterului aleator se realizează prin *metoda adunării modulo doi la emisie peste secvența de date, a unei secvențe pseudo-aleatoare.* Această operație se numește **bruiaj.**

Pentru a nu modifica secvența de date, *la recepție se adună modulo doi, cu secvența recepționată, o secvență pseudo-aleatoare identică cu cea de la emisie* (fig. 12.44). Această operație se numește **debruiaj.**

Bruiorul de la emisie și cu debruiorul de la recepție trebuie să fie în sincronism. Secvența pseudo-aleatoare cu care se face bruiajul se obține cu ajutorul unui registru de deplasare cu reacție de perioadă maximă (generată de un polinom primitiv) în care sînt introduse suplimentar circuite logice care să înlăture stările registrului formate din șiruri lungi de simboluri „1" sau „0„.

După cum se va vedea în cap. 13, operația de bruiaj a datelor înlătură posibilitatea apariției unor componente spectrale de mare energie, care ar putea produce distorsiuni și diafonii.

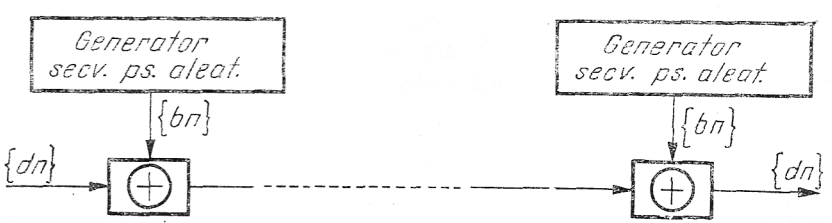


Fig. 12.44. Bruiaj-debruiaj.

CAPITOLUL 13

TRANSMISIUNI CU SEMNAL PURTĂTOR SINUSOIDAL

Transmisiunile cu semnal purtător sinusoidal sînt realizate prin *modularea unui semnal sinusoidal* (purtătoare) *cu mesajul* $m(t)$. Semnalul rezultant este în general un semnal de bandă îngustă.

Modulația efectuată poate să fie *liniară* cînd semnalul modulat depinde liniar de mesajul $m(t)$ sau poate să fie *neliniară*. Recepția semnalelor modulate poate să fie *coerentă* (cînd frecvența și faza purtătoarei sînt cunoscute la recepție) sau *necoerentă* (cînd faza nu este cunoscută).

13.1. Modulația liniară

Modulația liniară este o modulație în amplitudine. În legătură cu modulația semnalelor în amplitudine, se va defini un operator care dă relația de transformare din spațiul mesajului în spațiul semnalului. Operatorul poate fi definit în domeniul timp sau în domeniul frecvență.

13.1.1. Definirea unui operator de modulație în domeniul timp

Expunerea problemelor legate de modulația liniară poate fi sistematizată prin introducerea unui operator $\mathcal{T}_1$, care dă corespondența între mulțimea mesajelor la intrarea în modulator, $m(t)$ și mulțimea semnalelor la ieșirea din modulator $s(t)$.

În domeniul timp, operatorul $\mathcal{T}_1$ este definit de relația:

$$\mathcal{T}_1\{m(t)\} = m(t)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \tag{13.1}$$

13.1.2. Definirea unui operator de modulație în domeniul frecvență

În mod analog se poate defini un operator $\mathcal{R}_1$ care dă corespondența între spectrul mesajului $M(\omega)$ și spectrul $S(\omega)$ al semnalului

$$\mathcal{R}_1\{M(\omega)\} = S(\omega) \tag{13.2}$$

Pentru a vedea ce transformări efectuează operatorul $\mathcal{R}_1$ se va calcula transformata Fourier a purtătoarei $\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$.

Se notează $C(\omega)$ densitatea spectrală a purtătoarei:

$$C(\omega) = \mathcal{F}\{\cos(\omega_1 t + \varphi_1)\} = \pi[e^{j\varphi_1}\delta(\omega - \omega_1) + e^{-j\varphi_1}\delta(\omega + \omega_1)] \tag{13.3}$$

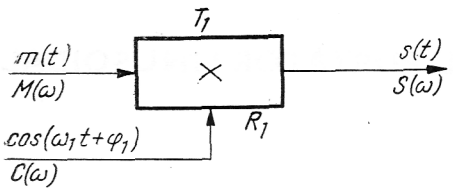


Fig. 13.1. Realizarea operației $\mathcal{T}_1\{m(t)\}$.

În baza teoremei convoluției rezultă:

$$S(\omega)=\mathfrak{F}\{s(t)\}=\mathfrak{F}\{m(t)\cos(\omega_1 t+\varphi_1)\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} M(\lambda)\,C(\omega-\lambda)\,d\lambda$$

și înlocuind expresia din relația (13.3) în această relație se obține:

$$S(\omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} M(\lambda)\,[e^{j\varphi_1}\delta(\omega-\omega_1-\lambda)+e^{-j\varphi_1}\delta(\omega+\omega_1-\lambda)]\,d\lambda$$

și

$$S(\omega)=\frac{1}{2}e^{j\varphi_1}M(\omega-\omega_1)+\frac{1}{2}e^{-j\varphi_1}M(\omega+\omega_1) \tag{13.4}$$

Deci se obține:

$$\mathcal{R}_1\{M(\omega)\}=\frac{1}{2}e^{j\varphi_1}M(\omega-\omega_1)+\frac{1}{2}e^{-j\varphi_1}M(\omega+\omega_1) \tag{13.5}$$

Din relația (13.5) rezultă că transformarea $\mathcal{R}_1$ are ca urmare o translație a densității spectrale $M(\omega)$, cu ω_1 spre dreapta axei frecvențelor, o rotire a fazei cu $+\varphi_1$ și o multiplicare cu $\frac{1}{2}$, și o translație a densității spectrale $M(\omega)$, cu ω_1 spre stînga axei frecvențelor, o rotire a fazei cu $-\varphi_1$ și o multiplicare cu $\frac{1}{2}$.

Transformarea $\mathcal{R}_1$ dă semnificația spectrală a transformării $\mathcal{T}_1\{\ \}$ din domeniul timp.

Operația de modulare reprezentată prin operatorul $\mathcal{T}_1$ poate fi realizată într-un multiplicator cu două intrări (fig. 13.1).

La o intrare se aplică mesajul $m(t)$ și la cealaltă intrare se aplică purtătoarea $\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$, iar la ieșire se obține semnalul modulat $s(t)$. Pentru a putea recupera mesajul fără distorsiuni va trebui ca $\omega_1 \geq 2\Omega_M$, Ω_M fiind cea mai mare frecvență din spectrul mesajului.

De la caz la caz se va utiliza reprezentarea semnalului în domeniul timp sau în domeniul frecvență. *Reprezentarea în domeniul frecvență*, respectiv utilizarea operatorului $\mathcal{R}_1$, *este utilă în cazurile cînd semnalul suferă o serie de operații liniare de filtrare.*

În figura 13.2 este reprezentată transformarea $\mathcal{R}_1\{M(\omega)\}$.

Cu $M_+(\omega)$ s-a notat valoarea funcției $M(\omega)$ pentru $\omega>0$ și cu $M_-(\omega)$ valoarea pentru $\omega<0$, adică:

$$\left.\begin{aligned} M_+(\omega)&=M(\omega) && \text{pentru } \omega>0\\ M_+(\omega)&=0 && \text{pentru } \omega<0\\ M_-(\omega)&=0 && \text{pentru } \omega>0\\ M_-(\omega)&=M(\omega) && \text{pentru } \omega<0 \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

Deci:

$$M(\omega)=M_+(\omega)+M_-(\omega) \tag{13.7}$$

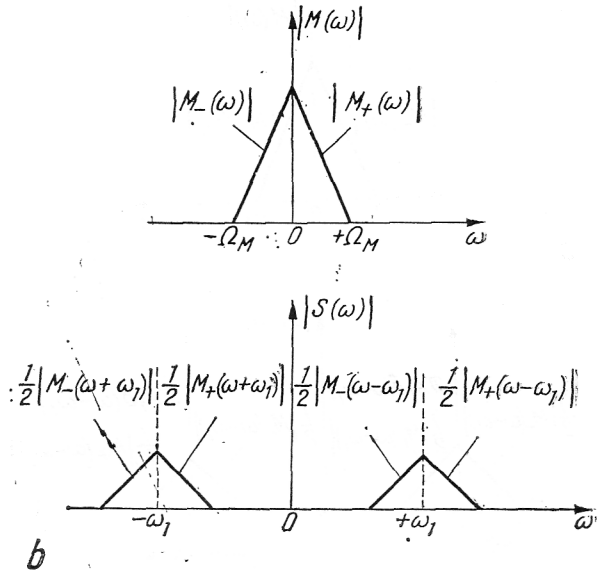


Fig. 13.2. Spectrul semnalului MA-PS.

13.1.3. Reprezentarea semnalelor modulate liniar în domeniul frecvență

În cele ce urmează se va determina densitatea spectrală a semnalului modulat în amplitudine cu purtătoare și cu ambele benzi laterale (MA), ale semnalului modulat în amplitudine cu purtătoare suprimată (MA-PS), și ale semnalului modulat în amplitudine cu o singură bandă laterală (MA-BLU).

13.1.3.1. Spectrul semnalului (MA)

În acest caz transformarea trebuie efectuată asupra mesajului $A_1 + m(t)$, iar spectrul semnalului va fi:

$$S_p(\omega) = \Re_1\{\mathfrak{F}\{A_1 + m(t)\}\} \tag{13.8}$$

și

$$S_p(\omega) = \Re_1\{\mathfrak{F}\{A_1\} + \mathfrak{F}\{m(t)\}\}$$

dar

$$\mathfrak{F}\{A_1\} = 2\pi A_1 \delta(\omega)$$

$$\mathfrak{F}\{m(t)\} = M(\omega)$$

Din relația (13.8), ținînd seama de acțiunea operatorului $\Re_1$ dată de relația (13.5), se obține

$$S_p(\omega) = \pi A_1[e^{j\varphi_1}\delta(\omega - \omega_1) + e^{-j\varphi_1}\delta(\omega + \omega_1)] + \frac{1}{2}[e^{j\varphi_1}M(\omega - \omega_1) + e^{-j\varphi_1}M(\omega + \omega_1)] \tag{13.9}$$

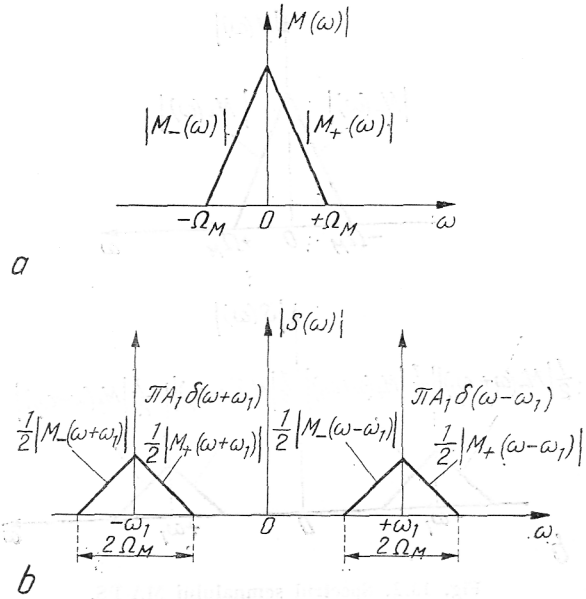


Fig. 13.3. Spectrul unui semnal MA.

Reprezentarea grafică (fig. 13.3) corespunzătoare relației (13.9) este similară cu figura 13.2, cu deosebirea că în punctele de frecvență $-\omega_1$ și $+\omega_1$ se notează prezența funcțiilor „δ" deoarece purtătoarea este prezentă în tot domeniul timp.

Dacă se notează cu Ω_M cea mai înaltă frecvență din spectrul mesajului lărgimea de bandă ocupată de semnalul $S_p(t)$ este egală cu $2\Omega_M$, cu o distribuție simetrică față de frecvența purtătoare ω_1 (respectiv $-\omega_1$).

13.1.3.2. Spectrul semnalului (MA-PS)

Spectrul $S(\omega)$ al semnalului cu purtătoare suprimată poate fi dedus din cazul precedent suprimînd în relația (13.9) pe A_1:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_1} M(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_1} M(\omega + \omega_1) \qquad (13.10)$$

Lărgimea de bandă este tot $2\Omega_M$, iar spectrul semnalului este simetric față de frecvența purtătoare ω_1 (respectiv $-\omega_1$).

După cum rezultă din definiția operatorului $\mathcal{R}_1\{\ \}$, spectrul $S(\omega)$ este dat în fig. 13.2.

$$\mathcal{R}_1\{M(\omega)\} = S(\omega)$$

13.1.3.3. Spectrul semnalului (MA-BLU)

Dacă semnalul modulat în amplitudine cu ambele benzi laterale și purtătoare suprimată este trecut printr-un filtru care elimină banda laterală inferioară sau superioară frecvenței ω_1, *se obține un* **semnal cu o singură bandă laterală** (fig. 13.4).

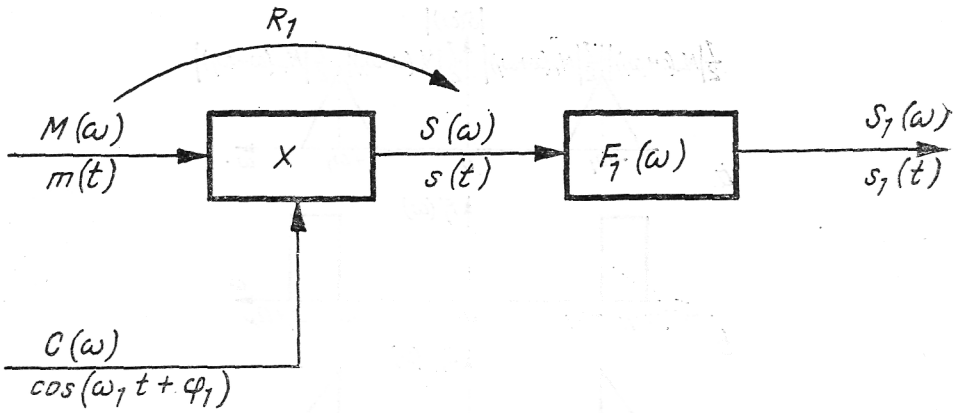


Fig. 13.4. Obținerea MA — BLU.

Idealizînd caracteristica de transfer a filtrului care elimină una din benzile laterale se disting două cazuri:

— *în cazul eliminării benzii laterale inferioare*:

$$F_1(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } \omega_1 < |\omega| < \omega_1 + \Omega_M \\ 0, \text{ pentru } |\omega| < \omega_1;\ \omega_1 + \Omega_M < |\omega| \end{cases} \tag{13.11}$$

— *în cazul eliminării benzii laterale superioare*:

$$F_1(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } \omega_1 - \Omega_M < |\omega| < \omega_1 \\ 0, \text{ pentru } |\omega| < \omega_1 - \Omega_M;\ \omega_1 < |\omega| \end{cases} \tag{13.12}$$

Ținînd seama de relațiile (13.6) și (13.7) densitatea spectrală în cazul eliminării benzii laterale inferioare este (fig. 13.5, *c*)

$$S_{1+}(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_1} M_+(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_1} M_-(\omega + \omega_1) \tag{13.13}$$

iar în cazul eliminării benzii laterale superioare (fig. 13.5, *e*):

$$S_{1-}(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_1} M_-(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_1} M_+(\omega + \omega_1) \tag{13.14}$$

În cazul transmiterii cu o singură bandă laterală, lărgimea de bandă a spectrului este Ω_M și *este cea mai mică lărgime de bandă ce se poate obține într-un sistem modulat care nu face apel la proprietățile statistice ale mesajului.*

13.1.4. Reprezentarea semnalelor modulate liniar în domeniul timp

În cele ce urmează se vor da reprezentările în domeniul timp stabilite în mod direct pentru modulația în amplitudine cu ambele benzi laterale și cu purtătoare (MA) și modulația în amplitudine cu purtătoare suprimată (MA—PS), iar în cazul modulației în amplitudine cu bandă laterală unică (MA-BLU) se procedează la aplicarea transformării inverse Fourier spectrului respectiv.

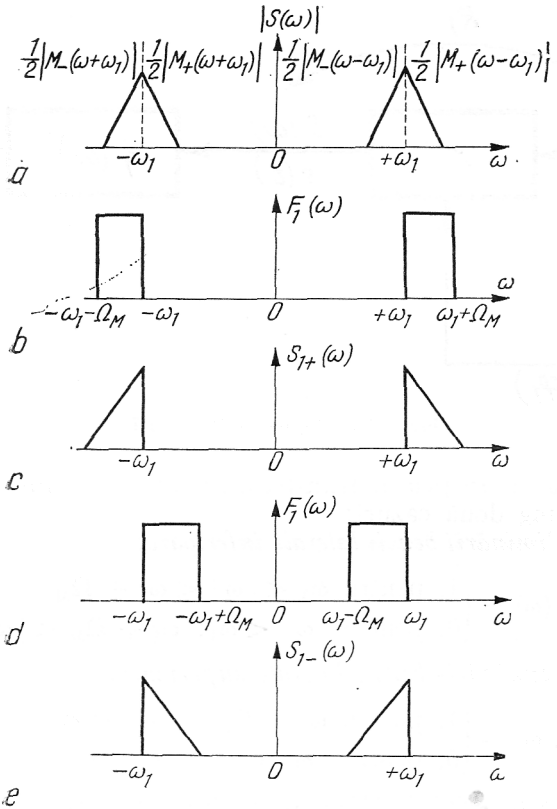


Fig. 13.5. Spectrul unui semnal MA — BLU.

13.1.4.1. **Modulația în amplitudine (MA)**

Acest proces de modulație este obținut prin transformarea $\mathcal{F}_1\{A_1 + m(t)\}$ respectiv:

$$s_p(t) = [A_1 + m(t)] \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \text{pentru } A_1 + m(t) > 0 \qquad (13.15)$$

$$s_p(t) = 0 \qquad \text{pentru } A_1 + m(t) \leqslant 0$$

Dacă se notează prin a modulul celei mai mari valori (negative) a lui $m(t)$ și notînd:

$$m_0(t) = \frac{1}{a} m(t) \qquad (13.16)$$

avem:

$$s_p(t) = A_1 \left[1 + \frac{a}{A_1} m_0(t)\right] \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

și notînd cu $\alpha = \frac{a}{A_1}$ se obține:

$$s_p(t) = A_1[1 + \alpha m_0(t)] \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad (13.17)$$

Raportul $\alpha = \frac{a}{A_1}$ se numește *grad de modulație.*

Cînd $\alpha = 1$ se spune că *modulația este completă* sau *modulație 100%*.

Pentru valori ale lui $\alpha > 1$ se spune că are loc o *supramodulație* și în acest caz *informația transmisă este degradată*.

Cele de mai sus sînt valabile pentru cazul cel mai general, cînd valorile de vîrf pozitive și valorile de vîrf negative ale mesajului nu sînt egale, putînd lua orice valori (de exemplu una din ele poate avea valoarea zero).

În cazul particular, cînd:

$$m(t) = a \cos \Omega t, \tag{13.18}$$

expresia semnalului devine:

$$s_p(t) = A(1 + \alpha \cos \Omega t) \cos (\omega_1 t + \varphi_1) \tag{13.19}$$

respectiv:

$$s_p(t) = A \cos (\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{1}{2} \alpha A \cos [(\omega_1 - \Omega) t + \varphi_1] + \\ + \frac{1}{2} \alpha A \cos [(\omega_1 + \Omega) t + \varphi_1] \tag{13.20}$$

Realizarea acestei modulații este arătată schematic în fig. 13.6.

13.1.4.2. Modulația în amplitudine cu purtătoare suprimată (MA-PS)

Dacă în relația (13.15) se înlocuiește $A_1 = 0$ și se ridică restricția $A_1 + m(t) \geq 0$, se obține expresia semnalului modulat în amplitudine cu purtătoare suprimată (MA-PS) și anume:

$$s(t) = m(t) \cos (\omega_1 t + \varphi_1) \tag{13.21}$$

sau

$$s(t) = a m_0(t) \cos (\omega_1 t + \varphi_1) \tag{13.22}$$

În acest caz nu se pune problema supramodulației, parametrul a din expresia de mai sus poate să aibă valori oricît de mari fără a se introduce distorsiuni.

Pentru:

$$m(t) = a \cos \Omega t \tag{13.23}$$

se obține:

$$s(t) = a \cos \Omega t \cos (\omega_1 t + \varphi_1) \tag{13.24}$$

sau:

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cos [(\omega_1 - \Omega) t + \varphi_1] + \frac{1}{2} a \cos [(\omega_1 + \Omega) t + \varphi_1] \tag{13.25}$$

Realizarea principială a MA-PS este arătată în fig. 13.7.

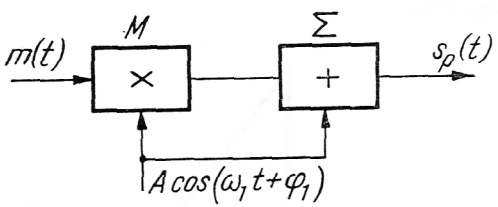


Fig. 13.6. Realizarea în principiu a MA:
M — circuit de multiplicare; Σ — circuit de însumare.

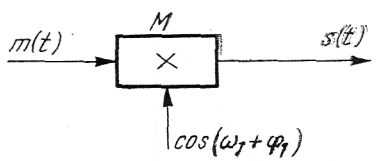


Fig. 13.7. Realizarea în principiu a MA — PS:
M — multiplicator

13.1.4.3. Modulația în amplitudine cu bandă laterală unică (MA-BLU)

Pentru a se determina expresia semnalului în domeniul timp se va lua transformata inversă a densității spectrale date de relația (13.13) sau (13.14). Acțiunea de filtrare descrisă în § 13.1.3.3 poate fi obținută prin multiplicări cu funcția treaptă în domeniul frecvență:

$$\begin{aligned} u(\omega) &= 1 \qquad \omega \geqslant 0 \\ u(\omega) &= 0 \qquad \omega < 0 \end{aligned} \tag{13.26}$$

Transformata Fourier inversă a acestei funcții este

$$\mathcal{F}^{-1}\{u(\omega)\} = \frac{1}{2}\,\delta(t) + \frac{\mathrm{j}}{2\pi t} \tag{13.27}$$

Acțiunea de filtrare a componentelor laterale (fig. 13.8) poate fi scrisă

$$S_{1+}(\omega) = S(\omega)\,u(-\omega - \omega_1) + S(\omega)\,u(\omega - \omega_1) \tag{13.28}$$

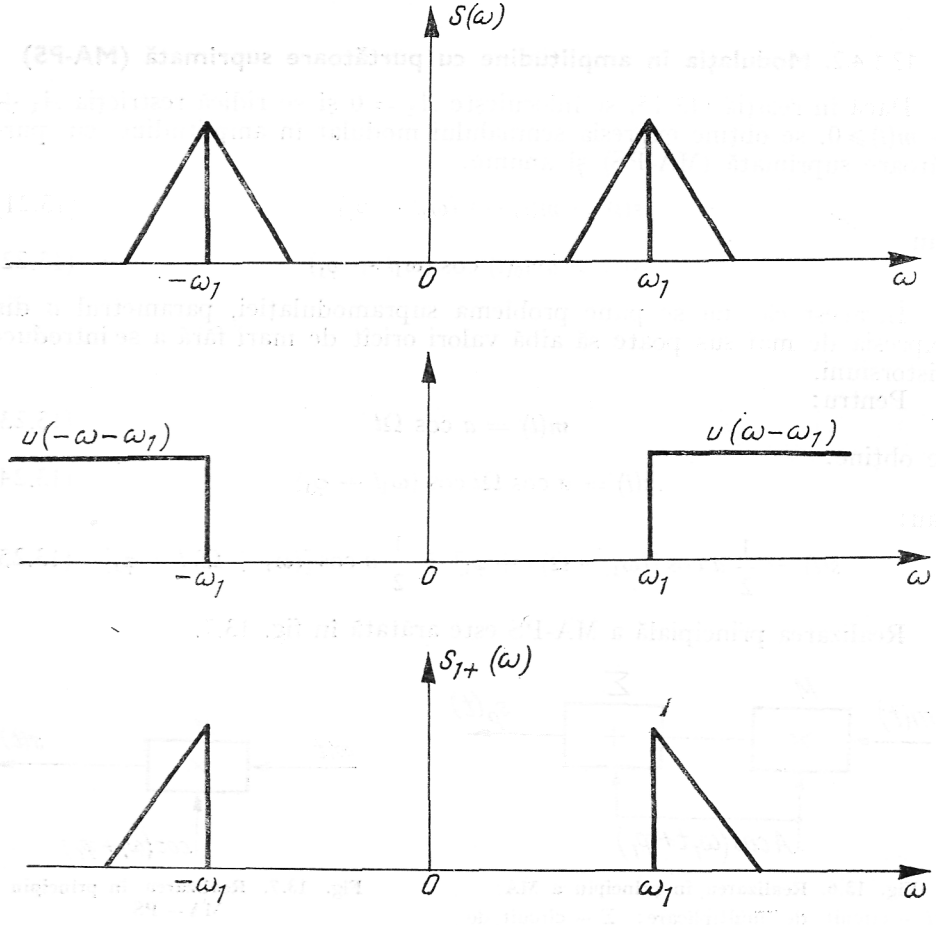


Fig. 13.8. Obținerea semnalului MA — BLU.

Transformata Fourier inversă a acestui spectru ne dă expresia în domeniul timp a semnalului MA-BLU:

$$s_1(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{S_{1+}(\omega)\} \tag{13.29}$$

unde:

$$S_{1+}(\omega) = S(\omega)\,[u(-\omega-\omega_1) + u(\omega-\omega_1)] \tag{13.30}$$

Ținînd seama de expresia lui $S(\omega)$ dată de relația (13.10) avem:

$$S_{1+}(\omega) = \frac{1}{2}\,e^{j\varphi_1} M(\omega-\omega_1)\,u(\omega-\omega_1) + \frac{1}{2}\,e^{-j\varphi_1} M(\omega+\omega_1)\,u(-\omega-\omega_1) \tag{13.31}$$

Făcînd apel la următoarele proprietăți ale perechilor Fourier:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \tag{13.32}$$

$$f(t)e^{j\omega_1 t} \leftrightarrow F(\omega-\omega_1] \tag{13.33}$$

$$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega) \tag{13.34}$$

avem:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{u(\omega-\omega_1)\} = \frac{1}{2}\left[\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right] e^{j\omega_1 t} \tag{13.35}$$

și

$$\mathfrak{F}^{-1}\{u(-\omega-\omega_1)\} = \frac{1}{2}\left[\delta(t) - \frac{j}{\pi t}\right] e^{-j\omega_1 t} \tag{13.36}$$

Aplicînd teorema de convoluție:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F_1(\omega)\,F_2(\omega)\} = f_1(t) * f_2(t) \tag{13.37}$$

obținem:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{M(\omega-\omega_1)\,u(\omega-\omega_1)\} = m(t)\,e^{j\omega_1 t} * \frac{1}{2}\left[\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right] e^{j\omega_1 t}$$

ori

$$\frac{1}{2}\,m(t)\,e^{j\omega_1 t} * \delta(t)\,e^{j\omega_1 t} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} m(\tau)\,e^{j\omega_1 t}\delta(t-\tau)\,e^{j\omega_1(t-\tau)}\,d\tau = \frac{1}{2}\,m(t)\,e^{j\omega_1 t} \tag{13.38}$$

iar:

$$j\frac{1}{2\pi}\,m(t)\,e^{j\omega_1 t} * \frac{1}{t}\,e^{j\omega_1 t} = \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} m(\tau)\,e^{j\omega_1\tau}\frac{1}{t-\tau}\,e^{j\omega_1(t-\tau)}\,d\tau =$$

$$= j\frac{e^{j\omega_1 t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m(\tau)}{t-\tau}\,d\tau = j\,\frac{1}{2}\,\mathcal{H}\{m(t)\}\,e^{j\omega_1 t} \tag{13.39}$$

unde:

$$\mathcal{H}\{m(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m(\tau)}{t-\tau}\,d\tau \tag{13.40}$$

este transformata Hilbert a mesajului $m(t)$.

Din cele precedente rezultă:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{M(\omega-\omega_1)\,u(\omega-\omega_1)\} = \frac{1}{2}\,[m(t) + j\mathcal{H}\{m(t)\}]\,e^{+j\omega_1 t} \tag{13.41}$$

În mod analog obținem:

$$\mathcal{F}^{-1}\{M(\omega+\omega_1)\,u(-\omega-\omega_1)\}=\frac{1}{2}[m(t)-j\mathcal{H}\{m(t)\}]\,e^{-j\omega_1 t} \quad (13.42)$$

Introducînd expresia lui $S_{1+}(\omega)$ dată de relația (13.31) în relația (13.29) și făcînd înlocuirile date de relațiile (13.41) și (13.42) se obține:

$$=s_{1+}(t)\frac{1}{4}m(t)[e^{j(\omega_1 t+\varphi_1)}+e^{-j(\omega_1 t+\varphi_1)}]+j\frac{1}{4}\mathcal{H}\{m(t)\}[e^{j(\omega_1 t+\varphi_1)}-e^{-j(\omega_1 t+\varphi_1)}]$$

respectiv:

$$s_{1+}(t)=\frac{1}{2}m(t)\cos(\omega_1 t+\varphi_1)-\frac{1}{2}\mathcal{H}\{m(t)\}\sin(\omega_1 t+\varphi_1) \quad (13.43)$$

Dacă am fi reținut benzile laterale inferioare:

$$s_{1-}(t)=\frac{1}{2}m(t)\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+\frac{1}{2}\mathcal{H}\{m(t)\}\sin(\omega_1 t+\varphi_1) \quad (13.44)$$

Din aceste relații rezultă:

$$s_{1+}(t)+s_{1-}(t)=m(t)\cos(\omega_1 t+\varphi_1)=s(t)$$

$s(t)$ fiind semnal modulat în amplitudine cu ambele benzi laterale, fără purtătoare.

Componenta:

$$\mathcal{H}\{m(t)\}\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$$

care intervine în relațiile (13.43) și (13.44) se numește **componentă în cuadratură.**

Din cele precedente rezultă că *transmiterea benzii laterale superioare sau inferioare are ca urmare schimbarea semnului componentei în cuadratură.*

În cazul particular cînd:

$$m(t)=\cos\Omega t \quad (13.45)$$

avem

$$s_{1+}(t)=\frac{1}{2}\cos\Omega t\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+\frac{1}{2}\sin\Omega t\sin(\omega_1 t+\varphi_1) \quad (13.46)$$

fiindcă $\mathcal{H}\{\cos\Omega t\}=-\sin\Omega t$.

Relația (13.46) poate fi scrisă

$$s_{1+}(t)=\frac{1}{2}\cos[(\omega_1-\Omega)t+\varphi_1] \quad (13.47)$$

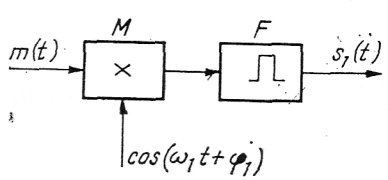


Fig. 13.9. Realizarea MA – BLU prin filtrare:
M – multiplicator; F – filtru care asă să treacă o singură bandă laterală.

Dacă se elimină banda laterală inferioară

$$s_{1-}(t)=\frac{1}{2}\cos[(\omega_1+\Omega)t+\varphi_1] \quad (13.48)$$

Realizarea principială a MA-BLU este arătată în două variante în figurile 13.9 și 13.10.

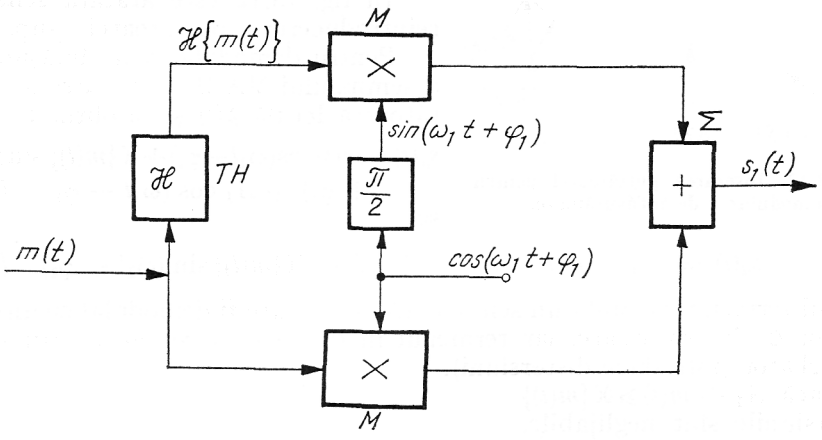


Fig. 13.10. Obținerea MA – BLU prin transformare Hilbert:
TH – transformator Hilbert; *M* – multiplicatori; Σ – circuit de însumare.

13.1.5. Demodulația semnalelor modulate liniar

În cele ce urmează ne vom ocupa în mod sumar de demodulația de înfășurătoare (anvelopă) fiindcă acest procedeu nu pune probleme deosebite și vom acorda mai multă atenție demodulării de produs.

13.1.5.1. Demodulația de înfășurătoare

Demodulația de înfășurătoare este cel mai simplu gen de demodulație și se aplică la MA fiindcă în acest caz *înfășurătoarea variază liniar cu mesajul.*

Considerînd un mesaj sinusoidal (fig. 13.11, *a*).

$$s_p(t) = A_1(1 + \alpha \cos \Omega t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

înfășurătoarea $A_1(1 + \alpha \cos \Omega t)$ este redată la ieșirea din demodulatorul din fig. 13.11, *b*.

Semnalul MA-PS poate fi și el demodulat cu un demodulator de înfășurătoare dacă la recepție se introduce o purtătoare locală $p(t)$ de aceeași frecvență și fază ca și purtătoarea suprimată la emisie.

Purtătoarea locală este:

$$p(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Semnalul aplicat demodulatorului este

$$s_d(t) = s(t) + p(t) = m(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (13.49)$$

respectiv:

$$s_d(t) = [A_1 + m(t)] \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (13.50)$$

relație din care se vede că dacă A_1 are o valoare suficient de mare astfel încît $A_1 + m(t) \geq 0$, demodulatorul redă mesajul $m(t)$.

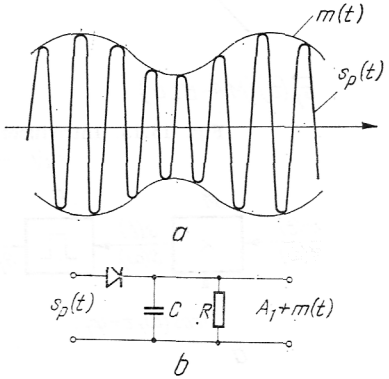


Fig. 13.11. Demodulația de înfășurătoare.

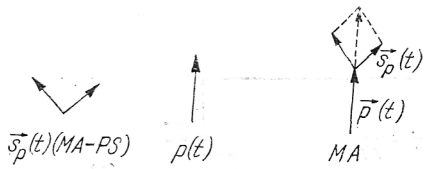


Fig. 13.12. Inserarea purtătoarei pentru demodularea de înfășurătoare.

În fig. 13.12 este arătată schematic reintroducerea purtătoarei suprimate.

Pentru demodularea de înfășurătoare a semnalului MA-BLU se introduce purtătoarea locală $p(t)$ și se obține:

$$s_a(t) = m(t)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{H}\{m(t)\}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (13.51)$$

sau

$$s_a(t) = [A_1 + m(t)]\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{H}\{m(t)\}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (13.52)$$

Primul termen reprezintă un semnal MA care poate fi demodulat cu un demodulator de înfășurătoare, iar termenul în cuadratură reprezintă un semnal perturbator (introduce distorsiuni).

Dacă $A_1 + m(t) \gg \mathcal{H}\{m(t)\}$
distorsiunile sînt neglijabile.

În fig. 13.13 este arătată introducerea purtătoarei.

13.1.5.2. Demodulația de produs

Neajunsurile demodulației de înfășurătoare, în cazurile semnalelor (MA-PS) și (MA-BLU), pot fi înlăturate dacă *demodulația se face prin intermediul unei noi modulații, analoage celei de la emisie, urmată de o filtrare.*

Presupunem că la emisie s-au făcut transformări (respectiv s-a făcut o modulație) conform schemei din fig. 13.14, *a*.

În funcție de caracteristicile filtrului $F_1(\omega)$, semnalul la ieșire va fi cu ambele benzi laterale, sau cu o singură bandă laterală.

Transformările efectuate la recepție sînt indicate în fig. 13.14, *b*.

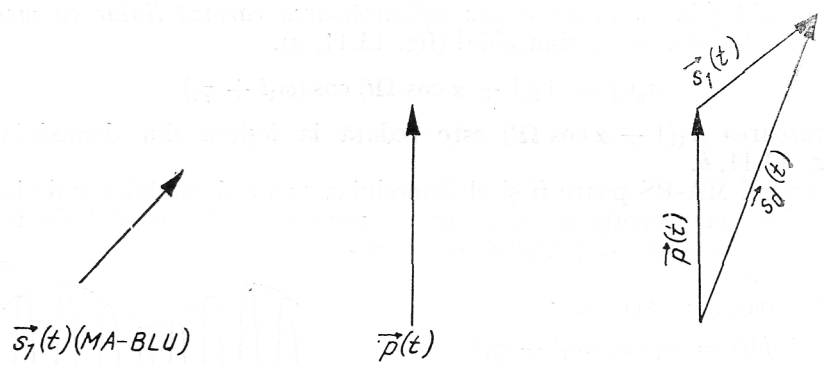


Fig. 13.13. Introducerea purtătoarei în semnalul MA — BLU:
$\vec{s}_a(t)$ — semnalul rezultant MA.

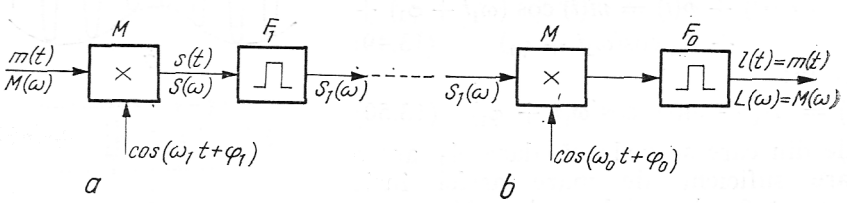


Fig. 13.14. Modulația MA-PS sau MA-BLU:
a — emisie; *b* — recepție.

S-au notat cu ω_0 și φ_0, frecvența și faza purtătoarei generate local.

Asupra semnalului recepționat, al cărui spectru este $S_1(\omega)$ se aplică operatorul $\mathcal{R}_0$ și apoi operatorul de filtrare $F_0(\omega)$ și se obține:

$$L(\omega) = \mathcal{R}_0\{S_1(\omega)\}F_0(\omega) \tag{13.53}$$

Amintim că transformata $\mathcal{R}_0$ își are echivalentul $\mathcal{F}_0$, adică multiplicarea semnalului recepționat cu purtătoarea locală $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Se presupune că filtrul $F_0(\omega)$ este un filtru trece-jos ideal, cu timp de întîrziere nul, respectiv:

$$F_0(\omega) = \begin{cases} 2, & \text{pentru } |\omega| \leqslant \Omega_0 \\ 0, & \text{pentru } \Omega_0 < |\omega| \end{cases} \tag{13.54}$$

Modulul funcției de transfer a fost luat 2 pentru a obține un coeficient unitate al mesajului demodulat, după cum se va arăta în cele ce urmează.

În relația (13.54) Ω_0 este frecvența de tăiere a filtrului și este necesar să satisfacă relația:

$$\Omega_M \leqslant \Omega_0 \leqslant \omega_1 - \Omega_M \tag{13.55}$$

unde Ω_M este cea mai înaltă frecvență din spectrul mesajului, iar ω_1 este frecvența purtătoare.

Se consideră la început cazul cînd $F_1(\omega) = 1$ pentru orice ω (respectiv, nu apare filtrul la ieșirea din modulator) și $\omega_0 = \omega_1$, $\varphi_0 = \varphi_1$.

În acest caz $S_1(\omega) = S(\omega)$ și transformările de la recepție și de la emisie sînt identice:

$$\mathcal{R}_0\{\ \} = \mathcal{R}_1\{\ \}$$

În conformitate cu definiția operatorului $\mathcal{R}_0$ se poate scrie:

$$\mathcal{R}_0\{S(\omega)\} = \frac{1}{2}[e^{j\varphi_1}S(\omega - \omega_1) + e^{-j\varphi_1}S(\omega + \omega_1)] \tag{13.56}$$

dar conform relației (13.10):

$$S(\omega) = \frac{1}{2}[e^{j\varphi_1}M(\omega - \omega_1) + e^{-j\varphi_1}M(\omega + \omega_1)].$$

Înlocuind expresia lui $S(\omega)$ în relația (13.56) rezultă:

$$\mathcal{R}_0\{S(\omega)\} = \frac{1}{4}[e^{j^2\varphi_1}M(\omega - 2\omega_1) + 2M(\omega) + e^{-j^2\varphi_1}M(\omega + 2\omega_1)] \tag{13.57}$$

Dacă frecvența de tăiere a filtrului $F_0(\omega)$ satisface relația (13.55), la ieșirea din filtru se obține:

$$L(\omega) = \mathcal{R}_0\{S(\omega)\}F_0(\omega) = M(\omega) \tag{13.58}$$

deoarece componentele superioare sînt filtrate de $F_0(\omega)$.

În fig. 13.15 se arată schematic operațiile de translație $\mathcal{R}_0$ și filtrare $F_0(\omega)$.

Din relația (13.58) rezultă că recuperarea mesajului $l(t) = m(t)$ se face fără distorsiuni.

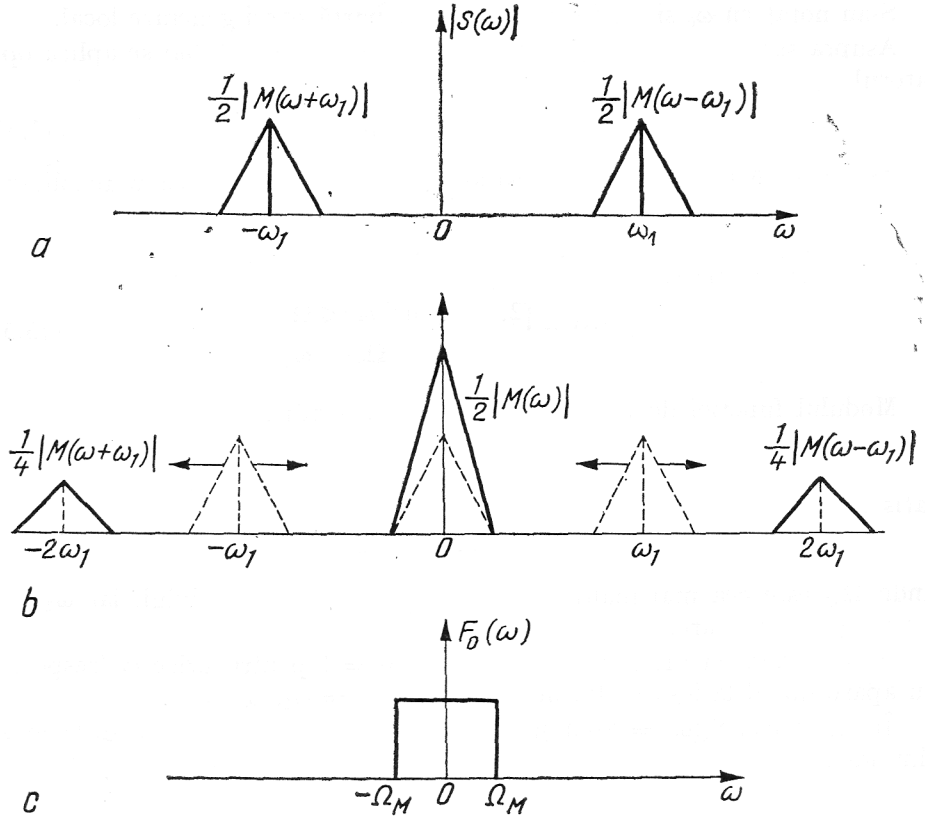


Fig. 13.15. Translația spectrului.

În cazul general, cînd transformarea R_0 de la recepție nu este identică cu transformarea de la emisie R_1, din cauză că frecvența sau faza purtătoarei de la recepție diferă de cea de la emisie, mesajul demodulat va fi:

$$L(\omega) = \mathfrak{R}_0\{S_1(\omega)\}F_0(\omega) \tag{13.59}$$

unde

$$S_1(\omega) = S(\omega)\,F_1(\omega).$$

În cele ce urmează se vor examina două cazuri și anume: cazul cînd ambele benzi laterale sînt transmise și cazul cînd se transmite numai o bandă laterală.

● **Transmisia cu ambele benzi laterale și cu purtătoare suprimată (MA-PS).** În acest caz:

$$F_1(\omega) = 1, \quad \text{pentru orice } \omega$$

și deci

$$S_1(\omega) = S(\omega)$$

La recepție rezultă:

$$\mathfrak{R}_0\{S(\omega)\} = \frac{1}{2}\left[e^{j\varphi_0}S(\omega - \omega_0) + e^{-j\varphi_0}S(\omega + \omega_0)\right. \tag{13.60}$$

Ținînd seama de expresia lui $S(\omega)$ dată de relația (13.10) se poate scrie:

$$\mathcal{R}_0\{S(\omega)\} = \frac{1}{4}[e^{j\varphi_0} e^{j\varphi_1} M(\omega - \omega_1 - \omega_0) + e^{j\varphi_0} e^{-j\varphi_1} M(\omega + \omega_1 - \omega_0) +$$

$$+ e^{-j\varphi_0} e^{j\varphi_1} M(\omega - \omega_1 + \omega_0) + e^{-j\varphi_0} e^{-j\varphi_1} M(\omega + \omega_1 + \omega_0)] \quad (13.61)$$

Luînd în considerare acțiunea filtrului $F_0(\omega)$, care elimină componentele superioare, se obține:

$$L(\omega) = F_0(\omega)\,\mathcal{R}_0\{S(\omega)\} = \frac{1}{2}[e^{j(\varphi_0-\varphi_1)} M(\omega + \omega_1 - \omega_0) +$$

$$+ e^{-j(\varphi_0-\varphi_1)} M(\omega - \omega_1 + \omega_0)]$$

Notînd cu $\omega_\Delta = \omega_0 - \omega_1$ diferența între frecvențele purtătoare de la emisie și recepție, și cu $\varphi_\Delta = \varphi_0 - \varphi_1$ diferența între fazele purtătoarelor, se obține:

$$L(\omega) = \frac{1}{2}[e^{j\varphi_\Delta} M(\omega - \omega_\Delta) + e^{-j\varphi_\Delta} M(\omega + \omega_\Delta)] \quad (13.62)$$

sau trecînd în domeniul timpului, respectiv aplicînd transformarea Fourier inversă asupra ambilor termeni, rezultă:

$$l(t) = \frac{1}{2}[e^{j\varphi_\Delta} e^{j\omega_\Delta t} m(t) + e^{-j\varphi_\Delta} e^{-j\omega_\Delta t} m(t)]$$

$$l(t) = m(t)\cos(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta), \quad \text{sau}$$

$$l(t) = m(t)\cos[(\omega_0 - \omega_1)\,t + \varphi_0 - \varphi_1] \quad (13.63)$$

În legătură cu această relație se disting următoarele cazuri:

● Dacă $\omega_0 = \omega_1$ și $\varphi_0 = \varphi_1$, rezultă $l(t) = m(t)$. În acest caz se face *detecție sincronă. Mesajul este recuperat fără distorsiuni.*

● Dacă $\omega_0 = \omega_1$ și $\varphi_0 \neq \varphi_1$, rezultă $l(t) = m(t)\cos(\varphi_0 - \varphi_1)$. Transmisiunea se face și în acest caz fără distorsiuni, însă *mesajul demodulat este mai mic decît în cazul precedent.*

● Dacă $\omega_0 = \omega_1$ și $\varphi_0 - \varphi_1 = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, unde k este întreg, rezultă $l(t) = 0$.

În cazul în care diferența de fază între purtătoarea de la recepție și cea de la emisie este un multiplu impar de $\frac{\pi}{2}$, *semnalul la ieșirea din demodulator este nul.* Această proprietate este extrem de utilă pentru că permite să se realizeze două canale de transmisiune pe aceeași frecvență (fig. 13.16) sau permite eliminarea la recepție a unui semnal nedorit avînd aceeași frecvență ca semnalul dorit.

● **Transmisiune cu bandă laterală unică (MA-BLU).** În acest caz filtrul de la emisie $F_1(\omega)$ elimină una din benzile laterale. Se presupune că se elimină banda laterală inferioară:

$$S_{1+}(\omega) = \frac{1}{2}[e^{j\varphi_1} M_+(\omega - \omega_1) + e^{-j\varphi_1} M_-(\omega + \omega_1)] \quad (13.64)$$

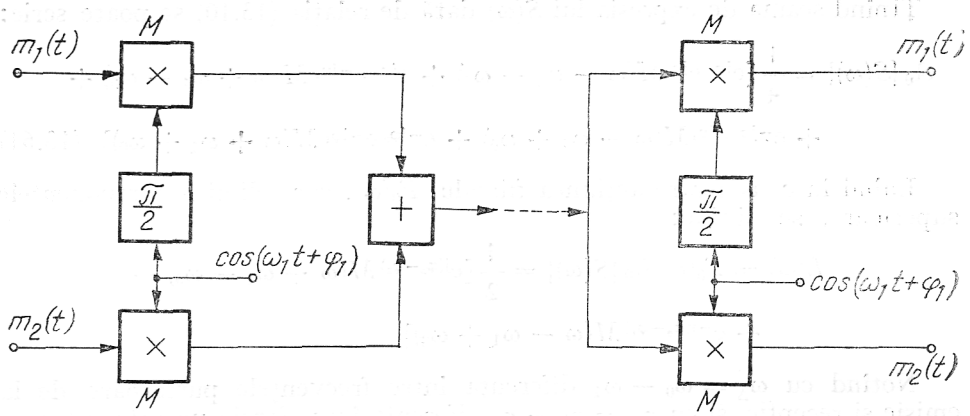


Fig. 13.16. Transmisiune cu modulație în cuadratură.

La recepție se face transformarea:

$$\mathcal{R}_0\{S_{1+}(\omega)\} = \frac{1}{4}\left[e^{j\varphi_0}e^{j\varphi_1}M_+(\omega-\omega_1-\omega_0) + e^{j\varphi_0}e^{-j\varphi_1}M_-(\omega+\omega_1-\omega_0) + \right.$$
$$\left. + e^{-j\varphi_0}e^{j\varphi_1}M_+(\omega-\omega_1+\omega_0) + e^{-j\varphi_0}e^{-j\varphi_1}M_-(\omega+\omega_1+\omega_0)\right].$$

Ținînd seama de acțiunea filtrului $F_0(\omega)$ se obține:

$$L(\omega) = F_0\mathcal{R}_0\{S_1(\omega)\} = \frac{1}{2}\left[e^{+j(\varphi_0-\varphi_1)}M_-(\omega+\omega_1-\omega_0) + \right.$$
$$\left. + e^{-j(\varphi_0-\varphi_1)}M_+(\omega-\omega_1+\omega_0)\right]$$

și utilizînd aceleași notații:

$$L(\omega) = \frac{1}{2}\left[e^{+j\varphi_\Delta}M_-(\omega-\omega_\Delta) + e^{-j\varphi_\Delta}M_+(\omega+\omega_\Delta)\right] \qquad (13.65)$$

Ținînd seama de § 13.1.4.3 se poate scrie:

$$l(t) = \frac{1}{2}m(t)\cos(\omega_\Delta t+\varphi_\Delta) - \frac{1}{2}\mathcal{H}\{m(t)\}\sin(\omega_\Delta t+\varphi_\Delta) \qquad (13.66)$$

Aceasta este expresia generală a unui semnal (MA-BLU) demodulat prin demodulație de produs.

Dacă s-ar fi trimis banda laterală inferioară, expresia mesajului după demodulație ar fi fost:

$$l(t) = \frac{1}{2}m(t)\cos(\omega_\Delta t+\varphi_\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{H}\{m(t)\}\sin(\omega_\Delta t+\varphi_\Delta). \qquad (13.67)$$

Din relațiile (13.66) și (13.67) se vede că *în cazul general, cînd* $\omega_\Delta \neq 0$ *apar distorsiuni importante datorită faptului că mesajul transmis* $m(t)$ *după demodulare apare multiplicat cu* $\cos(\omega_\Delta t+\varphi_\Delta)$, *precum și datorită faptului că apare componenta în cuadratură.*

În *cazul particular*, cînd $\omega_\Delta = 0$, *însă* $\varphi_\Delta \neq 0$, relația (13.66) devine:

$$l(t) = \frac{1}{2}m(t)\cos\varphi_\Delta + \frac{1}{2}\mathcal{H}\{m(t)\}\sin\varphi_\Delta \qquad (13.68)$$

În acest caz *distorsiunile sînt date numai de componentele în cuadratură.*

La transmisiunile de vorbă sau de muzică se poate considera că apariția termenului care conține transformata Hilbert a mesajului nu introduce distorsiuni perceptibile de ureche, fiindcă nu introduce frecvențe noi (adică frecvențe care să nu fie cuprinse în spectrul lui $m(t)$).

În cazul tansmisiunilor în care interesează să se reproducă exact forma mesajului transmis, transformata Hilbert introduce distorsiuni deoarece $\mathcal{H}\{m(t)\}$ în general diferă mult de $m(t)$. Pentru a elimina distorsiunile este necesară o demodulare sincronă în care $\omega_\Delta = 0$, $\varphi_\Delta = 0$.

13.1.6. Perturbații în sistemele de modulație liniară

Se vaconsidera în primul rînd cazul perturbațiilor produse de interferențe, acela al perturbațiilor produse de zgomotul de fluctuații și apoi acela al distorsiunilor.

13.1.6.1. Interferențe în sistemele cu modulație liniară

În cele ce urmează se va considera, pentru simplificarea analizei, că atît semnalul util, cît și semnalul de interferență nu sînt modulate, calculul putînd fi extins fără dificultăți principiale și la semnale modulate. Se vor lua în considerare două situații și anume aceea la care demodulația se face cu demodulator de înfășurătoare și aceea la care demodulația se face cu demodulator de produs.

● **Interferențe în (MA) cu demodulatoare de înfășurătoare.** Se notează semnalul util cu:

$$s_1(t) = A_1 e^{j\omega_1 t}, \tag{13.69}$$

iar semnalul perturbator cu:

$$s_2(t) = A_2 e^{j\omega_2 t}. \tag{13.70}$$

La intrarea în demodulator se aplică semnalul sumă recepționat:

$$r(t) = s_1(t) + s_2(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t} = A_1 e^{j\omega_1 t}\left[1 + \frac{A_2}{A_1} e^{j(\omega_2 - \omega_1)t}\right] \tag{13.71}$$

Se presupune că semnalul de interferență este mai mic decît semnalul util, adică:

$$a = \frac{A_2}{A_1} < 1$$

Diferența între cele două frecvențe se notează cu $\omega_\Delta = \omega_2 - \omega_1$.

Cu aceste notații relația (13.71) devine:

$$r(t) = A_1 e^{j\omega_1 t}[1 + a e^{j\omega_\Delta t}] \tag{13.72}$$

Expresia din paranteză se reprezintă prin fazorul $\overline{OP}$ care are modulul (fig. 13.17):

$$OP = \sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\omega_\Delta t} \tag{13.73}$$

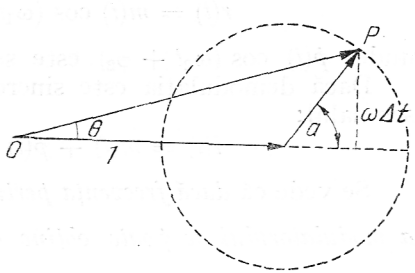


Fig. 13.17. Efectul unei interferențe.

iar argumentul

$$\theta = arc\,tg \frac{a \sin \omega_\Delta t}{1 + a \cos \omega_\Delta t} \tag{13.74}$$

Înlocuind în relația (13.72) se obține:

$$r(t) = A_1 \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \omega_\Delta t}\; e^{j(\omega_1 t + \theta)} \tag{13.75}$$

Amplitudinea semnalului sumă $r(t)$ este:

$$A(t) = A_1 \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \omega_\Delta t} \tag{13.76}$$

Dezvoltînd în serie și reținînd numai primii doi termeni se obține:

$$A(t) \cong A_1(1 + a \cos \omega_\Delta t) = A_1 + A_2 \cos \omega_\Delta t \tag{13.77}$$

unde s-a considerat $a \ll 1$.

Pentru a calcula raportul semnal/perturbație, să considerăm că semnalul util $s_1(t)$ este modulat sinusoidal:

$$m(t) = M \cos \Omega t$$

iar semnalul perturbator nu este modulat.

În acest caz înfășurătoarea $A(t)$ dată de relația (13.77) devine:

$$A(t) \cong A_1 + M \cos \Omega t + A_2 \cos \omega_\Delta t \tag{13.78}$$

Presupunem că frecvența perturbatoare $\omega_\Delta < \Omega_M$, unde Ω_M este cea mai mare frecvență din spectrul mesajului și deci egală cu banda de trecere a filtrului de la ieșirea din sistem.

Raportul semnal perturbație la ieșire este

$$\left(\frac{S}{P}\right)_e = \frac{putere\ mesaj\ la\ ieșire}{putere\ perturbație\ la\ ieșire} \tag{13.79}$$

respectiv

$$\left(\frac{S}{P}\right)_e = \frac{\widetilde{(M \cos \Omega t)^2}}{\widetilde{(A_2 \cos \omega_\Delta t)^2}} = \frac{M^2}{A_2^2} = \left(\frac{M}{A_1}\right)^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \tag{13.80}$$

unde $\alpha = \dfrac{M}{A_1}$ este gradul de modulație.

Din această relație rezultă că *pentru a avea un raport semnal/perturbație cît mai mare în cazul MA, este necesar să se lucreze cu grade de modulație mari*

● **Interferențe în (MA-PS și MA-BLU) cu demodulatoare de produs.** Să considerăm întîi *cazul MA-PS*. Semnalul recepționat este:

$$r(t) = m(t) \cos (\omega_1 t + \varphi_1) + p(t) \cos (\omega_2 t + \varphi_2) \tag{13.81}$$

unde: $p(t) \cos (\omega_2 t + \varphi_2)$ este semnalul perturbator.

Dacă demodulația este sincronă, $\omega_\Delta = 0$ și $\varphi_\Delta = 0$, la ieșire se obține semnalul:

$$l(t) = m(t) + p(t) \cos [(\omega_1 - \omega_2)\, t + \varphi_1 - \varphi_2] \tag{13.82}$$

Se vede că *dacă frecvența perturbației* $\omega_2 = \omega_1$, *atunci prin reglarea fazei* φ_1 *a modulatorului se poate obține* $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ *și în acest caz perturbația la ieșire este nulă.*

În cazul MA-BLU semnalul recepționat este:

$$r(t) = m(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mathcal{H}\{m(t)\} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + p(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{13.83}$$

Dacă demodulația este sincronă $\omega_\Delta = 0$ și $\varphi_\Delta = 0$ semnalul la ieșire conform rel. (13.66) multiplicat cu 2 este:

$$l(t) = m(t) + p(t) \cos[(\omega_1 - \omega_2) t + \varphi_1 - \varphi_2] \tag{13.84}$$

Spre deosebire de cazul precedent, în acest caz *interferența nu poate fi anulată deoarece faza purtătoarei locale de la recepție nu poate fi modificată fără a introduce distorsiuni date de componenta în cuadratură.*

Evaluarea raportului semnal/perturbație în cazul interferențelor în sistemele MA-PS și MA-BLU este dificilă și nu duce la concluzii practice și în consecință expunerea ei este omisă.

13.1.6.2. Zgomote în sistemele cu modulație liniară

Sistemele cu modulație în amplitudine sînt foarte sensibile la perturbații de impulsuri fiindcă acestea modifică substanțial parametrul amplitudine prin care se transmite informația.

Aceste perturbații nu pot fi descrise matematic în vederea găsirii căilor de reducere a lor. În consecință, singura modalitate simplă de reducere a acestor perturbații este introducerea în receptor a unor limitatoare avînd ca prag de limitare, valoarea de vîrf a semnalului util.

Zgomotele de fluctuații afectează și ele substanțial sistemele cu modulație în amplitudine, însă sînt importante numai în sistemele cu lărgime de bandă mare în domeniul frecvențelor foarte înalte, unde perturbațiile de impulsuri sînt neglijabile.

Sistemele în care zgomotele de fluctuații sînt importante sînt în general sisteme cu demodulație de produs.

● **Zgomotele de fluctuații în sistemele cu demodulație de produs.** Zgomotul de fluctuații în conformitate cu § 7.19.3.2 relația (7.312) are expresia

$$x(t) = \alpha(t) \cos \varphi(t) \tag{13.85}$$

Sistemele cu purtătoare sinusoidală care fac obiectul acestui capitol sînt sisteme de bandă îngustă. În consecință, în conformitate cu relația (7.179) se poate scrie:

$$\varphi(t) = \omega_1 t + \Phi(t) \tag{13.86}$$

deci

$$x(t) = \alpha(t) \cos[\omega_1 t + \Phi(t)] \tag{13.87}$$

Evaluarea rapoartelor semnal/perturbație la MA-PS

Semnalul recepționat este:

$$r(t) = s(t) + x(t) = m(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha(t) \cos[\omega_1 t + \Phi(t)] \tag{13.88}$$

Puterea semnalului perturbator poate fi calculată în funcție de densitatea sa de putere spectrală. Dacă considerăm că zgomotul este alb $p(\omega) = N_0$, puterea zgomotului în banda de trecere a sistemului B este:

$$P_i = N_0 B \tag{13.89}$$

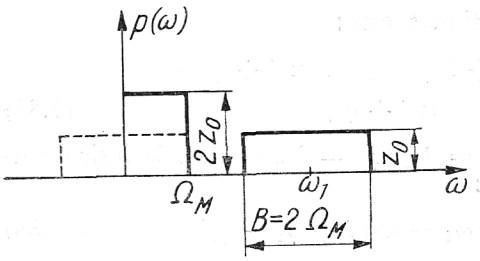


Fig. 13.18. Acțiunea demodulatorului de produs asupra zomotului.

Considerînd că Ω_M este cea mai înaltă frecvență din spectrul mesajului, $B = \frac{1}{2\pi} 2\Omega_M$, puterea zgomotului este

$$P_i = 2\Omega_M Z_0 \qquad (13.90)$$

unde:

$$Z_0 = \frac{1}{4\pi} N_0 \qquad (13.91)$$

Dacă presupunem că la demodulare $\omega_0 = \omega_1$, dar $\varphi_0 \neq \varphi_1$ semnalul la ieșirea din demodulator este:

$$l(t) = m(t) \cos(\varphi_0 - \varphi_1) + \alpha(t) \cos(\varphi_0 - \Phi) \qquad (13.92)$$

Ținînd seama de faptul că demodulatorul efectuează numai translații de spectru, densitatea spectrală a zgomotului la ieșire este $2Z_0$ (fig. 13.18). Lărgimea de bandă la ieșirea din filtrul demodulatorului este Ω_M, deci puterea zgomotului la ieșire este:

$$P_e = 2\Omega_M Z_0$$

Rezultă că *puterea perturbațiilor nu este modificată de demodulator* $P_e = P_i$.

Din cele precedente se pot calcula rapoartele semnal/perturbație la intrarea și la ieșirea din demodulator:

$$\left(\frac{S}{P}\right)_{intrare} = \frac{\widetilde{m^2(t)\cos^2(\omega_1 t + \varphi_1)}}{2\Omega_M Z_0} = \frac{1}{4} \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\Omega_M Z_0} \qquad (13.93)$$

iar

$$\left(\frac{S}{P}\right)_{ieșire} = \frac{\widetilde{m^2(t)} \cos^2(\varphi_0 - \varphi_1)}{2\Omega_M Z_0} \qquad (13.94)$$

Se definește un factor de îmbunătățire ρ care arată efectul procedeului de demodulație asupra raportului semnal/perturbație la ieșire.

$$\left(\frac{S}{P}\right)_{ieșire} = \rho \left(\frac{S}{P}\right)_{intrare} \qquad (13.95)$$

Ținînd seama de relațiile (13.93) și (13.94) avem:

$$\rho = 2 \cos^2(\varphi_0 - \varphi_1) \qquad (13.96)$$

Valoarea maximă este atinsă cînd $\varphi_0 = \varphi_1$ și în acest caz *prin demodulare se realizează o creștere de două ori a raportului semnal/perturbație.*

Evaluarea raportului semnal/perturbație la MA-BLU.

Presupunem că la demodulare $\omega_0 = \omega_1$ și $\varphi_0 = \varphi_1$. În acest caz demodulatorul face numai o translație de spectre fără a mai exista însă suprapuneri așa cum a fost cazul la MA-PS.

Rezultă că rapoartele semnal/perturbație intrare-ieșire nu se modifică:

$$\left(\frac{S}{P}\right)_{intrare} = \left(\frac{S}{P}\right)_{ieșire} = \frac{\frac{1}{4}\widetilde{m^2(t)}}{\Omega_M Z_0} \qquad (13.97)$$

fiindcă în conformitate cu relația (13.66) semnalul util la ieșire este:

$$l(t) = \frac{1}{2} m(t)$$

Factorul de îmbunătățire în acest caz este $\rho = 1$.

Rezultă că *MA-BLU nu prezintă avantaje în privința stabilității la perturbații, însă este utilizată în toate aplicațiile unde economia de spectru este factorul esențial.*

13.1.6.3. Distorsiuni în sisteme cu modulație liniară

Distorsiunile în sistemele cu modulație liniară provin din:

— *neliniarități ale caracteristicii de amplitudine;*

— *trecerea semnalului modulat prin canale cu parametrii variabili;*

— *modificări ale modulului și fazei componentelor spectrale ale semnalului.*

Prima categorie de distorsiuni în general este neglijabilă. A doua categorie este importantă numai în cazul unor canale radioelectrice în care intervin fenomene de propagare aleatoare.

A treia categorie de distorsiuni este curentă, legată de reglarea necorespunzătoare a circuitelor liniare din canal.

Cele mai importante distorsiuni provin din atenuarea nesimetrică a componentelor semnalului modulat în cazul MA și MA-PS fiindcă la aceste tipuri de modulație spectrul semnalului este simetric.

● **Componente spectrale simetrice și antisimetrice.** Dacă $A_0 \cos \omega_0 t$ este purtătoarea, perechea de componente laterale (fig. 13.19):

$$\begin{matrix} A_1 \cos [(\omega_0 + \Omega) t + \varphi_1] \\ \text{și} \\ A_2 \cos [(\omega_0 - \Omega) t + \varphi_2] \end{matrix} \qquad (13.98)$$

se numesc simetrice dacă:

$$A_1 = A_2 \qquad \varphi_1 = -\varphi_2 \qquad (13.99)$$

și se numesc antisimetrice dacă

$$A_1 = A_2 \qquad \varphi_1 = -\varphi_2 + \pi \qquad (13.100)$$

În legătură cu componentele laterale menționăm următoarele proprietăți:

1. *Însumarea unor componente simetrice cu purtătoarea dă un semnal modulat în amplitudine* (fig. 13.19, *a*)

$$s(t) = A_0 \cos \omega_0 t + A_1 \cos [(\omega_0 + \Omega) t + \varphi_1] + A_1 \cos [(\omega_0 - \Omega) t - \varphi_1] \qquad (13.101)$$

sau

$$s(t) = A_0 \cos \omega_0 t + 2A_1 \cos (\Omega t + \varphi_1) \cos \omega_0 t \qquad (13.102)$$

sau

$$s(t) = A_0 [1 + \alpha \cos (\Omega t + \varphi_1)] \cos \omega_0 t \qquad (13.103)$$

unde $\alpha = \frac{2A_1}{A}$ este *gradul de modulație.*

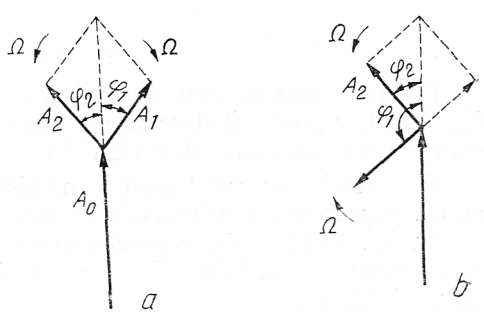


Fig. 13.19. Însumarea de componente: *a* — simetrice; *b* — antisimetrice.

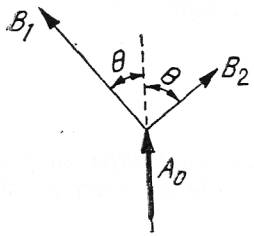


Fig. 13.20. Însumarea de componente nesimetrice

Din relația (13.102) se vede că ultimul termen reprezintă o componentă în fază cu purtătoarea, care însumată cu purtătoarea produce modulația în amplitudine.

2. *Însumarea purtătoarei cu o pereche de componente antisimetrice dă naștere unui semnal cu amplitudine variabilă și cu fază variabilă*

$$s(t) = A_0 \cos \omega_0 t + A_1 \cos [(\omega_0 + \Omega)\, t + \varphi_1] - \\ - A_1 \cos [(\omega_0 - \Omega)\, t - \varphi_1] \qquad (13.104)$$

sau

$$s(t) = A_0 \cos \omega_0 t - 2A_1 \sin (\Omega t + \varphi_1) \sin \omega_0 t \qquad (13.105)$$

Termenul al doilea din relația (13.105) reprezintă componenta în cuadratură cu purtătoarea (fig. 13.19, *b*). Componenta în cuadratură este cauza variației fazei semnalului rezultant.

3. *Orice distribuție nesimetrică de benzi laterale poate fi considerată ca suma unor componente simetrice și a unor componente antisimetrice.*

Să considerăm perechea de componente laterale nesimetrice:

$$B_1 \cos [(\omega_0 + \Omega)\, t + \theta] \qquad (13.106)$$

$$B_1 \cos [(\omega_0 - \Omega)\, t - \theta] \qquad (13.107)$$

unde $B_1 \neq B_2$ (fig. 13.20).

Suma acestor componente poate fi descompusă într-o sumă de componente simetrice și o sumă de componente antisimetrice:

$$B_1 \cos [(\omega_0 + \Omega)\, t + \theta] + B_2 \cos [(\omega_0 - \Omega)\, t - \theta] = \\ = A_s \cos [(\omega_0 + \Omega)\, t + \varphi_s] + A_s \cos [(\omega_0 - \Omega)\, t - \varphi_s] + \\ + A_a \cos [(\omega_0 + \Omega)\, t + \varphi_a] - A_a \cos [(\omega_0 - \Omega)\, t - \varphi_a] \qquad (13.108)$$

unde A_s reprezintă amplitudinea componentelor simetrice și A_a a celor antisimetrice.

Din relația (13.108) se obține:

$$A_s = \frac{1}{2} (B_1 + B_2) \qquad (13.109)$$

$$A_a = \frac{1}{2} (B_1 - B_2) \qquad (13.110)$$

$$\varphi_s = \varphi_a \qquad (13.111)$$

Ținînd seama de cele de mai sus, o distribuție nesimetrică ca cea din fig. 13.21, *a* poate fi descompusă în componente simetrice (fig. 13.21, *b*), și componente antisimetrice (fig. 13.21, *c*).

Să considerăm cazul unei transmisiuni cu o bandă laterală parțial suprimată, reprezentată schematic în fig. 13.22, *a*.

În fig. 13.22, *b* sînt reprezentate componentele simetrice, iar în fig. 13.22, *c* componentele antisimetrice. Se vede că suma lor dă spectrul inițial (fig. 13.22, *a*).

La rîndul lor, componentele simetrice pot fi descompuse în componente de aceeași amplitudine (fig. 13.22, *d* și *e*).

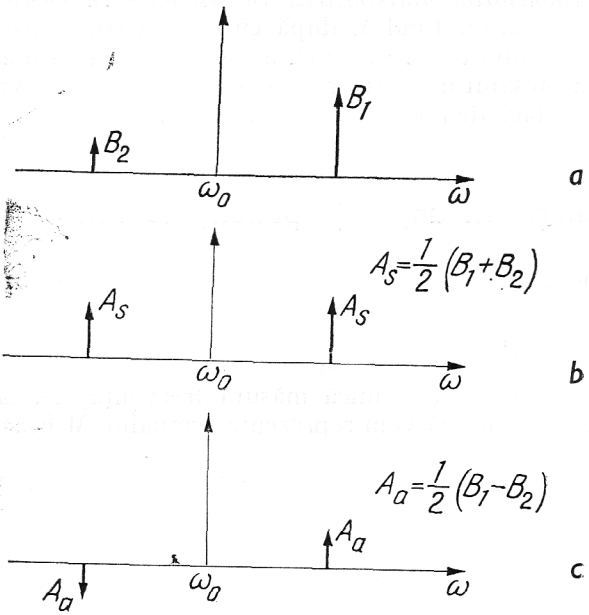


Fig. 13.21. Descompunerea în componente simetrice și antisimetrice, a unor componente.

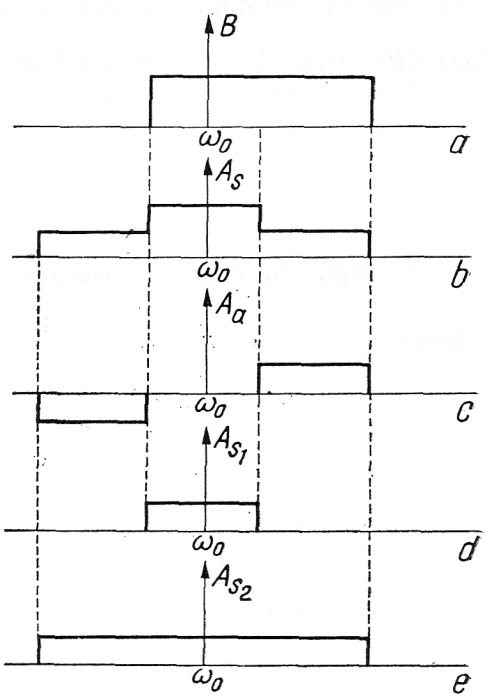


Fig. 13.22. Descompunerea în componente simetrice și antisimetrice.

Prezența componentelor antisimetrice în sistemele cu modulație de amplitudine produce distorsiuni fiindcă, după cum s-a văzut, apare o variație a fazei semnalului rezultant care face ca amplitudinea acestuia să nu mai fie proporțională cu mesajul modulator. Această afirmație este valabilă în toate cazurile în care se face demodularea de anvelopă.

13.2. Modulația în unghi (exponențială M.E)

Modulația în unghi — respectiv în frecvență, M.F., sau în fază M.Φ. este o *modulație neliniară*. Ea are avantajul că *permite o amplificare de putere cu dispozitive neliniare*, din cauză că parametrul amplitudine nu transmite informație. Pentru aceleași motive și *stabilitatea la perturbații este mai bună*, perturbațiile modificînd într-o mică măsură frecvența sau faza semnalului transmis. În cele ce urmează vom reprezenta semnalul M.E. sub formă exponențială:

$$s(t) = E_0 \, e^{j\psi(t)} \tag{13.112}$$

unde:

$$\psi(t) = \omega_0 t + k_\varphi m(t) \tag{13.113}$$

în cazul modulației de fază M.Φ și

$$\psi(t) = \omega_0 t + k_f \int_0^t m(x)\, dx \tag{13.114}$$

în cazul modulației de frecvență M.F.

În continuare vom considera sensibilitățile modulatoarelor k_φ și k_f egale cu 1.

În cazul M.Φ. faza $\psi(t)$ variază liniar cu mesajul $m(t)$, iar în cazul M.F. frecvență instantanee variază liniar cu mesajul

$$\omega_i = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + m(t) \tag{13.115}$$

13.2.1. Modulația în unghi cu mesaj sinusoidal

Să considerăm mesajul:

$$m(t) = M \cos \Omega t \tag{13.116}$$

unde $\Omega \ll \omega_0$.

Deviația maximă a fazei o notăm cu:

$$\Delta\varphi = k_\varphi M = M \tag{13.117}$$

iar deviația maximă a frecvenței cu:

$$\Delta\omega = k_f M = M \tag{13.118}$$

Cu aceste notații, semnalul modulat în fază este:

$$s_\varphi(t) = E_0 \, e^{j(\omega_0 t + \Delta\varphi \cos \Omega t)} \tag{13.119}$$

și

$$s_f(t) = E_0 e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t\right)} \tag{13.120}$$

Dacă notăm cu β *indicele de modulație*, în cazul M.Φ. avem $\beta = \Delta\varphi$, iar în cazul M.F. $\beta = \dfrac{\Delta\omega}{\Omega}$.

Cu această notație, semnalul:

$$s(t) = E_0 \, e^{j\omega_0 t} \, e^{j\beta \sin\theta} \tag{13.121}$$

este un semnal M.Φ dacă $\theta = \Omega t + \dfrac{\pi}{2}$

și este un semnal M.F, dacă $\theta = \Omega t$.

Dacă se ține seama de expresia funcției generatoare a funcțiilor Bessel

$$e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \, z^n \tag{13.122}$$

unde $J_n(x)$ este funcția Bessel de speța I și de ordin n, și dacă se face înlocuirea $z = e^{j\theta}$ se obține:

$$e^{jx \sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \, e^{j\theta n} \tag{13.123}$$

Ținînd seama de relația (13.123), relația (13.121) devine, înlocuind $x = \beta$;

$$s(t) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \, e^{j(\omega_0 t + n\theta)} \tag{13.124}$$

unde:

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n \, J_n(\beta) \tag{13.125}$$

În cazul M.Φ., $\theta = \Omega t$ iar:

$$s_\varphi(t) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \, e^{j(\omega_0 + n\Omega)\, t} \tag{13.126}$$

iar în cazul M.F., $\theta = \Omega t + \dfrac{\pi}{2}$ iar

$$s_f(t) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \, e^{j\left[(\omega_0 + n\Omega)\, t + n\frac{\pi}{2}\right]} \tag{13.127}$$

În fig. 13.23 sînt prezentate funcțiile Bessel de speța I în funcție de argumentul β.

Examinînd această figură constatăm că pentru un anumit indice de modulație β_0 purtătoarea se anulează, iar pe măsură ce ordinul n crește $J_n(\beta)$ scade, adică scad componentele laterale din spectrul semnalului M.Φ. sau M.F.

Ținînd seama de micșorarea componentelor laterale, lărgimea de bandă ocupată de semnalul modulat în unghi poate fi considerată cu mare aproximație, ca fiind:

$$B = 2(\beta + 1)\Omega \tag{13.128}$$

Dacă $\beta \gg 1$ avem

$$B = 2\beta\Omega \tag{13.129}$$

care în cazul M.Φ. devine $B = 2\Delta\varphi\Omega$, iar în cazul M.F. devine $B_f = 2\Delta\omega$.

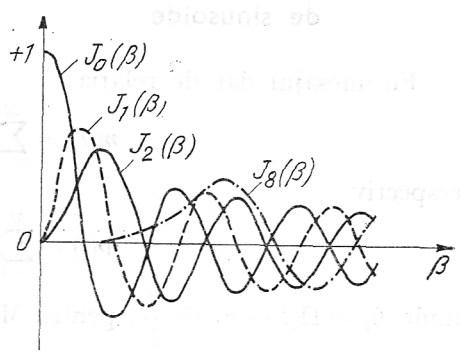


Fig. 13.23. Variația funcțiilor Bessel cu indicele de modulație.

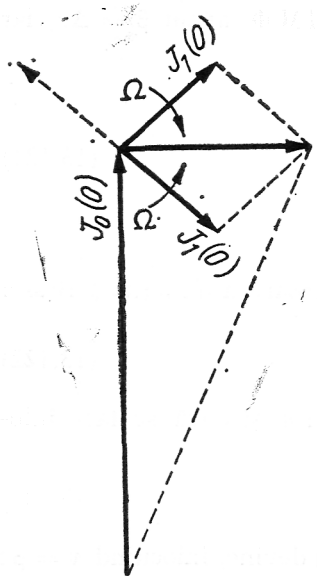


Fig. 13.24. Modulația în unghi cu două componente laterale.

Dacă pentru Ω_M, cea mai înaltă frecvență pe care voim să o transmitem, avem aceeași lărgime de bandă pentru ambele tipuri de modulație, $2\Delta\omega = 2\Delta\varphi\Omega_M$, rezultă că pentru $\Omega < \Omega_M$, $B_\varphi < B_f$; cu alte cuvinte în acest caz semnalul M.Φ. nu ocupă toată lărgimea de bandă disponibilă ($2\Delta\varphi\Omega_M$) fapt care este un dezavantaj deoarece zgomotul ocupă în permanență această lărgime de bandă, deci *raportul semnal/zgomot în cazul M.Φ. este mai redus decît în cazul M.F.*

Spre deosebire de modulația liniară, la *modulația exponențială puterea semnalului modulat este constantă*:

$$P = \widetilde{s^2(t)} = \frac{E_0^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = \frac{E_0^2}{2} \qquad (13.130)$$

relație care rezultă din ortogonalitatea funcțiilor exponențiale și din relația (13.122) pentru $z = 1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \qquad (13.131)$$

● **Modulația în unghi cu indice de modulație mic.** Dacă indicele de modulație $\beta \ll 1$, *lărgimea de bandă a semnalului modulat în unghi devine*:

$$B = 2\Omega \qquad (12.132)$$

adică *aceeași ca și în cazul M.A., cu deosebirea că una din cele două componente laterale este decalată cu π față de cazul M.A.* (fig. 13.24).

Pentru valori foarte mici ale lui β relația (13.124) devine:

$$s(t) = E_0[J_0(0) + J_1(0)\, e^{j\theta} - J_1(0)\, e^{-j\theta}]\, e^{j\omega_0 t} \qquad (13.133)$$

care justifică relațiile de fază din fig. 13.23.

13.2.2. Modulația în unghi cu un mesaj format dintr-o sumă de sinusoide

Fie mesajul dat de relația:

$$m(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k) \qquad (13.134)$$

respectiv

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{M} \beta_k \sin\theta_k \qquad (13.135)$$

unde $\theta_k = \Omega_k t + \varphi_k + \frac{\pi}{2}$, pentru M.Φ.

și

$\theta_k = \Omega_k t + \varphi_k$, pentru M.F.

Înlocuind pe $\theta(t)$ se obține:

$$s(t) = E_0 \, e^{\omega j_0 t} \, e^{j \sum_{k=1}^{M} \beta_k \sin \theta_k} \tag{13.136}$$

sau:

$$s(t) = E_0 \, e^{j\omega_0 t} \prod_{k=1}^{M} \left[\sum_{n_k=-\infty}^{\infty} J_{n_k}(\beta_k) \, e^{j n_k \theta_k} \right] \tag{13.137}$$

Din analiza acestei expresii se poate vedea că spectrul semnalului ME în acest caz este extrem de complex, intervenind pe lîngă armonicele frecvențelor de modulație toate combinațiile posibile de forma $\pm n_1\Omega_1 \pm \pm n_2\Omega_2 \pm$, unde n_1, n_2 ... etc. pot fi orice numere întregi. În acest caz, spectrul semnalului în general nu este simetric față de frecvența purtătoare. *În spectrul semnalului ME apar atît componente simetrice cît și componente antisimetrice.* Cînd are loc o modulație complexă poate să apară o însumare de componente simetrice cu componente antisimetrice, din care să rezulte componentele nesimetrice.

O componentă laterală oarecare din relația (13.137) are amplitudinea:

$$A = J_{n_1}(\beta_1) \, J_{n_2}(\beta_2) \ldots J_{n_M}(\beta_M) \tag{13.138}$$

și este situată față de purtătoare la un ecart egal cu

$$\Omega = n_1\Omega_1 + n_2\Omega_2 + \ldots + n_M\Omega_M \tag{13.139}$$

Cu aproximație se poate considera că cele mai mari valori ale indicilor n_k din relația (13.138) sînt

$$n_k = \beta_k + 1 \tag{13.140}$$

Pentru valori mai mari ale indicilor n_k, amplitudinile corespunzătoare pot fi neglijate.

Dat fiind că n_k dați de relația (13.140) sînt cei mai mari indici ce trebuie luați în considerare, cu totul aproximativ se poate spune că lărgimea de bandă este:

$$B = 2\sum_{k=1}^{M} n_k\Omega_k = 2\sum_{k=1}^{M} (\beta_k + 1)\Omega_k = \sum_{k=1}^{M} B_k \tag{13.141}$$

adică *lărgimea de bandă este aproximativ egală cu suma lărgimilor de bandă obținute dacă se modulează succesiv cu componentele mesajului.*

13.2.3. Modulația în frecvență cu mesaje continue

Pentru transmisiunea cu mare fidelitate a mesajelor continue se utilizează aproape în exclusivitate modulația de frecvență (M.F.) deoarece permite utilizarea unor amplificatoare de putere cu caracteristică amplitudine intrare — amplitudine ieșire, neliniară și are o mare stabilitate la perturbații. *Modulația în fază*, pentru motivele arătate în § 13.2.1, are o stabilitate mai mică la perturbații și *nu este în general utilizată la transmisiuni de mesaje continue.* Ea este însă extensiv folosită la transmisiuni de date.

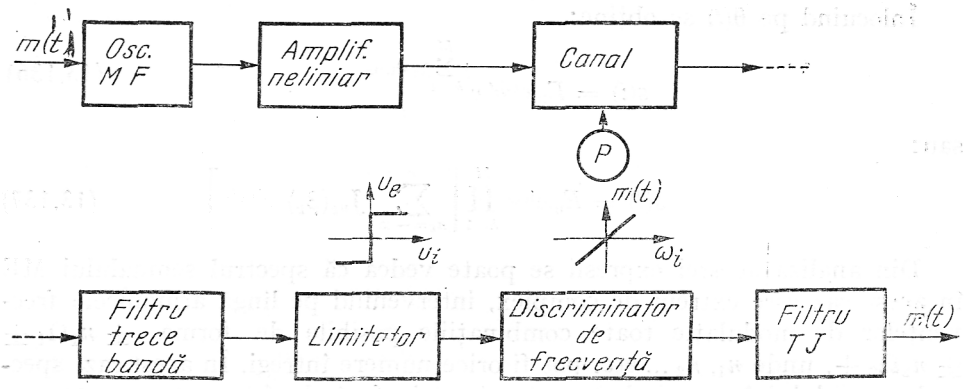


Fig. 13.25. Sistem de transmisiune cu MF.

În fig. 13.25 este reprezentat lanțul de transmisiune al unui sistem cu M.F., în care sînt arătate și caracteristicile idealizate ale limitatorului și ale discriminatorului.

În legătură cu acest sistem de transmisiune, vom studia problema distorsiunilor și problema perturbațiilor.

13.2.3.1. Distorsiuni în sistemele cu M.F.

Notăm cu $H(\omega_0)$ funcția de transfer a sistemului de la ieșirea din oscilatorul M.F. la intrarea în discriminator, echivalentă cu un filtru trece-bandă. Dacă lărgimea de bandă a lui $H(\omega)$ este suficient de mare ca să nu atenueze componente importante ale semnalului M.F., putem spune că ne găsim în regim cuazistaționar. În acest caz, răspunsul sistemului la un semnal M.F. se obține înlocuind frecvența fixă ω_0 cu frecvența instantanee ω, variabilă în timp în funcție de mesaj.

Fie $u(t)$ semnalul la intrarea în $H(\omega)$:

$$u(t) = e^{j\int_0^t \omega(x)\,dx} \tag{13.142}$$

dacă:

$$H(\omega) = \rho(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} \tag{13.143}$$

atunci semnalul la ieșire va fi:

$$v(t) = \rho(\omega)\, e^{j\left[\int_0^t \omega(x)\,dx + \varphi(\omega)\right]} \tag{13.144}$$

Fiindcă demodularea se face prin evaluarea frecvenței instantanee (mesajul la ieșire din demodulator este proporțional cu frecvența instantanee a lui $y(t)$), vom calcula frecvența instantanee a lui $v(t)$.

$$\omega_i = \omega + \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}\,\frac{d\omega}{dt} \tag{13.145}$$

sau notînd cu $\tau = \dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ timpul de tranzit și scoțînd în evidență că ω este variabil, $\omega = \omega_0 + m(t)$ se obține:

$$\omega_i = \omega_0 + m(t) + \tau\frac{dm(t)}{dt} \tag{13.146}$$

Din această relație se vede că dacă τ este constant, nu se introduc distorsiuni neliniare.

Pentru a evalua distorsiunile liniare, într-un caz simplu, considerăm că $m(t) = \Delta\omega \cos \Omega t$. În acest caz avem:

$$\omega_i = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t + \Delta\omega \cdot \tau \cdot \Omega \sin \Omega t \tag{13.147}$$

Se vede că dacă $\tau\Omega \ll 1$ distorsiunile liniare sînt neglijabile. Condiția $\tau\Omega \ll 1$ este una din condițiile de lucru în regim cuazistaționar.

În concluzie putem afirma că *dacă în domeniul de frecvență în care semnalul M.F. are componente importante* (adică în banda de frecvențe $B = 2(\beta + 1)\Omega_M \cong 2\Delta\omega$, *faza funcției de transfer variază liniar cu frecvența, nu vom avea distorsiuni.* Această cerință se realizează în practică mult mai ușor decît o liniaritate a caracteristicei de amplitudine.

Urmează acum să vedem în ce condiții nu se introduc distorsiuni în procesul de demodulare. Să presupunem că avem un circuit care are funcția de transfer:

$$D(\omega) = \rho(\omega)\, e^{jk} \tag{13.148}$$

unde: $\dfrac{d\rho(\omega)}{d\omega} = C$, este o mărime constantă, iar fază este constanta k.

Dacă $\omega = \omega_0 + m(t)$, dezvoltînd în serie avem:

$$D(\omega) = D(\omega_0) + m(t)\, D'(\omega_0) = D(\omega_0)\left[1 + m(t)\frac{D'(\omega_0)}{D(\omega_0)}\right] \tag{13.149}$$

fiindcă derivatele de ordin superior ale lui $D(\omega)$ sînt nule.

Notînd $\dfrac{D'(\omega_0)}{D(\omega_0)} = K$, mărime constantă, avem:

$$D(\omega) = D(\omega_0)\,[1 + Km(t)] \tag{13.150}$$

Dacă la intrarea circuitului aplicăm semnalul M.F. care are ca frecvență instantanee pe $\omega = \omega_0 + m(t)$, la ieșire se obține:

$$y(t) = D(\omega)\, e^{j\left[\omega_0 t + \int_0^t m(x)\,dx\right]} \tag{13.151}$$

respectiv:

$$y(t) = D(\omega_0)\,[1 + Km(t)]\, e^{j\left[\omega_0 t + \int_0^t m(x)\,dx + k\right]} \tag{13.152}$$

Acest semnal este aplicat unui detector liniar de amplitudine, care nefiind sensibil la variații de fază, dă la ieșire un semnal proporțional cu $m(t)$, deci se recuperează semnalul fără nici un fel de distorsiune. Un astfel de demodulator se numește *discriminator liniar.*

În concluzie putem spune că *pentru a avea distorsiuni cît mai mici în procesul de demodulare, demodulatorul real trebuie să se apropie cît mai mult de discriminatorul liniar ideal* care are o funcție de transfer cu un modul care variază liniar cu frecvența și o fază constantă și care este urmat de un detector liniar de amplitudine. Pentru a menține constantă amplitudinea semnalului aplicat discriminatorului, acesta este totdeauna precedat de un limitator.

13.2.3.2. Perturbații în sistemele cu M.F.

În cele ce urmează vom examina perturbațiile produse de interferențe de zgomotul de fluctuații și de zgomotul de impulsuri.

● **Perturbațiile produse de interferențe.** Presupunem pentru început că semnalul util cît și perturbația nu sînt modulate. În acest caz semnalul recepționat este:

$$r(t) = E_0 \, e^{j\omega_1 t} + A \, e^{j\omega_2 t} \tag{13.153}$$

unde primul termen reprezintă semnalul util, iar al doilea, semnalul perturbator.

Ținînd seama de cele stabilite în § 13.1.6.1, și anume de relațiile (13.75) și (13.76) în care punem: $a = \dfrac{A}{E_0}$ și $A_1 = E_0$, avem:

$$r(t) = A(t) \, e^{j(\omega_1 t + \theta)} \tag{13.154}$$

Fiindcă $a \ll 1$ relația (13.74) poate fi scrisă:

$$\theta = a \sin \omega_\Delta t \tag{13.155}$$

unde $\omega_\Delta = \omega_2 - \omega_1$.

Dar discriminatorul nu sesizează decît frecvența instantanee a semnalului recepționat $r(t)$:

$$\omega_i = \omega_1 + a\omega_\Delta \cos \omega_\Delta t \tag{13.156}$$

Rezultă că *perturbația produsă de o interferență este cu atît mai mare cu cît* ω_Δ*este mai mare. Dacă însă* $\omega_\Delta > \Omega_M$, cea mai înaltă frecvență din spectrul mesajului, respectiv frecvența de tăiere a filtrului trece-jos de la ieșire, *perturbația la ieșire este nulă.*

Dacă semnalul util este modulat $\omega_1 = \omega_0 + m(t)$ iar perturbația are valoarea maximă, atunci frecvența instantanee, respectiv semnalul la ieșire (considerînd sensibilitatea discriminatorului egală cu unu) este:

$$\omega_i = \omega_0 + m(t) + a\Omega_M \cos \Omega_M t \tag{13.157}$$

Raportul semnal/perturbație este:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{\widetilde{m^2(t)}}{\widetilde{(a\Omega_M \cos \Omega_M t)^2}} = \frac{2\widetilde{m^2(t)}}{a^2\Omega_M^2} \tag{13.158}$$

sau considerînd un mesaj sinusoidal $m(t) = \Delta\omega \cos \Omega t$ avem:

$$\left(\frac{S}{P}\right) = \left(\frac{\Delta\omega}{\Omega_M}\right)^2 \left(\frac{E_0}{A}\right)^2 = \beta_M^2 \left(\frac{E_0}{A}\right)^2 \tag{13.159}$$

indicele de modulație β_M fiind în general mult mai mare decît unu, *se obține un raport semnal/perturbație mult mai mare decît în cazul M.A.*

Faptul că perturbația crește cu diferența de frecvență ω_Δ face ca *metoda accentuării și dezaccentuării a frecvențelor înalte să fie foarte eficientă la M.F.*

La emisie componentele înalte ale mesajului sînt accentuate (fig. 13.26), iar la recepție sînt dezaccentuate, astfel încît să nu se distorsioneze semnalul util.

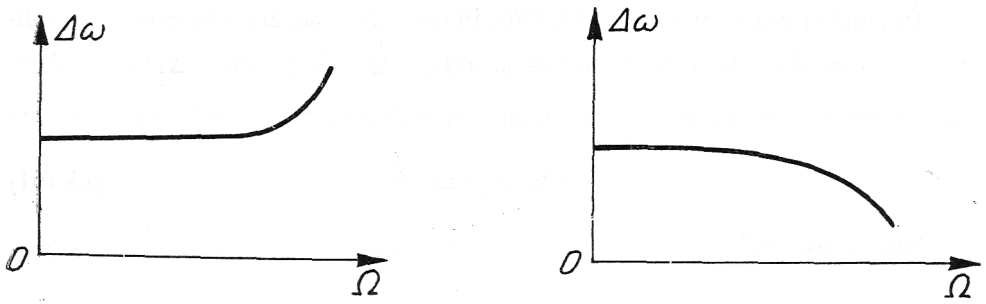


Fig. 13.26. Caracteristicile de accentuare și de dezaccentuare.

Perturbațiile care pătrund în canal, la recepție, vor fi atenuate de dispozitivul de dezaccentuare, mărindu-se în felul acesta raportul semnal/perturbație.

● **Perturbațiile produse de zgomotul de fluctuații.** Presupunem că zgomotul de fluctuații la intrarea în receptor are o densitate de puere constantă $p(\omega) = N_0$ și vom face apel la rezultatele obținute mai sus. În acest scop notăm $\omega_\Delta = \Omega$ și considerăm că zgomotul de la intrare, produs în jurul frecvenței $\omega_0 + \Omega$ și $\omega_0 - \Omega$ în intervalul $\delta\Omega$ (fig. 13.27) este echivalent cu o interferență de aceeași putere:

$$\frac{1}{2} A^2 = 2Z_0 \delta(\Omega) \tag{13.160}$$

unde multiplicarea cu 2 provine din faptul că toate componentele la o distanță $\pm\Omega$ de frecvența centrală ω_0 au efecte care se însumează

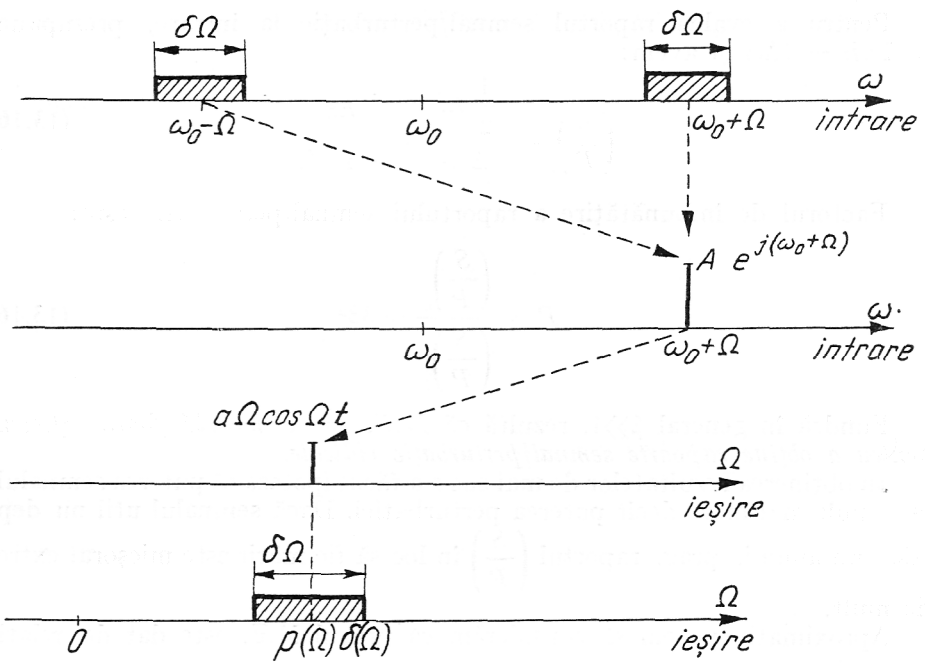


Fig. 13.27. Echivalarea zgomotului de fluctuații cu interferențe elementare.

În conformitate cu relația (13.156), în care $\omega_1 = \omega_0$, interferența de amplitudine A produce la ieșire perturbația $a\Omega \cos \Omega t$, de putere: $\Delta P = \frac{1}{2} a^2\Omega^2$, care poate fi echivalentă cu un zgomot cu o D.S.P. $p(\Omega)$, astfel încît avem:

$$\frac{1}{2} a^2\Omega^2 = p(\Omega)\delta(\Omega) \tag{13.161}$$

Din această relație și din relația (13.160) ținînd seama că $a = \frac{A}{E_0}$ se obține

$$p(\Omega) = \frac{2Z_0}{E_0^2}\Omega^2 \tag{13.162}$$

Puterea zgomotului în întreaga lărgime de bandă Ω_M de la ieșire este:

$$P = \frac{2Z_0}{E_0^2}\int_0^{\Omega_M} \Omega^2 \, d\Omega = \frac{2}{3}\frac{Z_0}{E_0^2}\Omega_M^3 \tag{13.163}$$

Raportul $\left(\frac{S}{P}\right)$ la ieșire este:

$$\left(\frac{S}{P}\right)_e = \frac{3}{2}E_0^2\frac{\widetilde{m^2(t)}}{Z_0\Omega_M^3} \tag{13.164}$$

Considerînd $m(t) = \Delta\omega \cos \Omega t$, avem:

$$\left(\frac{S}{P}\right)_e = 3\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega_M}\right)^2\frac{E_0^2}{4Z_0\Omega_M} = 3\beta_M^2\frac{E_0^2}{4Z_0\Omega_M} \tag{13.165}$$

Pentru a evalua raportul semnal/perturbație la intrare, presupunem că $2\pi B = 2\Delta\omega$ și avem:

$$\left(\frac{S}{P}\right)_i = \frac{\frac{1}{2}E_0^2}{2\Delta\omega Z_0} = \frac{E_0^2}{4\Delta\omega Z_0} \tag{13.166}$$

Factorul de îmbunătățire a raportului semnal/perturbație este:

$$P = \frac{\left(\frac{S}{P}\right)_e}{\left(\frac{S}{P}\right)_i} = 3\beta^2 \tag{13.167}$$

Fiindcă în general $\beta \gg 1$, rezultă că *M.F. este o metodă foarte eficientă pentru a obține rapoarte semnal/perturbație ridicate.*

În obținerea rezultatelor de mai sus s-a făcut ipoteza că puterea semnalului este mult mai mare decît puterea perturbației. Dacă semnalul util nu depășește un anumit prag, raportul $\left(\frac{S}{P}\right)$ în loc să fie mărit este micșorat extrem de mult.

Aproximativ putem să considerăm că pragul M.F. este dat de relația:

$$P_S = kP_N \tag{13.168}$$

respectiv:

$$P_S = \frac{1}{2} E_0^2 = 2Z_0 \Delta\omega_k$$

unde P_N este puterea zgomotului, iar $k \approx 10$.

Pentru $P_S < 10 P_N$ *perturbațiile la ieșire cresc foarte mult.*

● **Perturbațiile date de zgomotul de impulsuri.** În conformitate cu cele stabilite în § 7.19.3, relația (7.306), receptorul poate fi considerat un filtru ideal trece-bandă, dacă la intrarea lui avem zgomot de impulsuri. Rezultă că *dacă receptorul este acordat simetric,* astfel încît frecvența centrală ω_0 să coincidă cu frecvența de nul a discriminatorului, *perturbația* $\zeta(t)$, *de frecvență* ω_0 *în cazul ideal, nu va produce nici un semnal la ieșirea din demodulator.*

13.2.3.3. Metode de demodulare care reduc pragul în M.F.

Modulația în frecvență este eficientă numai dacă semnalul depășește un anumit prag care depinde de zgomotele din canal. Printre metodele de reducere a acestui prag, cele mai utilizate sînt: sistemul cu compresie de spectru prin reacție negativă și sistemul cu buclă cu calare de fază (PLL).

● **Sistemul cu compresie de spectru** este arătat în fig. (13.28), unde s-au reprezentat și semnalele utile, zgomotul fiind omis în scopul simplificării expunerii principiului de funcționare. Prezența limitatorului ne permite să considerăm toate amplitudinile egale cu „1".

Semnalul util la intrare, considerînd $m(t) = \Delta\omega \cos \Omega t$ este:

$$s(t) = e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t\right)} \tag{13.169}$$

Semnalul cu care se face mixarea este

$$s_M(t) = e^{-j\left[(\omega_0 - \omega_i)t - \frac{k\Delta\omega'}{\Omega}\right]} \tag{13.170}$$

unde: ω_i este frecvența intermediară, adică frecvența centrală a amplificatorului; $k = k_1 k_2$; k_1 fiind sensibilitatea discriminatorului, iar k_2 fiind sensibilitatea oscilatorului M.F.

$e^{j(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t)}$ $\qquad$ $e^{j\left[\omega_i t + \frac{\Delta\omega'}{\Omega} \sin \Omega t\right]}$

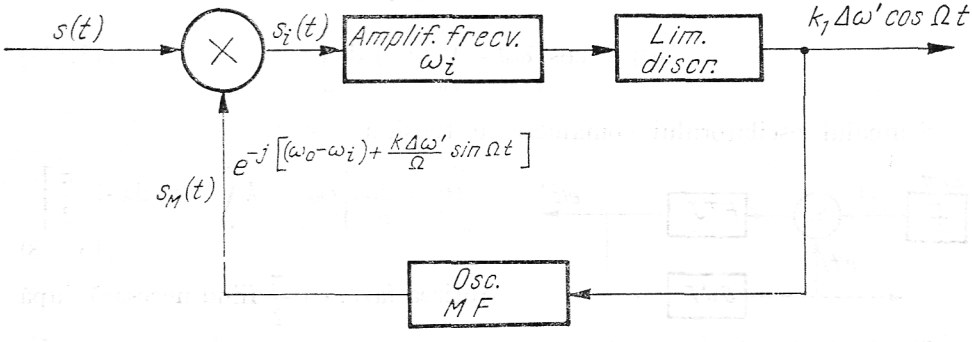


Fig. 13.28.

Semnalul de frecvență intermediară este:

$$s_i(t) = e^{j\left(\omega_i t + \frac{\Delta\omega'}{\Omega}\sin\Omega t\right)} \tag{13.171}$$

$\Delta\omega'$ fiind deviația de frecvență ce provine din comprimarea lui $\Delta\omega$ prin reacția negativă realizată de oscilatorul modulat în frecvență.

Fiindcă

$$s_i(t) = s(t)\, s_M(t) \tag{13.173}$$

avem

$$\Delta\omega - k\Delta\omega' = \Delta\omega' \tag{13.173}$$

respectiv

$$\Delta\omega' = \frac{\Delta\omega}{1+k} \tag{13.174}$$

Rezultă că *deviația de frecvență a semnalului la intrare este comprimată de* $1+k$ *ori și deci și lărgimea de bandă a receptorului, respectiv a amplificatorului de frecvență intermediară, este comprimată în același raport*:

$$B' = \frac{B}{1+k} \tag{13.175}$$

Dacă se analizează sistemul cu reacție negativă în prezența zgomotului, se constată că *raportul semnal/perturbație la ieșire este același ca și în cazul fără reacție negativă, dar pragul este micșorat.*

● **Sistemul cu buclă cu calare de fază** (P.L.L.) este arătat în fig. 13.29. El se compune dintr-un multiplicator, dintr-un filtru trece-jos și dintr-un oscilator comandat în tensiune O.C.T.

Oscilatorul comandat în tensiune este definit de relația:

$$\omega_e = \omega_0 + ke(t) \tag{13.176}$$

unde ω_e este frecvența instantanee a oscilatorului, ω_0 este frecvența liberă (pentru $e(t) = 0$), $e(t)$ este tensiunea de comandă, iar k este sensibilitatea O.C.T.

Semnalul la intrare în demodulator (neglijînd zgomotul) este:

$$s(t) = \cos\left[\omega_0 t + \int_0^t m(x)\,\mathrm{d}x\right] \tag{13.177}$$

Semnalul oscilatorului comandat în tensiune este:

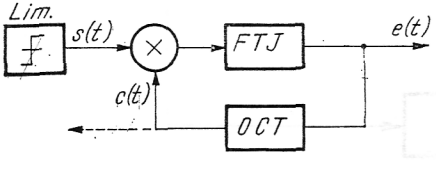


Fig. 13.29. Demodulator cu PLL.

$$c(t) = \cos\left[\omega_0 t + k\int_0^t e(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\right] \tag{13.178}$$

(rotirea fazei cu $\frac{\pi}{2}$ fiind necesară după cum se va vedea în cele ce urmează)

Produsul $s(t)\,c(t)$, după eliminarea armonicei a doua (respectiv la ieşirea din filtru), este proporţional cu:

$$e(t) = \cos\left[\int_0^t m(x)\,\mathrm{d}x - k\int_0^t e(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\right] \tag{13.179}$$

sau:

$$e(t) = \sin\left[\int_0^t m(x)\,\mathrm{d}x - k\int_0^t e(x)\,\mathrm{d}x\right] \tag{13.180}$$

Dacă $e(t)$ *este foarte mic,* şi argumentul funcţiei sinus este foarte mic, putem scrie:

$$\int_0^t m(x)\,\mathrm{d}x - k\int_0^t e(x)\,\mathrm{d}x \cong 0 \tag{13.181}$$

respectiv

$$e(t) = \frac{1}{k}\,m(t) \tag{13.182}$$

deci *semnalul la ieşirea din F.T.J. al buclei P.L.L. este proporţional cu mesajul.* Lucrul acesta nu este surprinzător fiindcă $e(t)$, modulînd oscilatorul, trebuie să conţină informaţia din semnalul M.F. recepţionat.

În legătură cu acest tip de modulator trebuie să menţionăm că *prezenţa unui limitator la intrare,* care anulează toate variaţiile amplitudinii semnalului recepţionat, *îmbunătăţeşte mult raportul semnal/perturbaţie la ieşire.*

Filtrul trece-jos trebuie să aibă o lărgime de bandă egală cu Ω_M deoarece trebuie să permită transmiterea tuturor componentelor lui $e(t) = \frac{1}{k}\,m(t)$. Filtrul suprimă şi toate componentele de zgomot care se găsesc în afara benzii $2\Omega_M$ centrată pe frecvenţa ω_0.

Această reducere mare a zgomotului face ca *pragul, pe care trebuie să-l depăşească semnalul util, să fie foarte mic.* Valoarea acestui prag este la nivelul întîlnit la receptoarele M.F. convenţionale, în cazul ipotetic că acestea ar avea o lărgime de bandă de $2\Omega_M$ a amplificatorului de frecvenţă intermediară.

Raportul semnal/perturbaţie rămîne însă aproximativ acelaşi deoarece căderea zgomotului este însoţită de o micşorare a semnalului util (de k ori).

Eficacitatea circuitului P.L.L. ca detector a informaţiei conţinută în frecvenţă sau în fază provine în esenţă din faptul că el *efectuează o corelaţie mutuală de „termen scurt" între semnalul recepţionat şi cel produs local.* Semnalul util, plus zgomotul este multiplicat cu semnalul oscilatorului comandat în tensiune, iar filtrul trece-jos efectuează o operaţie de integrare de *„termen scurt"* — respectiv de durată mică.

13.2.4. M.F. utilizată în transmisiuni de date

În multe aplicaţii (telegrafie cu deviaţie de frecvenţă, modulaţie de impulsuri cu purtătoare modulată în frecvenţă etc.), semnalele transmise sînt impulsuri. În cele ce urmează se va trata cazul cel mai simplu, cînd se face modulaţie în frecvenţă cu impulsuri periodice dreptunghiulare, aşa cum se arată în fig. 13.30.

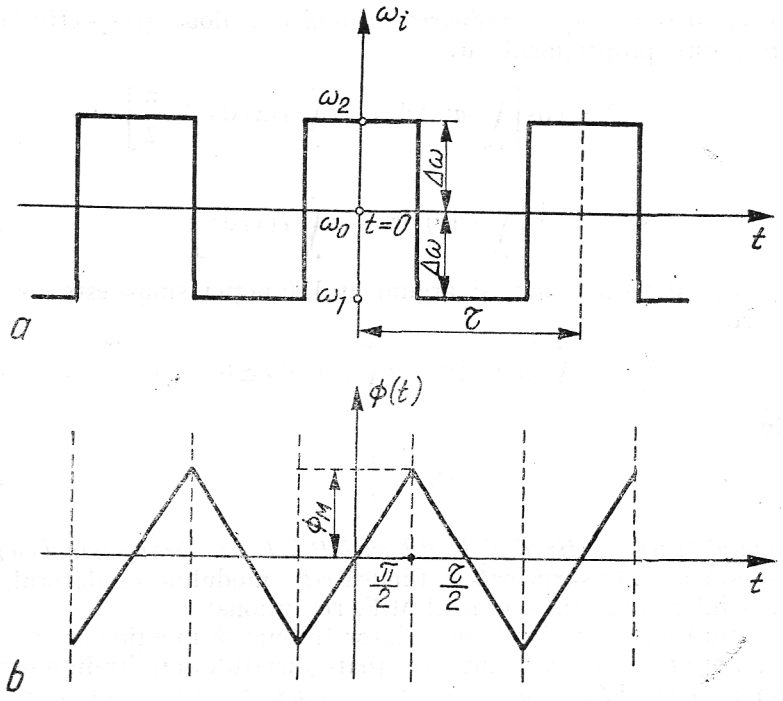


Fig. 13.30. MF cu deviație de frecvență.

Deviația de frecvență este $\Delta\omega$, frecvența de repetiție Ω, iar indicele de modulație $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$. Ținînd seama că variația semnalului modulator $m(t)$ este cea dată în fig. 13.30, *a*, expresia lui $\Phi(t)$ este (fig. 13.30)

$$\Phi(t) = \int_0^t m(\xi)\, d\xi \tag{13.183}$$

Însă

$$\left.\begin{aligned} m(t) &= \Delta\omega, \qquad \text{pentru } -\frac{\tau}{4} < t < \frac{\tau}{4} \\ m(t) &= -\Delta\omega \quad \text{pentru } \frac{\tau}{4} < t < \frac{3\tau}{4} \end{aligned}\right\} \tag{13.184}$$

și rezultă:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(t) &= \beta\Omega t, \qquad \text{pentru } -\frac{\tau}{4} < t < \frac{\tau}{4} \\ \Phi(t) &= \pi\beta - \beta\Omega t, \quad \text{pentru } \frac{\tau}{4} < t < \frac{3\tau}{4} \end{aligned}\right\} \tag{13.185}$$

Semnalul modulat este:

$$s(t) = E_0\, e^{j\omega_0 t}\, e^{j\Phi(t)} \tag{13.186}$$

Dezvoltînd în serie funcția periodică $\left(\text{de perioadă } \tau = \frac{2\pi}{\Omega}\right)$:

$$e^{j\Phi(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega t} \quad (13.187)$$

se obțin coeficienții:

$$C_n = \frac{\Phi_M}{\Phi_M + n\frac{\pi}{2}} \operatorname{sinc}\left(\Phi_M - n\frac{\pi}{2}\right) \quad (13.188)$$

unde: $\Phi_M = \beta\Omega\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}\beta$

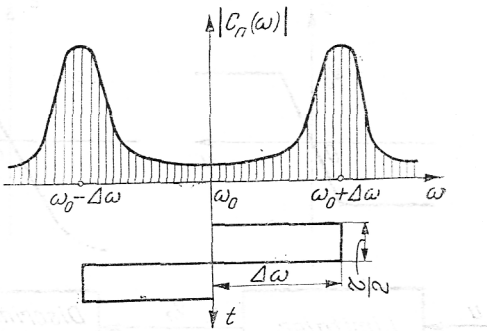


Fig. 13.31. Spectrul semnalului MF cu variație de frecvență.

Înlocuind se obține:

$$C_n = \frac{\beta}{\beta + n} \operatorname{sinc}\frac{\pi}{2}(\beta - n) \quad (13.189)$$

Deci semnalul dat de relația (13.186), ținînd seama de relația (13.188) și (13.189), este:

$$s(t) = E_0 e^{j\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\beta + n} \operatorname{sinc}\frac{\pi}{2}(\beta - n) e^{jn\Omega t} \quad (13.190)$$

După cum se vede din această relație, *componentele laterale sînt simetrice față de purtătoare și amplitudinile cele mai mari le au componentele pentru care* $n = \beta$. Frecvența acestor componente este $\omega_0 \pm n\Omega = \omega_0 \pm \beta\Omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$.

Rezultă că energia este concentrată în jurul frecvențelor $\omega_0 \pm \Delta\omega$, unde apare un regim aproape staționar (fig. 13.31).

Un spectru asemănător se obține și atunci cînd semnalul modulat este format dintr-o succesiune aleatoare de impulsuri rectangulare, respectiv cînd este o secvență de date:

$$s(t) = E_0 e^{j\left[\omega_0 t + \int_0^t d(x)\,dx\right]} \quad (13.191)$$

unde:

$$d(t) = \sum_n a_n p(t - nT) \quad (13.192)$$

$a_n = \pm 1$ corespunde secvenței de date, iar $p(t - nT)$ este un impuls rectangular de durată T și înălțime 1.

În acest caz binar spunem că avem de-a face cu o *modulație de frecvență „bivalentă"*.

13.2.4.1. **Demodularea semnalelor M.F. cu secvență de date**

Demodularea utilizată în acest scop este de mai multe tipuri, din care menționăm:

● **Demodularea cu discriminator liniar,** menționată în § 13.2.3.1, se obține utilizînd un circuit cu o funcție de transfer al cărei modul variază liniar cu

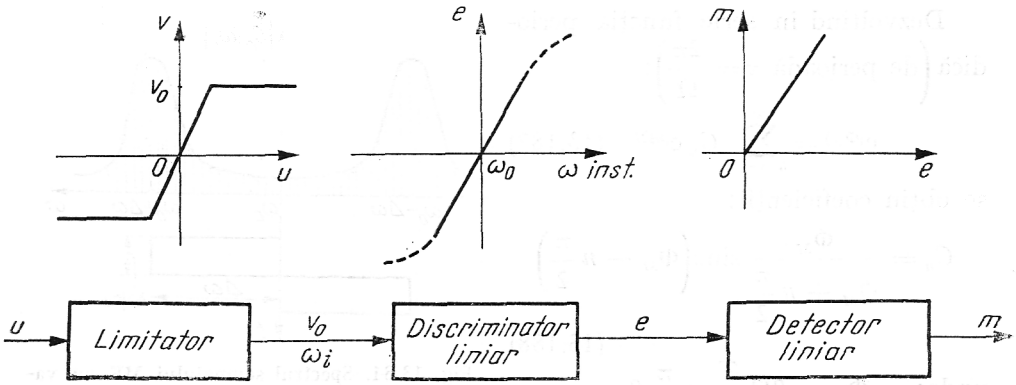


Fig. 13.32. Demodulator cu discriminator liniar.

frecvența, iar faza este constantă, și un detector liniar. Caracteristicile demodulatorului cu discriminator liniar sînt arătate în fig. 13.32.

● **Demodularea prin detectarea trecerilor prin zero,** aratată în fig. 13.33, se obține limitînd semnalul M.F. astfel că la ieșirea din limitator se obțin impulsuri de o durată egală cu perioada semnalului.

În succesiunea de intervale T se obțin impulsuri de durată diferită corespunzînd secvenței de date $\{-1, 1\}$, respectiv semnalelor de frecvență $\omega_0 - \Delta\omega$ și $\omega_0 + \Delta\omega$.

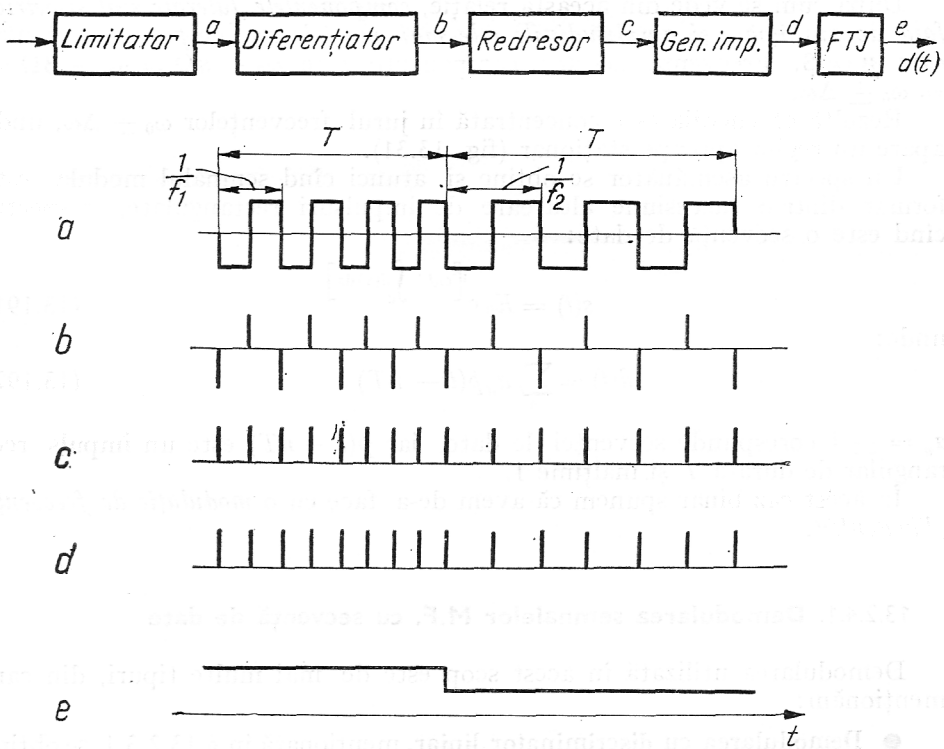


Fig. 13.33. Discriminator cu detectarea trecerilor prin zero.

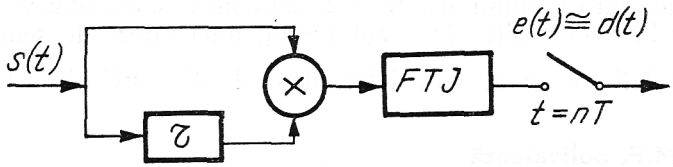


Fig. 13.34. Demodulator cu detector diferențial.

Pentru a obține impulsuri de aceeași durată, astfel încît în intervalele T să varieze numai numărul lor, se face o diferențiere apoi o redresare și cu impulsurile rezultate se comandă un generator de impulsuri de durată egală. Prin integrarea acestor impulsuri într-un filtru trece-jos se obține la ieșire un semnal direct proporțional cu frecvența semnalului aplicat la intrarea demodulatorului.

● **Demodularea cu detector diferențial** este arătată în fig. 13.34.

Semnalul recepționat este înmulțit cu replica sa întîrziată cu τ și apoi trecut printr-un filtru trece-jos.

Semnalul la intrare este:

$$s(t) = \cos\left[\omega_0 t + \int_0^t d(x)\,\mathrm{d}x\right] \tag{13.193}$$

Întîrziat cu τ este:

$$s(t-\tau) = \cos\left[\omega_0(t-\tau) + \int_0^{t-\tau} d(x)\,\mathrm{d}x\right] \tag{13.194}$$

Făcînd produsul $s(t)\,s(t-\tau)$ și eliminînd armonica a doua se obține

$$e(t) = \cos\left[\omega_0\tau + \int_{t-\tau}^{t} d(x)\,\mathrm{d}x\right] \tag{13.195}$$

dacă $\omega_0\tau = \dfrac{\pi}{2}$, aproximînd sinusul cu arcul, în cazul în care este foarte mic, se obține:

$$e(t) \cong d(t) \tag{13.196}$$

Acest tip de demodulator *dă rezultate bune în canalele cu dispersie mare.*

13.2.5. Modulația în unghi polivalentă pentru transmisiuni de date

În scopul măririi debitului de informație, pe care îl vom numi **debit de biți,** fără a mări viteza de semnalizare, se utilizează canale care acceptă mai mult de două simboluri. Dacă sursa este binară și canalul este polivalent (are mai multe simboluri), trebuie să facem o **codare,** în sensul că *unui grup de simboluri ale sursei, respectiv unui cuvînt de cod, facem să-i corespundă un simbol din alfabetul canalului.*

În acest caz, debitul binar al sursei, măsurat în biți, s^{-1} nu mai este egal cu viteza de semnalizare (rapiditatea modulației), măsurată în baud (o succesiune de impulsuri de durată T are o viteză de semnalizare de $\dfrac{1}{T}$ baud).

Dacă alfabetul canalului are $M = 2^n$ simboluri, sursa binară va fi codificată în cuvinte de n biți. În cazul acesta, unei viteze de semnalizare de $V = \frac{1}{T}$ baud îi corespunde un debit binar de $N = nV$ biți s^{-1}.

13.2.5.1. M.F. polivalentă

Să presupunem că cele M simboluri din alfabetul canalului sînt M semnale sinusoidale de aceeași durată T și aceeași energie:

$$s_n(t) = A \cos(\omega_n t + \theta_n) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{13.197}$$

unde $n = \overline{1, M}$.

Dacă faza θ_n *este cunoscută* la recepție, spunem că avem o **recepție coerentă.**

Dacă faza θ_n *nu este cunoscută,* ea avînd o distribuție uniformă (între 0 și 2π), recepția se numește **necoerentă.**

Pentru a separa la recepție semnalele $s_n(t)$, se impune condiția ca ele să fie ortogonale:

$$\int_0^t s_n(t)\, s_m(t)\, dt = \frac{TA^2}{2}\, \delta_{nm} \tag{13.198}$$

Din condiția de ortogonalitate (transpusă în domeniul frecvență) rezultă că distanța minimă între frecvențele semnalelor: $\omega_d = |\omega_n - \omega_m|$, $n \neq m$, trebuie să satisfacă condiția $\omega_d T \geqslant 2\pi$ pentru a putea separa semnalele. Deci, lărgimea de bandă minimă care trebuie asigurată este aproximativ $B = \frac{M}{T}$.

În cazul unei transmisiuni bivalente, în aceeași lărgime de bandă B, *se poate lucra cu deviații de frecvență mai mari, deci se poate obține o mai bună stabilitate la perturbații.*

● **Recepție coerentă.** În acest caz receptorul optimal (adică receptorul care minimizează probabilitatea erorii) este un *receptor cu corelatori.* În fig. 13.35 este arătat un asemenea receptor, în care *operația de corelație este*

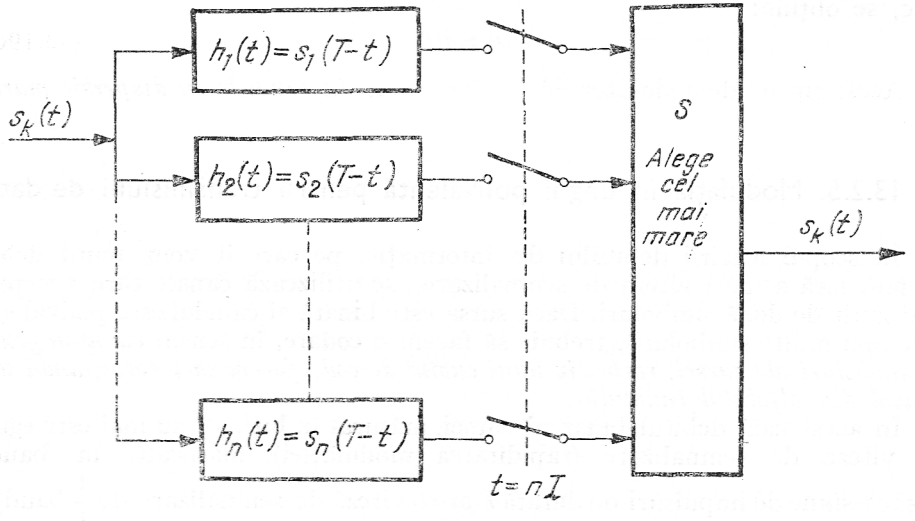


Fig. 13.35. Receptor optimal — recepție coerentă.

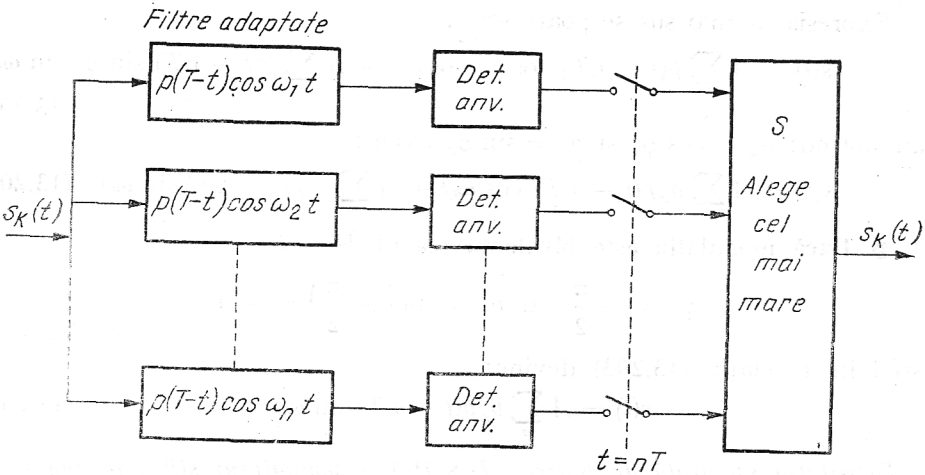


Fig. 13.36. Receptor optimal — recepție necoerentă.

realizată cu ajutorul unor filtre adaptate. În cazul recepției coerente, receptorul cunoaște θ_n și, în consecință, filtrele sînt adaptate la semnalele cunoscute $s_n(t)$. Ieșirile din filtrele adaptate sînt eșantionate la momentele nT și circuitul de selecție S alege valoarea cea mai mare, de exemplu la ieșirea din filtrul s_k și decide că s-a transmis semnalul $s_k(t)$.

● **Recepția necoerentă.** În acest caz faza θ_n fiind o variabilă aleatoare deci necunoscută la recepție, filtrele nu mai pot fi adaptate la forma semnalului $s_n(t)$. Dar fiindcă variațiile de fază nu afectează anvelopa semnalelor, *filtrele se adaptează la forma anvelopei* (vezi [2] pag. 265). După aceste filtre se face o detecție de anvelopă și se selectează răspunsul cel mai mare. Receptorul optimal în acest caz are structura arătată în fig. 13.36, unde filtrele adaptate au funcția de pondere

$$h_k(t) = p(T - t) \cos \omega_k t \tag{13.199}$$

unde $p(t)$ este funcția rectangulară de durată T și înălțime 1.

13.2.5.2. M.ϕ. polivalentă

Să presupunem că debitul sursei este de N bit s^{-1} (este o proprietate a sursei) și că viteza de semnalizare este V baud (proprietatea canalului). În conformitate cu § 13.2.5 pentru a adapta debitul de biți al sursei la viteza de semnalizare maximă admisă de canal, acesta trebuie să aibă M simboluri:

$$M = 2^m = 2^{\frac{N}{V}} \tag{13.200}$$

● **În cazul modulației polivalente de fază,** semnalul modulat cu o secvență de date $\{d_k = \pm 1\}$ poate fi scris sub forma:

$$s(t) = Re\left\{A \sum_n p(t - nT)\, e^{j(\omega_0 t + \varphi_n)}\right\} \tag{13.201}$$

unde $p(t)$ este un impuls rectangular de durată T și înălțime 1, iar $\{\varphi_n\}$ sînt fazele care corespund alfabetului cu M litere al canalului și care sînt puse în corespondență cu cuvintele de cod.

Expresia de mai sus se poate scrie:

$$s(t) = A \sum_n p(t - nT) \cos \varphi_n \cos \omega_0 t + A \sum_n p(t - nT) \sin \varphi_n \sin \omega_0 t \tag{13.202}$$

sau notînd: $a_n = \cos \varphi_n$ și $b_n = \sin \varphi_n$ avem:

$$s(t) = A \sum_n a_n p(t - nT) \cos \omega_0 t + A \sum_n b_n p(t - nT) \sin \omega_0 t \tag{13.203}$$

● **Dacă modulația este bivalentă** (cazul $M = 2$):

$$\varphi_n = \pm \frac{\pi}{2} \text{ iar } b_n = \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$$

astfel încît relația (13.203) devine:

$$s(t) = A \sum_n b_n p(t - nT) \sin \omega_0 t \tag{13.204}$$

Densitatea spectrală de putere (D.S.P.) a semnalului $s(t)$ este egală cu D.S.P. a secvenței aleatoare $a_n p(t - nT)$, translatată în jurul frecvenței ω_0.

D.S.P. a unui semnal aleator binar a fost expusă în § 7.20.1.1 și conform relației (7.344) unde $a = T$, avem:

$$q_s(\omega) = A^2 T \operatorname{sinc}^2 (\omega - \omega_0) \frac{T}{2} \tag{13.205}$$

Considerînd că lărgimea de bandă ocupată de semnal este dată de lărgimea lobului principal (fig. 7.53) avem:

$$B = \frac{2}{T} \tag{13.206}$$

Pentru a înlătura componentele spectrale date de discontinuitățile de fază (care măresc în mod inutil spectrul semnalului), la intrarea în canal se conectează un filtru de bandă care atenuează aceste componente. În acest caz însă nu se mai menține constantă amplitudinea semnalului și se preferă utilizarea unor circuite care *„netezesc"* discontinuitățile de fază $\pm\Delta\varphi$ $\left(\text{în cazul bifazic } \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

În acest caz relația (13.211) poate fi scrisă sub forma

$$s(t) = A \cos [\omega_0 t + \theta(t)] \tag{13.207}$$

unde:

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n f(t - nT) \quad \text{pt. } (n - 1)\, T < t \leqslant nT \tag{13.208}$$

este *funcția de „netezire"* a discontinuităților de fază φ_n, în general de forma *„cosinus ridicat"*.

Modulația bivalentă se obține cu un *modulator de produs*, așa cum se vede în fig. 13.37. Datele $d(t)$ se aplică sub formă de semnale polare. Simbolului „1" îi corespunde faza $\varphi_1 = 0$, respectiv semnalul $p(t) \sin \omega_0 t$ iar simbolului „0" îi corespunde faza $\varphi_2 = \pi$, respectiv semnalul $p(t) \sin (\omega_0 t + \pi)$.

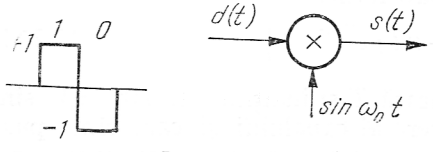


Fig. 13.37. MΦ bivalentă, modulatorul.

Presupunînd că receptorul are aceeași referință de fază ca și emițătorul,

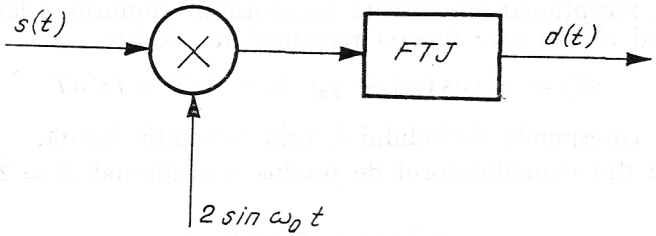


Fig. 13.38. MΦ bivalentă, demodulator sincron.

receptorul optimal este un *receptor coerent*, respectiv un *demodulator de produs* așa cum se vede în fig. 13.38.

Recepția coerentă este utilizată cînd canalul este suficient de stabil, astfel încît să nu introducă variații mari ale fazei semnalului transmis. *Majoritatea canalelor nu îndeplinesc* însă *această condiție*. Se poate însă considera că pe intervale scurte, cum ar fi durata T a unui simbol, variațiile de fază să fie neglijabile. În acest caz, se poate concepe un *sistem în care referința de fază să fie dată de faza semnalului precedent*. În felul acesta, la recepție nu se mai evaluează valoarea absolută a fazei, ci numai diferența de fază față de semnalul precedent. Un astfel de sistem se numește cu *„demodulare diferențială"* sau demodulare prin *„comparare de fază"*.

Pentru a elimina ambiguitățile de fază (de ex. între simbolurile 0 și 0 sau 1 și 1 diferența de fază este aceeași), secvența de date este codificată după următoarea regulă:

$$b_n = \overline{c_n} \oplus b_{n-1} \tag{13.209}$$

unde c_n sînt simbolurile generate de sursa $\{0, 1\}$, iar bara are ca semnificație negația.

Primul simbol codat b_0 se alege arbitrar.

Dacă simbolul b_i este „0", îi alocăm de ex. $\varphi_i = 0$, respectiv se transmite semnalul $\cos \omega_0 t$.

Dacă simbolul b_i este „1", îi alocăm $\varphi_i = \pi$ și se transmite semnalul $\cos(\omega_0 t + \pi) = -\cos \omega_0 t$.

Receptorul are structura arătată în fig. 13.39, unde T este o întîrziere egală cu durata unui semnal.

Receptorul, prin multiplicarea semnalului recepționat cu replica sa, întîrziată cu un tact și integrarea de termen scurt, realizată de filtrul trece-jos care elimină armonica a doua, face de fapt o autocorelare de termen scurt.

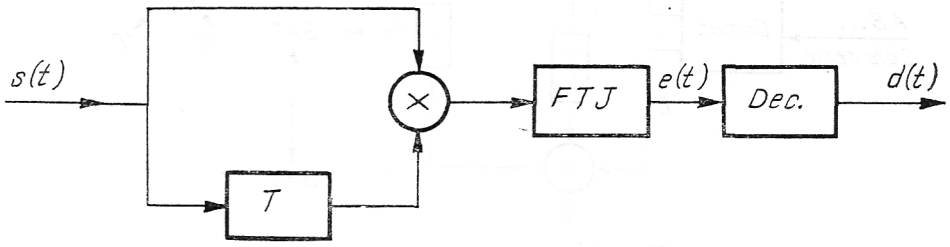


Fig. 13.39. Demodulare diferențială.

Semnalul recepționat în absența zgomotului, conform relației (13.207) și considerînd că $f(t)$ este funcția rectangulară, devine

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_n) \quad (n-1)T < t \leqslant nT \tag{13.210}$$

unde faza φ_n corespunde simbolului b_n prin convenția făcută.

La ieșirea din demodulatorul de produs (considerînd $A = 2$) se obține semnalul

$$e(t) = \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \tag{13.211}$$

Dacă

$$b_n + b_{n-1} = 1 \quad \text{atunci } \varphi_n - \varphi_{n-1} = 0, \text{ iar } e(t) = 1$$

$$b_n + b_{n-1} = 0 \quad \text{atunci } \varphi_n - \varphi_{n-1} = \pi, \text{ iar } e(t) = -1$$

Din relația (13.209) rezultă:

$$c_n = \overline{b_n \oplus b_{n-1}} \tag{13.212}$$

relație care permite decodarea după următoarea regulă, dacă:

$$e(t) > 0 \Rightarrow b_n + b_{n-1} = 1 \Rightarrow c_n = 0$$

$$e(t) < 0 \Rightarrow b_n + b_{n-1} = 0 \Rightarrow c_n = 1.$$

Această operație se realizează în blocul de decizii arătat în fig. 13.39.

Stabilitatea la zgomote a sistemului cu demodulare coerentă este mai scăzută decît aceea a sistemului cu recepție coerentă.

● **Cazul M + 4.** Pentru a mări debitul binar, simbolurile generate de sursă se grupează în cuvinte de două simboluri, obținîndu-se astfel un *debit* binar de două ori mai mare decît viteza de semnalizare.

Modularea cuadrivalentă este reprezentată în fig. 13.40.

Succesiunea de simboluri binare este grupată în cuvinte de două simboluri, notate cu A și B. Prin intermediul unui comutator, primul simbol A se aplică modulatorului de produs P_1, iar al doilea simbol B se aplică modulatorului P_2. Ieșirile însumate dau naștere la un semnal $\cos(\omega_0 t + \varphi_n)$, unde φ_n ia valorile $+45°$, $-45°$, $+135°$, $-135°$, în funcție de valorile lui A și B, conform fig. 13.40.

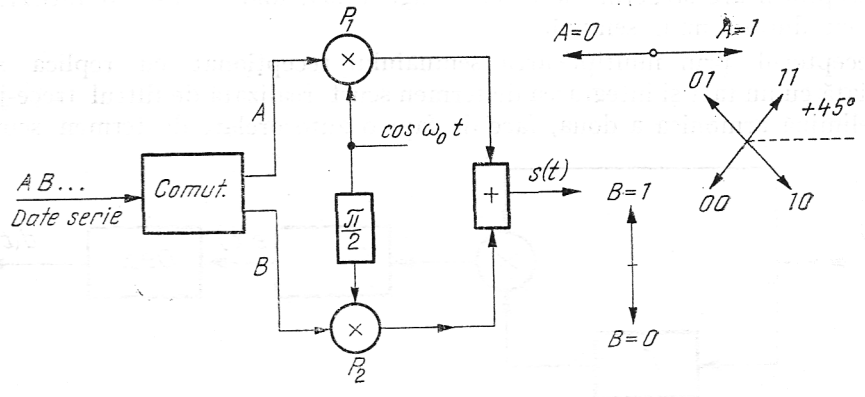


Fig. 13.40. Modulare cuadrivalentă.

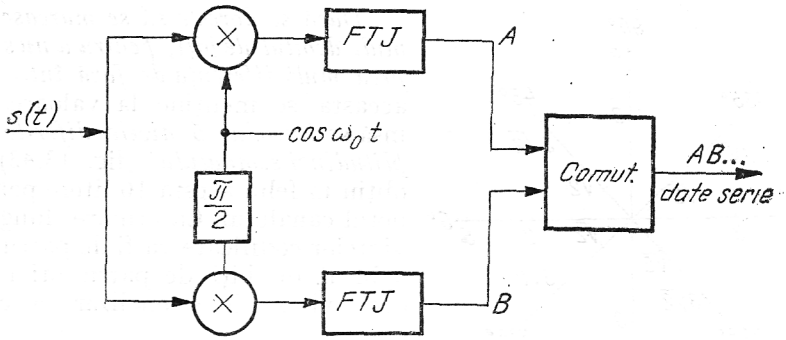


Fig. 13.41. Demodulare coerentă cuadrivalentă.

În cazul recepției coerente se utilizează două modulatoare de produs, așa cum se vede în fig. 13.41, la ieșirea cărora se obțin semnale proporționale cu $\cos \varphi_n$, în conformitate cu tabelul alăturat:

Faza lui $s(t)$ φ_n	Codul binar		Semnul la ieșirea din:		Ieșire date	
	A	B	Dem. A	Dem. B	A	B
+ 45°	1	1	+	+	1	1
− 45°	1	0	+	−	1	−1
+ 135°	0	1	−	+	−1	1
− 135°	0	0	−	−	−1	−1

Și în cazul acesta ($M = 4$) *se poate realiza o demodulare diferențială*, în conformitate cu schema arătată în fig. 13.42.

Analiza acestui demodulator (și a codificării necesare la emisie) este o extindere a cazului $M = 2$.

● **Cazul M = 8.** În practică se folosește și sistemul cu $M = 8$; în acest caz lungimea cuvintelor care se codifică este egală cu 3, iar *debitul de biți este de trei ori mai mare decît viteza de semnalizare în canal.*

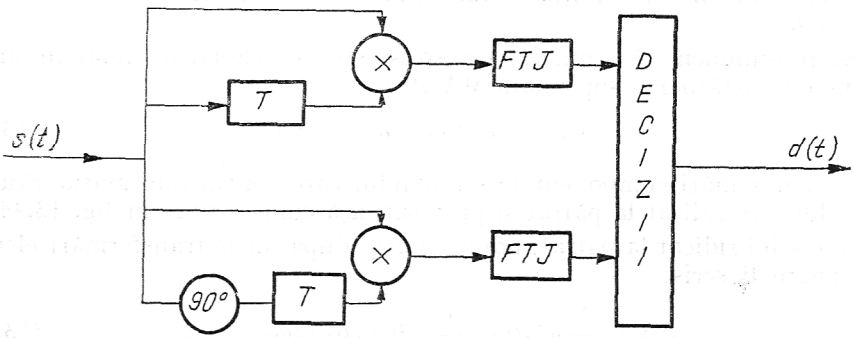


Fig. 13.42. Demodulator diferențial pentru $M = 4$.

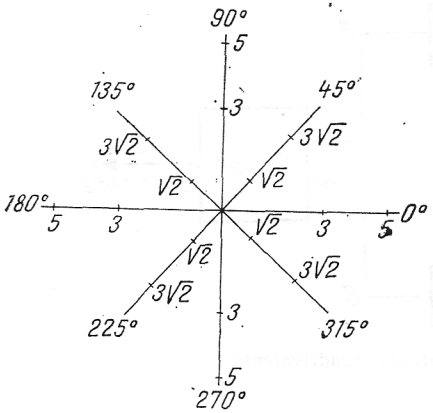


Fig. 13.43. Modulație în fază și în amplitudine.

Dacă se dorește să se mărească și mai mult debitul de biți, pentru a nu se micșora prea mult diferența de fază între semnale, aceasta se menține la valoarea de 45°, însă *se introduc 5 nivele diferite ale amplitudinei semnalului* (fig. 13.43), deci se obțin în felul acesta 16 litere pentru alfabetul canalului. Ca urmare, lungimea cuvintelor codificate va fi de patru biți, iar debitul de biți de patru ori mai mare decît viteza de semnalizare a canalului.

13.2.5.3. Operația de bruiaj și debruiaj

Dacă în șirul de date generate de sursă apare o structură formată dintr-un număr mare n de simboluri identice (0 sau 1), atunci se obține un semnal de durată $T_n = nT$, a cărui energie este concentrată pe un domeniu îngust de frecvențe, cu atît mai îngust cu cît T_n este mai mare. Aceste concentrări pot să producă perturbații (distorsiuni, diafonii) și din această cauză trebuie evitate.

Lucrul acesta se face prin bruiaj-debruiaj așa cum s-a arătat în §12.3.5.1.

13.3. Recuperarea informației privind frecvența și faza purtătoarei

După cum s-a văzut, recepția coerentă are nevoie de o purtătoare cu aceeași frecvență și fază cu cea de la emisie.

Informația privind frecvența și faza este conținută chiar în semnalul util sau este transmisă printr-un semnal auxiliar care acompaniază semnalul util. Este important ca pentru transmiterea informației privind frecvența și faza purtătoarei să se utilizeze o putere cît mai mică. Metodele de recuperare a informației de frecvență și de fază sînt foarte numeroase. În cele ce urmează vom expune una din cele mai simple metode.

● **Metodă directă de recuperare.** La metodele directe de recuperare, *informația* privind frecvența și faza purtătoarei *este conținută în semnalul transmis.*

Să presupunem că semnalul transmis este un semnal modulat în amplitudine cu purtătoarea suprimată MA-PS:

$$s(t) = m(t) \cos (\omega_1 t + \varphi_1) \tag{13.213}$$

Pentru a mări componentele semnalului care conțin informația căutată, semnalul este ridicat la pătrat și procesat, așa cum se vede în fig. 13.44.

Semnalul ridicat la pătrat, notat cu $a(t)$, după unele transformări elementare poate fi scris:

$$a(t) = \frac{1}{2} m^2(t) + \frac{1}{2} m^2(t) \cos (2\omega_1 t + 2\varphi_1) \tag{13.214}$$

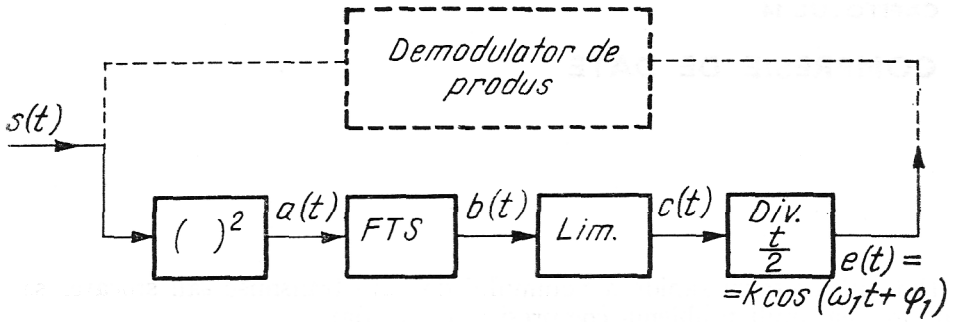


Fig. 13.44. Metodă directă de recuperare a purtătoarei.

Prin filtrarea trece-sus (F.T.S) se elimină componentele de frecvență joasă și se obține:

$$b(t) = \frac{1}{2} m^2(t) \cos (2\omega_1 t + 2\varphi_1) \qquad (13.215)$$

După limitare se elimină variațiile date de $m^2(t)$ și se obține

$$c(t) = A \cos (2\omega_1 t + 2\varphi_1) \qquad (13.216)$$

La ieșirea din divizorul de frecvență se obține

$$e(t) = A \cos (\omega_1 t + \varphi_1) \qquad (13.217)$$

care este purtătoarea refăcută, ce este utilizată în demodularea sincronă.

CAPITOLUL 14

COMPRESIE DE DATE

Datorită creșterii rapide a volumului de date transmise sau stocate, se pune tot mai mult problema compresiei acestor date.

Compresia de date are consecințe economice majore nu numai în legătură cu utilizarea mai eficientă a canalelor de comunicație, dar și în legătură cu reducerea capacității mediilor de stocare a datelor.

14.1. Tipuri de sisteme de compresie

A comprima *un mesaj* înseamnă *a păstra numai acei parametri care sînt esențiali pentru destinatar*, ceilalți parametri nu se transmit, respectiv nu se stochează.

Sistemele de compresie pot fi grupate în două categorii:

— *sisteme care utilizează transformări care conservă entropia sursei, dar reduc redundanța;*

— *sisteme care utilizează transformări care reduc entropia sursei.*

În ambele cazuri sursa de informație poate fi o sursă discretă sau o sursă continuă. Dacă mesajul este continuu, el se eșantionează și de cele mai multe ori se cuantizează, respectiv sursa continuă este transformată într-o sursă discretă. Operațiile de compresie se efectuează în general cu mărimi cuantizate, deci cu surse discrete, de unde și denumirea de compresie de date. În multe cazuri sursele discrete cu debit necontrolabil (fix) sînt transformate cu ajutorul unor memorii tampon în surse cu debit controlabil (variabil). În legătură cu această transformare se pune problema dimensionării corecte a memoriei tampon, în sensul ca să nu se depășească capacitatea ei, sau să nu rămînă vidă.

În cele ce urmează se va considera că sursele sînt staționare, discrete, cu sau fără memorie.

14.1.1. Transformări care conservă entropia (C.E)

În unele cazuri destinatarul are nevoie de toți parametrii mesajului, cu alte cuvinte la recepție mesajul trebuie refăcut fără distorsiuni. Dacă sursa de informație este o sursă continuă, prin eșantionare și cuantizare ea se transformă într-o sursă discretă și operația de compresie la emisie și decompresie la recepție se referă la această sursă, înțelegîndu-se că ieșirea ei trebuie refăcută fără distorsiuni. Cu alte cuvinte, distorsiunile introduse de procesul de cuantizare nu sînt luate în considerare fiindcă ele pot fi făcute oricît de mici dorim.

Transformările care conservă entropia *sînt reversibile și se referă la surse discrete fără memorie, cu debit controlabil.* Prin codări corespunzătoare (în ge-

neral codare Huffman), descrise în cap. IV, sursa de entropie H este transformată într-o sursă de entropie maximă H_{MAX} (sau aproape de maximum), respectiv se efectuează o operație de reducere a redundanței.

Simbolurile sursei de entropie maximă, respectiv de redundanță zero, sînt codate în cuvinte de lungime medie minimă (vezi § 4.3) și în consecință eficiența transmisiunii este maximă, iar stocarea lor se poate face în memorii de capacitate mai mică decît în absența codării.

Metodele de compresie care conservă entropia sînt cu atît mai eficace cu cît redundanța sursei este mai mare.

Dacă sursa nu este de memorie nulă, adică dacă între simbolurile succesive, generate de sursă există o corelație, prin grupare de simboluri (vezi § 4.5) se poate ajunge la o sursă de memorie nulă, căreia i se aplică metodele de codare optimală descrise în cap. IV. În practică însă nu se face această operație care duce la un echipament extrem de complex, și în consecință, sursele cu memorie sînt tratate ca fiind fără memorie, fapt care duce la o scădere a eficienței .Pentru sursele cu memorie există un procedeu de codare denumit *codare cu pas variabil*, care va fi tratat în cele ce urmează.

Tot în această categorie a metodelor care reduc redundanța trebuie considerate toate tipurile de modulații diferențiale a impulsurilor în cod, inclusiv modulația delta, precum și metodele de compandare.

Aceste metode au fost tratate în cap. 12.

14.1.2. Transformări care reduc entropia (R.E)

Transformările care reduc entropia *sînt transformări ireversibile*, care introduc distorsiuni. În funcție de gradul de distorsiune admis, compresia realizată poate fi mai mică sau mai mare. Transformările R.E. sînt *utilizate în special la compresia semnalului vorbirii* (vocodere) *și la compresia semnalului de televiziune*. Fiindcă în ambele cazuri destinatarul este un observator uman, dacă se ține seama de particularitățile sistemului auditiv respectiv vizual, se pot obține compresii foarte mari.

În unele cazuri, receptorul, pentru a micșora efectul subiectiv al distorsiunilor, utilizează procedee care măresc entropia. Astfel, în unele tipuri de vocodere, semnalul recepționat este combinat cu semnale periodice și cu semnale aleatoare în scopul de a reproduce un semnal acustic inteligibil. Semnalul rezultant are o entropie mai mare decît semnalul recepționat. În cazul televiziunii, cînd cuantizarea se face cu un număr foarte mic de nivele, de exemplu două, pentru a reproduce o imagine mai plăcută ochiului se adaugă o anumită cantitate de zgomot de fluctuații, mărindu-se prin aceasta entropia semnalului rezultant.

Transformările R.E. sînt aplicate și în sistemele de telemetrie, unde destinatarul nu este un observator uman. În acest caz se poate defini o măsură cantitativă a distorsiunilor admise, și se poate defini un raport de compresie care depinde de aceste distorsiuni.

14.2. Modelul unui sistem cu compresie de date

În modul cel mai general se poate concepe un sistem de compresie de date ca în fig. 14.1, în care sînt prezentate ambele tipuri de transformări, inclusiv codarea pentru protecția împotriva erorilor și transformarea de creștere a entropiei.

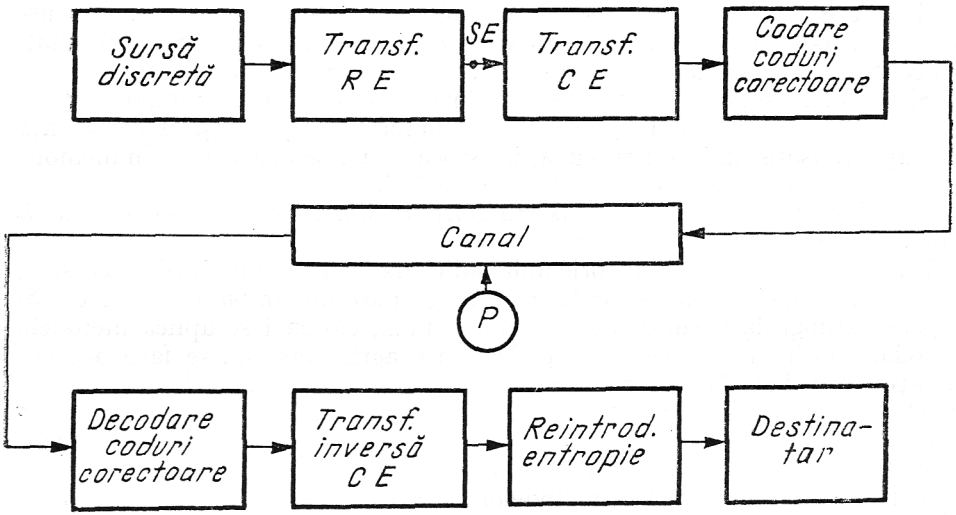


Fig. 14.1. Sistem de compresie.

Prima transformare este transformarea care reduce entropia, cu scopul de a elimina parametrii mesajului care nu au o importanță pentru destinatar. Rezultatul transformării (punctul S.E din fig. 14.1) poate fi considerat ca o „sursă efectivă" pentru transformarea care urmează, respectiv pentru transformarea care conservă entropia, dar reduce redundanța în scopul măririi eficienței transmisiunii sau stocării. În cele mai multe cazuri, pentru a avea o protecție împotriva perturbațiilor după reducerea la zero (sau aproape de zero) a redundanței, aceasta este parțial reintrodusă prin utilizarea de coduri corectoare sau detectoare de erori.

14.3. Funcția „rata distorsiunii"

Funcția **rata distorsiunii** poate fi utilizată pentru a vedea *legătura care există între distorsiunile admise într-o transformare R.E. și valoarea minimă la care poate fi redus debitul de informație a sursei efective.* Este clar că prin reducerea debitului de informație, respectiv prin mărirea compresiei, distorsiunile cresc.

Fie $x(t) = x$ un vector N — dimensional care reprezintă într-un spațiu metric semnalul generat de sursă, și $y(t) = y$ semnalul comprimat, transmis destinatarului.

Distorsiunea introdusă de procesul de compresie poate fi măsurată definind o *„distanță" $d(x, y)$ între semnalul x și semnalul y* (§ 6.1).

Dacă notăm cu $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ și cu $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$ componentele (eșantioanele) semnalului înainte de compresie, respectiv după compresie (fig. 14.2) putem să definim o măsură $d(x_i, y_i)$ a distorsiunii eșantionului x_i. De exemplu, această măsură ar putea să fie:

$$d(x_i, y_i) = \overline{(x_i - y_i)^2} \tag{14.1}$$

unde s-a luat media statistică fiindcă x_i și y_i sînt variabile aleatoare.

Distanța între semnalele x și y este:

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} d(x_i, y_i) \qquad (14.2)$$

Fig. 14.2. Transformare R.E.

și este o măsură a distorsiunii introdusă de procesul de compresie.

Reducerea entropiei în procesul de compresie este echivalentă cu acțiunea perturbațiilor într-un canal de transmisiune (fig. 14.2). Cu alte cuvinte, compresorul poate fi privit ca fiind un canal cu perturbații și în consecință poate fi definită transinformația (§ 2.4.4).

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y/X) \qquad (14.3)$$

Cu cît distorsiunile introduse de compresie sînt mai mari, cu atît crește și eroarea medie $H(Y/\mathbf{X})$.

Funcția „rata distorsiunii" este definită ca fiind:

$$R(\delta) = min\, I(X; Y) = min\,[H(Y) - H(Y/X)] \qquad (14.4)$$

unde minimul se ia în funcție de setul de probabilități $p(y_j/x_i)$ și este supus restricției ca distorsiunile $d(x, y)$ să nu depășească o valoare δ admisă:

$$d(x, y) \leqslant \delta \qquad (14.5)$$

Funcția $R(\delta)$ reprezintă debitul minim de informație la ieșirea din compresor (respectiv din sursa efectivă), *care ne asigură că distorsiunile δ admise nu sînt depășite.*

În concluzie, putem să spunem că prin compresie T.R.E transformă sursa cu un debit de informație $H(\mathbf{X})$ biți/s într-o nouă sursă cu debit $R(\delta)$ biți/s cu $R(\delta) < H(X)$, în condiții în care distorsiunile nu depășesc o valoare δ admisă.

Ținînd seama de cele precedente putem să definim un *raport de compresie*:

$$C = \frac{H(X)}{R(\delta)} \qquad (14.6)$$

care reprezintă *limita superioară a raportului de compresie*, limită *care nu poate fi depășită de nici un procedeu de compresie, fără a crește distorsiunile peste valoarea δ admisă.*

Dacă considerăm că intrarea în compresor este formată din eșantioanele mesajului cuantizate, reprezentate ca numere binare, atunci raportul de compresie este:

$$C = \frac{\text{număr de biți în secvența de intrare}}{\text{număr de biți în secvența de ieșire}} \qquad (14.7)$$

În cele ce urmează, din cauza complexității calculului lui $R(\delta)$ nu vom face apel la relația (14.6) pentru a calcula raportul de compresie ci vom calcula acest raport în conformitate cu relația (14.7).

14.4. Compresia prin codare cu pas variabil

Tehnica cunoscută sub numele de **codare cu pas variabil** este utilizată cu succes pentru *reducerea benzii de frecvențe a semnalului de televiziune.*

Ideea de bază a acestei tehnici este următoarea: eșantioanele succesive cuantizate, ale mesajului sînt examinate și dacă un număr de r eșantioane

diferă între ele cu mai puțin de α cuante (α fiind un număr ales de noi) spunem că avem un *pas* de lungime r. Pentru a transmite sau stoca datele, este suficient să se dea numai amplitudinea primului eșantion din pas (sub formă de număr binar) și lungimea pasului (tot ca număr binar).

Dacă $\alpha = 0$, adică eșantioanele din „pas" au același număr de cuante spunem că avem o „codare cu pas variabil" cu apertură zero. În caz contrar, spunem că codarea se face cu apertura α.

Există mai multe **variante de codare cu pas variabil.**

● *Varianta nr. 1* constă în *codarea Shannon—Fano sau Huffman a tuturor „pașilor" care apar în mod natural.* Primul eșantion din fiecare pas este stocat împreună cu cuvîntul de cod care reprezintă lungimea pasului.

Datele statistice necesare codării pot fi obținute experimental și ele sînt probabilitățile $P(l_i)$ cu care apar „pașii" de lungime l_i.

Această variantă de codare cu pas variabil dă *raportul de compresie cel mai mare,* însă suferă de dezavantajul, că luîndu-se în considerare toate lungimile posibile ale pașilor, *codarea devine foarte complexă.*

● *Varianta nr. 2* constă în *limitarea lungimilor pașilor, luîndu-se în considerare numai un set restrîns de lungimi de bază* $[l_1 l_2 \dots l_m]$. Lungimile care apar în mod natural și care depășesc lungimile de bază sînt divizate astfel încît să fie egale cu o sumă a lungimilor de bază. De exemplu, dacă $l_m = 10$ și apare o lungime $l = 30$, aceasta va fi codificată în trei cuvinte fiindcă $l = 3l_m$.

În felul acesta se simplifică codarea, însă *raportul de compresie scade* fiindcă nu se mai beneficiază de lungimile pașilor mai mari decît l_m.

● *Varianta nr.* 3 merge mai departe pe calea simplificării operației de codare, în sensul că *lungimea pașilor este codificată în cuvinte de lungime constantă* L. Dacă se iau în considerare toți pașii $l_1 = 1$, $l_2 = 2 \dots l_m = m$, l_m fiind pasul cel mai mare, atunci lungimea cuvîntului de cod care specifică pasul este

$$L = \log_2 l_m \tag{14.8}$$

La începutul fiecărui pas se stochează un cuvînt cu K biți reprezentînd valoarea primului eșantion din pas. În continuare se stochează un cuvînt de L biți reprezentînd lungimea pasului respectiv. De exemplu dacă $l_m = 32$, atunci $L = 5$ și putem specifica 32 de pași cu cuvîntul de lungime 5.

Să presupunem că se cunoaște distribuția pașilor:

$$\begin{aligned} [l] &= [l_1 l_2 \dots l_m] \\ [P] &= [P_1 P_2 \dots P_m] \end{aligned} \tag{14.9}$$

că sursa generează o secvență mare de eșantioane (în intervalul D) și că în această secvență sînt N pași de diferite lungimi $l_1, l_2, \dots, l_m$. Intervalul de timp D fiind foarte mare, putem spune că numărul de pași de lungime l_i este $n_i = NP_i$. Rezultă că numărul de eșantioane în intervalul D este:

$$S = \sum_{i=1}^{m} n_i l_i = \sum_{i=1}^{m} NP_i l_i = N\bar{l} \tag{14.10}$$

Dacă eșantioanele sînt cuantizate cu K biți, rezultă că numărul de biți în intervalul D este

$$Q = KN\bar{l} \tag{14.11}$$

Dacă nu se face nici o compresie, rezultă că în intervalul de timp D trebuie să transmitem sau să stocăm Q biți. Decodarea se poate face fără ambiguitate fiindcă avem numai cuvinte de lungime constantă $K + L$ biți.

În cazul codării cu pas variabil avem nevoie de KN biți să specificăm eșantioanele de la începutul pașilor și de LN biți să specificăm lungimea pașilor. Deci, după compresie în intervalul D vom avea o secvență de $KN + LN$ biți.

Raportul de compresie conform relației (14.7) este:

$$C = \frac{Q}{KN + LN} = \frac{K\bar{l}}{K + L} \tag{14.12}$$

din care se vede că *raportul de compresie crește dacă pașii cu lungime mare au o probabilitate mai mare.*

Dacă admitem distorsiuni mai mari ale mesajului refăcut, putem să mărim apertura α și în felul acesta crește valoarea $\bar{l}$ și deci și gradul de compresie.

14.5. Compresii de date prin transformări ortogonale

Dacă considerăm o sursă de entropie maximă care în intervalul de timp D are N eșantioane care sînt cuantizate cu K biți, atunci:

$$H_N = N \log K \tag{14.13}$$

Din această relație se vede că *pentru a reduce entropia este mult mai avantajos să micșorăm numărul N de dimensiuni ale spațiului în care este reprezentat mesajul, decît să micșorăm numărul de nivele de cuantizare,* respectiv pe K, din cauză că H scade cu logaritmul lui K.

Transformările ortogonale sînt utile în compresia de date, fiindcă fiecare vector în spațiul transformat provine din combinații liniare ale tuturor vectorilor din spațiul de bază. Eliminarea unor vectori din spațiul transformat are ca urmare că se pierde ceva din informația referitoare la toți vectorii din spațiul de bază, în loc să se piardă toată informația privind vectorii din spațiul de bază eliminați în ipoteza în care compresia de date s-ar efectua în acest spațiu de bază. Mai mult, în spațiul de bază, unde componentele semnalului sînt eșantioanele lui, nu se poate opera nici o reducere a dimensiunilor spațiului fiindcă mesajul fiind staționar, toate eșantioanele lui au aceeași dispersie σ^2.

Dacă efectuăm însă o transformare liniară, componentele în spațiul transformat nu vor mai avea aceeași dispersie. Componentele cu dispersii mai mici vor putea fi reprezentate de cuvinte de lungime mai mică, eventual unele din componente pot fi neglijate. Dacă în loc să transmitem cuvinte (numere) care să reprezinte eșantioanele, transmitem cuvinte (numere) care reprezintă componente comprimate cu spațiul transformat, efectuăm o compresie de date. La punctul de recepție se efectuează transformarea inversă (fig. 4.3).

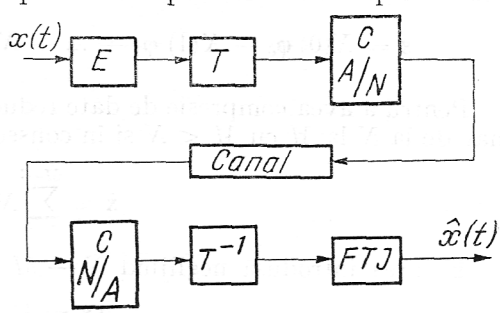


Fig. 14.3. Utilizarea transformărilor ortogonale pentru compresia de date:

E — eșantionare; *T* — transformare ortogonală; *C* — convertor A/N și N/A; *F.T.J* — filtru trece-jos.

Dintre transformările liniare cele mai avantajoase sînt **transformările**

ortogonale deoarece ele *conservă entropia* și *transformarea inversă se obține foarte ușor*, prin transpunere.

Dacă $\mathbf{T}$ este o transformare ortogonală, atunci:

$$\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{I} \tag{14.14}$$

unde $\mathbf{T}^T$ este matricea transpusă, iar $\mathbf{I}$ este matricea identitate.

Din relația (14.14) rezultă că transformarea inversă $\mathbf{T}^{-1}$ este egală cu $\mathbf{T}^T$.

Dacă notăm cu $\mathbf{x}$ matricea de date, care reprezintă semnalul la intrare presupus cu valoare medie nulă:

$$\mathbf{x}^T = [x(0)\ x(1)\ ...,\ x(N-1)] \tag{14.15}$$

prin transformarea $\mathbf{T}$ obținem:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{x} \tag{14.16}$$

unde

$$\mathbf{X}^T = [X(0)\ X(1)\ ...\ X(N-1)] \tag{14.17}$$

este matricea datelor din spațiul transformat.

Fiindcă

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} \| = \| \mathbf{x} \|^2 \quad \text{și} \quad \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \| \mathbf{X} \|^2 \tag{14.18}$$

ținînd seama de relația (14.16) se obține:

$$\| \mathbf{x} \|^2 = \| \mathbf{X} \|^2 \tag{14.19}$$

adică *transformarea ortogonală conservă norma*, cu alte cuvinte prin transformarea ortogonală *nu se modifică puterea semnalului*.

Transformarea ortogonală este definită de setul de vectori ortogonali $\{\varphi_i\}$:

$$\mathbf{T}^T = [\boldsymbol{\varphi}_0\boldsymbol{\varphi}_1 \ldots \boldsymbol{\varphi}_{N-1}] \tag{14.20}$$

cu proprietatea:

$$\boldsymbol{\varphi}_i\boldsymbol{\varphi}_j = \delta_{ij} \tag{14.21}$$

Ținînd seama de relațiile (14.20) și (14.16) putem scrie:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^T\mathbf{X} = [\boldsymbol{\varphi}_0\boldsymbol{\varphi}_1 \ldots \boldsymbol{\varphi}_{N-1}]\,\mathbf{X} \tag{14.22}$$

sau:

$$\mathbf{x} = X(0)\,\boldsymbol{\varphi}_0 + X(1)\,\boldsymbol{\varphi}_1 + \ldots + X(N-1)\,\boldsymbol{\varphi}_{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} X(i)\,\boldsymbol{\varphi}_i \tag{14.23}$$

Pentru a avea compresie de date reducem dimensiunea spațiului transformat de la N la M cu $M < N$ și în consecință obținem:

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^{M-1} X(i)\,\boldsymbol{\varphi}_i \tag{14.24}$$

Eroarea introdusă neglijînd $N - M$ termeni este:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \tag{14.25}$$

sau

$$\Delta\mathbf{x} = \sum_{i=M}^{N-1} X(i)\,\boldsymbol{\varphi}_i \tag{14.26}$$

Eroarea medie patratică este:

$$\varepsilon = \overline{\| \Delta \mathbf{x} \|^2} = \overline{\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x}} \tag{14.27}$$

Substituind relația (14.26) în (14.27) se obține:

$$\varepsilon = \sum_{i=M}^{N-1} \sum_{j=M}^{N-1} X(i)\, X(j)\, \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j = \sum_{i=M}^{N-1} \overline{X(i)^2} \tag{14.28}$$

Secvența de intrare $\mathbf{x}$ este caracterizată statistic de matricea de covariație $\mathbf{K}$ (§ 8.5.6), și în consecință vom căuta să exprimăm pe ε în funcție de această matrice.

Funcția de covariație a datelor la intrare este:

$$\mathbf{K}_x = \overline{\mathbf{x}\, \mathbf{x}^T} \tag{14.29}$$

Din relațiile (14.21) și (14.23) rezultă $X(i) = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x}$, care înlocuită în (14.28) ne dă

$$\varepsilon = \sum_{i=M}^{N-1} \overline{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x} (\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x})^T} = \sum_{i=M}^{N-1} \boldsymbol{\varphi}_i^T \overline{\mathbf{x}\, \mathbf{x}^T} \boldsymbol{\varphi}_i \tag{14.30}$$

sau ținînd seama de relația (14.29)

$$\varepsilon = \sum_{i=M}^{N-1} \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K}_x \boldsymbol{\varphi}_i \tag{14.31}$$

Problema care se pune este de *a determina vectorii (matricele)* $\boldsymbol{\varphi}_i$, *respectiv transformarea* $\mathbf{T}$ *care să minimizeze eroarea patratică medie, fiind dată funcția de covariație* $\mathbf{K}_x$.

Minimumul lui ε se obține ținînd seama de constrîngerea dată de relația (14.21).

Utilizînd metoda multiplicatorului lui Lagrange, avem:

$$\varepsilon = \sum_{i=M}^{N-1} \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K}_x \boldsymbol{\varphi}_i - \sum_{i=M}^{N-1} \lambda_i (\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i - 1) \tag{14.32}$$

sau

$$\varepsilon = \sum_{i=M}^{N-1} \{ \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K}_x \boldsymbol{\varphi}_i - \lambda_i (\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i - 1) \} \tag{14.33}$$

Pentru a găsi minimumul va trebuie să luăm gradientul $\nabla \boldsymbol{\varphi}_i$ relației (14.33) și să-l anulăm:

$$\nabla_{\varphi_i} \{\varepsilon\} = 0 \tag{14.34}$$

Gradientul ∇_{φ_i}, respectiv derivarea în raport cu matricea $\boldsymbol{\varphi}_i$, este o generalizare a noțiunii de derivată (v. anexa IV.7).

Dacă matricea $\mathbf{K}_x$ este simetrică avem:

$$\nabla_{\varphi_i} \{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K}_x \boldsymbol{\varphi}_i\} = 2 \mathbf{K}_x \boldsymbol{\varphi}_i \tag{14.35}$$

și

$$\nabla_{\varphi_i} \{\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i\} = 2 \boldsymbol{\varphi}_i \tag{14.36}$$

Introducînd relațiile (14.35) și (14.36) în (14.34) se obține:

$$\nabla_{\varphi_i} \{\varepsilon\} = 2 \mathbf{K}_x \boldsymbol{\varphi}_i - 2 \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i = 0 \tag{14.37}$$

de unde:

$$\mathbf{K}_x \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \tag{14.38}$$

Din această relație rezultă că *transformarea care dă eroarea medie pătratică minimă are ca vectori bază, vectorii proprii ai matricei de covariație* $\mathbf{K}_x$ *a semnalului considerat.*

Introducînd relația (14.38) în (14.31) se obține:

$$\varepsilon_{min} = \sum_{i=M}^{N-1} \lambda_i \tag{14.39}$$

unde λ_i sînt valorile proprii ale matricei $\mathbf{K}_x$.

Transformarea definită de relația (14.38) este *optimă* în sensul că nici o altă transformare nu dă o eroare mai mică.

Această transformare se numește *Karhunen-Loève*.

14.5.1. Compresie de date cu ajutorul transformatei Karhunen-Loève (K-L)

După cum s-a văzut în § 7.12 un mesaj cu funcția de covariație $K(t_1, t_2)$ poate fi dezvoltat în serie cu coeficienți necorelați, dacă funcțiile de reconstrucție $\varphi_i(t)$ sînt soluții ale ecuației integrale:

$$\int_0^D K(t_1, t_2)\, \varphi_i(t_2)\, dt_2 = \lambda_i \varphi_i(t_1) \tag{14.40}$$

unde $K(t_1, t_2)$ este nucleul ecuației, $\varphi_i(t)$ sînt funcțiile proprii și λ_i sînt valorile proprii.

Considerînd momente de timp discrete: $t_1 = mT = m$ și $t_2 = nT = n$ $(T = 1)$ și introducînd notația $K(t_1, t_2) = K(m, n) = K_m(n)$, integrala (14) poate fi scrisă sub formă de produs scalar:

$$\langle \overrightarrow{K_m}, \overrightarrow{\varphi_i} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} K_m(n)\, \varphi_i(n) = \lambda_i \varphi_i(m) \qquad m = \overline{0, N-1} \tag{14.41}$$

Acest produs scalar poate fi scris sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} K(0,0) & K(0,1) & \dots & K(0, N-1) \\ K(1,0) & K(1,1) & \dots & K(1, N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K(N-1, 0) & K(N-1, 1) & \dots & K(N-1, N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i(0) \\ \varphi_i(1) \\ \vdots \\ \varphi_i(N-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda_i \begin{bmatrix} \varphi_i(0) \\ \varphi_i(1) \\ \vdots \\ \varphi_i(N-1) \end{bmatrix} \tag{14.42}$$

respectiv

$$\mathbf{K}_x \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \tag{14.43}$$

ecuație identică cu ecuația (14.38), dar derivată din considerente diferite, respectiv din condiția ca dezvoltarea în serie cu funcțiile de reconstrucție $\varphi_i(t)$ să aibe coeficienți $X(i)$ necorelați.

Matricea de covariație $\mathbf{K}_X$ în spațiul transformat este:

$$\mathbf{K}_X = \mathbf{X}\mathbf{X}^T \tag{14.44}$$

sau fiindcă $\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{x}$:

$$\mathbf{K}_X = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}^T}\mathbf{T}^T = \mathbf{T}\mathbf{K}_x\mathbf{T}^T \tag{14.45}$$

Dat fiind că transformarea Karhunen Loève are coeficienți necorelați (relația 7.152):

$$\overline{\alpha_i \alpha_j} = \delta_{ij}\lambda_i \tag{14.46}$$

rezultă că matricea de covariație $\mathbf{K}_X$ este o matrice diagonală:

$$\mathbf{K}_X = \text{diag}\,(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}) \tag{14.47}$$

unde valorile proprii λ_i reprezintă dispersiile componentelor $X(i)$ (de valoare medie nulă).

Dacă în loc să transmitem (sub formă cuantizată) toți parametrii $X(i)$ transmitem numai $N—M$, realizăm o compresie de date cu o distorsiune dată de relația (14.39). Numărul $N—M$ de componente $X(i)$ pe care le putem neglija corespunde cu numărul de coeficienți λ_i din matricea de covariație $\mathbf{K}_y$ care pot fi neglijați.

Din cauză că *transformata Karhunen Lèove nu are algoritm de calcul rapid*, determinarea vectorilor proprii ai matricei de covariație este dificilă și *este rareori folosită, preferîndu-se transformări suboptimale.*

Ea este însă deosebit de utilă ca referință, permițînd să se calculeze cît de mult se îndepărtează o anumită transformată de optimum.

Dintre **transformările ortogonale** *mai des utilizate* menționăm: *transformata Fourier discretă, transformata Walsh-Hadamard, transformata cosinus discretă.*

În majoritatea cazurilor considerăm că mesajul este un proces Markov de ordinul întîi și în consecință matricea de covariație este de forma dată în relația (8.111).

14.5.2. Compresie de date cu ajutorul transformatei Walsh-Hadamard (W-H)

Transformata Walsh-Hadamard are avantajul că *nu necesită multiplicări, ci numai adunări.* În conformitate cu cele stabilite în § 6.5.2.2. relațiile (6.100) și (6.102) avem:

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}_w(n)\,\mathbf{x} \tag{14.48}$$

și

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{H}_w(n)\,\mathbf{W} \tag{14.49}$$

unde:

$\mathbf{x}^T = [x(0)\ x(1)\ \ldots\ x(N-1)]$ este matricea datelor, iar

$\mathbf{W}^T = [W(0)\ W(1)\ \ldots\ W(N-1)]$

este matricea coordonatelor în spațiul transformat.

Compresia de date se obține cuantizînd cu nivele diferite, componentele $W(0), W(1), \ldots, W(N-1)$, respectiv *alocînd un număr de biți mai mic componentelor de ordin mare, a căror valoare în general descrește cu ordinul* (unele din ele putînd fi neglijate). Nu există metode standard de aproximare a componentelor $W(i)$, mărimea lor depinzînd de statistica semnalului.

Dacă notăm cu $\hat{\mathbf{W}}$ matricea componentelor comprimate, semnalul estimat va fi

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \mathbf{H}_w(n)\, \hat{\mathbf{W}} \tag{14.50}$$

● **Compresia de imagini prin transformata Walsh-Hadamard bidimensională.** Dacă imaginea care urmează să fie comprimată este descompusă în puncte (pixeli) de intensitate $\mathbf{F}(x, y)$ x și y fiind coordonatele punctului, atunci prin analogie cu cele stabilite în § 6.5.2.1, transformata W—H bidimensională poate fi scrisă:

$$\mathbf{W}(u, v) = \mathbf{H}_w(n)\, \mathbf{F}(x, y)\, \mathbf{H}_w(n) \tag{14.51}$$

unde:

$\mathbf{H}_w(n)$ este matricea $N \times N$ a transformării Walsh-Hadamard;

$\mathbf{W}(u, v)$ este matricea $N \times N$ a datelor transformate.

Transformarea inversă este:

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{N^2} \mathbf{H}_w(n)\, \mathbf{W}(u, v)\, \mathbf{H}_w(n) \tag{14.52}$$

În general prelucrarea imaginei se face pe blocuri. De exemplu blocuri de 16 date aranjate într-o matrice 4×4, $[\mathbf{F}(x, y)]$; dacă $N = 4$, matricea $\mathbf{H}_w(n)$ este dată de relația (6.96) și ecuația (14.51) poate fi scrisă:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0,0) & \dots & x(0,3) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x(3,0) & \dots & x(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(0,0) & \dots & W(0,3) \\ W(1,0) & \dots & W(1,3) \\ \cdot & & \\ W(3,0) & \dots & W(3,3) \end{bmatrix}$$

Metoda de cuantizare poate fi următoarea:

— elementul $W(0, 0)$ se codează cu 12 biți;

— celelalte elemente $W(0, 1) \dots W(3, 3)$ se codează cu 3 biți.

Sau:

— elementul $W(0, 0)$ se codează cu 12 biți;

— elementele $W(0, 1)$, $W(1, 0)$, $W(1, 1)$ se codează cu 3 biți;

— elementele celelalte se neglijează

sau alte variante.

Matricea $\mathbf{W}$ astfel comprimată o notăm cu $\hat{\mathbf{W}}$ și elementele acestei matrice le transmitem prin canal. La recepție se efectuează transformarea inversă.

$$\hat{\mathbf{F}}(x, y) = \frac{1}{N^2} \mathbf{H}_w(n)\, \hat{\mathbf{W}}(u, v)\, \mathbf{H}_w(n) \tag{14.53}$$

care reprezintă imaginea după compresie.

Raportul de compresie obținut crește dacă prelucrăm blocuri mai mari de date.

Transformata W—H nu ține seama de statistica semnalului, deci este suboptimală, însă este ușor de implementat.

CAPITOLUL 15

RECUNOAȘTEREA FORMELOR

Într-o gamă variată, tot mai mare de probleme, apare *necesitatea identificării automate a unor imagini, sunete, spectru,* operație pe care o vom denumi **recunoașterea formelor.** Denumirea de formă trebuie înțeleasă într-un sens larg. **Forma** este o *descriere cantitativă sau structurală a unui obiect sau a oricărei alte entități care ne interesează.*

Formele care au anumite proprietăți comune sînt grupate în *„clase"*. Recunoașterea formelor de către mașini înseamnează, asignarea diferitelor forme supuse recunoașterii, claselor cărora le aparțin. Lucrul acesta trebuie făcut automat cu intervenție cît mai mică posibilă, din partea omului.

Abordarea problemelor de recunoaștere a formelor poate fi făcută în două moduri:

— *abordare pe baza teoriei deciziilor;*

— *abordare pe baze sintactice.*

15.1. Recunoașterea de forme bazată pe teoria deciziilor

Această abordare este avantajoasă dacă forma care trebuie să fie recunoscută poate fi reprezentată de un număr rezonabil de parametri, considerați ca fiind componentele unui vector.

După traductor, prima operație care se face într-un sistem de recunoașterea formelor este aceea de *măsurare* a parametrilor care caracterizează forma. Operația de *măsurare* o numim *eșantionare* iar parametrii măsurați îi vom numi *trăsături.* Deci prima operație, cea de eșantionare, este o operație de *extragerea trăsăturilor.* În operația de extragere a trăsăturilor sînt incluse și operații de normalizare care fac ca datele ce urmează să fie prelucrate, să fie independente de schimbări de scală, translații, rotații etc.

Deoarece în general numărul trăsăturilor este foarte mare, se face o operație de „selecție a trăsăturilor" în scopul de a reține numai un număr redus de trăsături esențiale. Operația de selecție a trăsăturilor este o operație de compresie de date tratată în capitolul anterior. Datele selectate sînt supuse unui proces de clasficare cu scopul de a decide cărei clase îi aparține forma aplicată la intrarea în sistem.

Modelul unui sistem de recunoaștere a formelor este arătat în fig. 15.1.

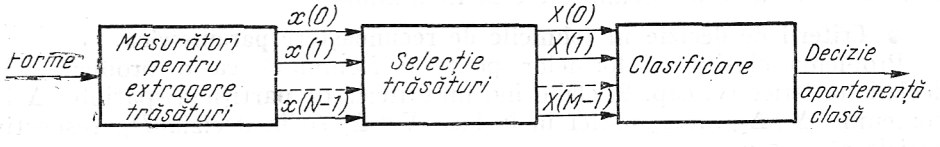


Fig. 15.1. Sistem de recunoașterea formelor.

15.1.1. Selecția trăsăturilor

Pentru selecția trăsăturilor se pot utiliza metodele de compersie expuse în capitolul 14 și îndeosebi transformările liniare care permit reducerea numărului de dimensiuni de la N la M, $M < N$.

15.1.2. Clasificarea trăsăturilor

Funcția clasificatorului *este de a decide cărei clase îi aparține setul de trăsături obținut de la selectorul de trăsături.* Împărțirea formelor în clase se face în conformitate cu aplicația la care ne referim. Astfel, de exemplu, în cazul cînd forma care trebuie recunoscută este o electrocardiogramă (E.C.G.), spațiul formelor Ω poate fi împărțit în două clase — clasa E.C.G. normală ω_1 și clasa E.C.G. anormală ω_2.

Tehnicile de clasificare pot fi divizate în două categorii:

— *clasificări parametrice*, la care se presupune că se cunosc unele proprietăți statistice ale trăsăturilor;

— *clasificări neparametrice*, la care proprietățile statistice ale trăsăturilor nu sînt cunoscute.

15.1.2.1. Tehnici de clasificare parametrice

Spațiul Ω al tuturor formelor care trebuie recunoscute, este divizat în mulțimi disjuncte $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ astfel încît toate formele $\varphi_i \in \omega_i$ au o proprietate comună Π_i (de ex., ω_1 reprezintă mulțimea numerelor „1" scrise cu mîna, ω_2 reprezintă mulțimea numerelor „2" scrise cu mîna etc.). Forma φ_i este o variabilă aleatoare, toate realizările ei fiind elemente în ω_i.

La intrarea în sistemul de recunoaștere a formelor se prezintă o formă φ_x a cărei clasă nu se cunoaște și la ieșirea din sistem trebuie să se obțină o decizie asupra apartenenței formei φ_x la una din clasele $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$.

Ca urmare a acestei decizii, $\varphi_x \in \omega_i$, spunem că sistemul a recunoscut forma φ_x ca făcînd parte din clasa ω_i. Dacă însă în realitate $\varphi_x \in \omega_j$, spunem că sistemul a făcut o *eroare de recunoaștere. Sistemul care are erorile de recunoaștere cele mai mici* se numește **sistem optim.**

Pentru a se ușura procesul de decizie, se reduce numărul de dimensiuni ale spațiului Ω (prin selecția trăsăturilor) și se obține un nou spațiu Δ în care fiecărei forme φ_x îi corespunde un vector (sau un punct) X ,care evident este o variabilă aleatoare. Spațiul Δ îl vom denumi *spațiul formelor transformate*, sau, pe scurt, *spațiul formelor*, cînd nu există ambiguitate.

Pentru recunoașterea formei φ_x, respectiv a vectorului X, spațiul Δ trebuie divizat în m mulțimi disjuncte $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ pe baza unor criterii alese astfel încît eroarea de recunoaștere să fie minimă.

● **Criterii de decizie în tehnicile de recunoaștere parametrică.**

Problema clasificării formelor poate fi formulată ca o problemă de decizii statistice (v. cap. 9) elaborînd un criteriu de partiție a spațiului Δ în domeniile $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ astfel încît dacă $X \in \Delta_i$ se ia decizia D_i, respectiv decizia că $\varphi_x \in \omega_i$.

În elaborarea criteriului de decizie trebuie să ținem cont de consecințele deciziilor luate, respectiv trebuie să introducem o *funcție de cost* $L(\omega_i, D_j)$ care reprezintă costul luării unei decizii $D_j(\varphi_x \in \omega_j)$ de către clasificator, cînd în realitate $\varphi_x \in \omega_i$.

Criteriul lui Bayes ne *dă costul mediu, respectiv riscul minim.*

$$R = L(\omega_i, D_j) = \sum_i \sum_j L(\omega_i, D_j)\ P(\omega_i, D_j) \tag{15.1}$$

unde:

$$P(\omega_i, D_j) = P(\omega_i)\ P(D_j/\omega_i) \tag{15.2}$$

iar

$$P(D_j/\omega_i) = \int_{\Delta_j} p(X/\omega_i)\ \mathrm{d}R \tag{15.3}$$

Să considerăm cazul $m = 2$

$$R = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} L(\omega_i, D_j)\ P(\omega_i, D_j) \tag{15.4}$$

iar funcția de cost o considerăm egală cu:

$$L(\omega_i, D_j) = \delta_{ij} \tag{15.5}$$

În acest caz, riscul devine:

$$R = \bar{L} = P(\omega_2, D_1) + P(\omega_1, D_2) = P(\omega_2)\ P(D_1/\omega_2) + \\ + P(\omega_1)\ P(D_2/\omega_1) \tag{15.6}$$

Ținînd seama de relația (15.3)

$$R = P(\omega_2) \int_{\Delta_1} p(X/\omega_2)\ \mathrm{d}R + P(\omega_1) \int_{\Delta_2} p(X/\omega_1)\ \mathrm{d}R \tag{15.7}$$

sau

$$R = P(\omega_2) \int_{\Delta_1} p(X/\omega_2)\ \mathrm{d}R + P(\omega_1) \left[1 - \int_{\Delta_1} p(X/\omega_1)\, \mathrm{d}R\right] \tag{15.8}$$

sau

$$R = \int_{\Delta_1} [P(\omega_2)\ p(X/\omega_2) - P(\omega_1)\ p(X/\omega_1)]\ \mathrm{d}R + P(\omega_1) \tag{15.9}$$

Riscul este minim dacă toate punctele X pentru care:

$$P(\omega_1)\ p(X/\omega_1) > P(\omega_2)\ p(X/\omega_2) \tag{15.10}$$

sînt atribuite domeniului Δ_1.
Egalitatea:

$$P(\omega_1)\ p(X/\omega_1) = P(\omega_2)\ p(X/\omega_2) \tag{15.11}$$

reprezintă frontiera între domeniile Δ_1 și Δ_2.

Ținînd seama de relația (15.10), se poate determina o *funcție de decizie*:

$$D(X) = \frac{P(\omega_1)\ p(X/\omega_1)}{P(\omega_2)\ p(X/\omega_2)} - 1 \tag{15.12}$$

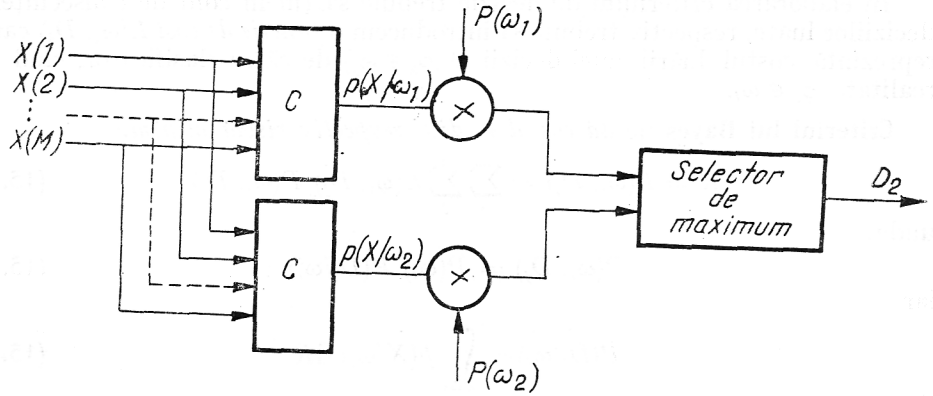


Fig. 15.2. Clasificator Bayes:
C — calculul densităților de probabilitate.

astfel încît dacă:

$D(X) > 0$ se ia decizia D_1, respectiv $\varphi_x \in \omega_1$ iar dacă:
$D(X) < 0$ se ia decizia D_2, respectiv $\varphi_x \in \omega_2$.

În caz de egalitate se poate lua în mod arbitrar orice decizie.

Schema-bloc a unui clasificator Bayes pentru $m = 2$ este arătată în fig. 15.2.

Generalizarea la m clase se face direct din relația (15.10):

$$P(\omega_i)\, p(X/\omega_i) \geqslant P(\omega_j)\, p(X/\omega_j) \qquad j = \overline{1, m} \tag{15.13}$$

În cazul în care această relație este îndeplinită, clasificatorul ia decizia D_i, respectiv $\varphi_x \in \omega_i$.

Probabilitățile $P(\omega_i)$ ale claselor care ne interesează se pot evalua în general din specificul problemei, în caz contrar se iau toate egale între ele.

În majoritatea cazurilor densitățile de probabilitate sînt gaussiene (multidimensionale):

$$p(X/\omega_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\mathbf{K}_i|^{\frac{1}{2}}} exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_i)^T \mathbf{K}_i^{-1} (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_i) \right] \tag{15.14}$$

unde:

$\mathbf{K}_i$ este matricea de covariație a datelor (formelor) în spațiul transformat, care conform relației (14.45) este

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{T} \mathbf{K}_{\varphi_i} \mathbf{T}^T \tag{15.15}$$

iar $\mathbf{T}$ este matricea transformării ortogonale cu care s-a făcut selecția trăsăturilor:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \varphi_x \tag{15.16}$$

$\mathbf{X}$ și φ_x fiind matrice coloană.

$\overline{\mathbf{X}}_i$ este valoarea medie a vectorilor $\mathbf{X} \in \Delta_i$ respectiv:

$$\overline{\mathbf{X}}_i = \mathbf{T} \overline{\varphi}_i \tag{15.17}$$

Matricele de covariație $\mathbf{K}_{\varphi_i}$ și valorile medii $\overline{\varphi_i}$ se estimează, considerînd forme $\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(n)}$ cunoscute, numite etalon, aparținînd clasei ω_i. Dacă n este suficient de mare avem:

$$\overline{\varphi_i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_i^{(k)}$$

și generalizînd relația (14.29) la cazul cînd valorile medii nu sînt nule rezultă

$$\mathbf{K}_{\varphi i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\varphi_i^{(k)} - \overline{\varphi_i})\,(\varphi_i^{(k)} - \overline{\varphi_i})^T \tag{15.18}$$

Matricele $\overline{\varphi_i}$, $\mathbf{K}_{\varphi i}$ fiind astfel determinate, cu ajutorul relației (15.17) și (15.15) se determină $\overline{\mathbf{X}_i}$ și $\mathbf{K}_i$ care introduse în relația (14.15) specifică densitatea de probabilitate condiționată $p(X/\omega_i)$

Formele $\varphi_i^{(k)}$ se numesc *eșantioanele etalon de „instruire" din clasa* ω_i.

Dacă $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_j = \mathbf{K}$, luînd logaritmul relației (15.13) se obține:

$$log \frac{p(X/\omega_i)}{p(X/\omega_j)} + log \frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)} \geqslant 0 \tag{15.19}$$

sau introducînd expresia (15.14) avem:

$$(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}_j})^T\, \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}_j}) - (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}_i})^T\, \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}_i}) + 2\, log \frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)} \geqslant 0 \tag{15.20}$$

Ținînd seama că matricele $\mathbf{X}$, $\overline{\mathbf{X}_i}$ $\overline{\mathbf{X}_j}$ sînt matrice coloană, iar matricea de covariație este o matrice simetrică $\mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{K}^{-1})^T$, relația precedentă poate fi adusă la forma (vezi anexa IV.8):

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K}^{-1} (\overline{\mathbf{X}_i} - \overline{\mathbf{X}_j}) - (\overline{\mathbf{X}_i} + \overline{\mathbf{X}_j})\, \mathbf{K}^{-1} (\overline{\mathbf{X}_i} - \overline{\mathbf{X}_j}) + 2\, log \frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)} \geqslant 0 \tag{15.21}$$

În această relație singura mărime variabilă este $\mathbf{X}$, toți ceilalți parametri sînt cunoscuți. Dacă $\mathbf{X}$ satisface această relație pentru toți indicii j, atunci se ia decizia $\mathbf{X} \in \Delta_i$, respectiv forma $\varphi_x \in \omega_i$.

15.1.2.2. Tehnici de clasificare neparametrice

În cazul cînd nu se cunosc proprietățile statistice ale formelor care trebuie recunoscute se recurge la tehnici de clasificare neparametrice.

Și în acest caz se pot defini funcții de decizie numite și *funcții de discriminare.*

● **Clasificator bazat pe principiul distanței minime.** Presupunem că în fiecare clasă ω_i cunoaștem un set de forme etalon: $\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(n_i)}$, acestor forme le corespund, în spațiul transformat, vectorii de instruire $\mathbf{X}_i^{(1)}, \mathbf{X}_i^{(2)}, \ldots, \mathbf{X}_i^{(n_i)}$. Efectuăm media aritmetică a acestor vectori:

$$\overline{\mathbf{X}_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{X}_i^{(k)} \tag{15.22}$$

și spunem că vectorul $\mathbf{X}$ a cărui clasă nu se cunoaște, este în clasa ω_i dacă distanța:

$$d_i^2 = \|\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_i\|^2 \tag{15.23}$$

este mai mică decît oricare din distanțele

$$d_j^2 = \|\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_j\|^2 \quad j = \overline{1, m} \tag{15.24}$$

Distanța d_i^2 poate fi scrisă, ținînd seama de faptul că $\mathbf{X}$ este o matrice coloană:

$$d_i^2 = (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_i)^T (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_i) = \|\mathbf{X}\|^2 - 2\left\{\overline{\mathbf{X}}_i^T\mathbf{X} - \frac{1}{2}\|\overline{\mathbf{X}}_i\|^2\right\} \tag{15.25}$$

Din această relație se vede că distanța D_i este minimă cînd funcția de discriminare:

$$D_i(\mathbf{X}) = \overline{\mathbf{X}}_i^T\mathbf{X} - \frac{1}{2}\|\overline{\mathbf{X}}_i\|^2 \tag{15.26}$$

este maximă

Deci, dacă $D_i(\mathbf{X}) \geqslant D_j(\mathbf{X})$ $j = \overline{1, m}$ decidem că $\varphi_x \in \omega_i$.

Dacă notăm:

$$\overline{\mathbf{X}}_i^T = [w_{i1}\, w_{i2} \ldots w_{iM}] \tag{15.27}$$

și

$$\|\overline{\mathbf{X}}_i\|^2 = w_{i1}^2 + w_{i2}^2 + \ldots + w_{iM}^2 = 2\alpha_i \tag{15.28}$$

iar

$$\mathbf{X}^T = [X(1)\, X(2) \ldots X(M)] \tag{15.29}$$

atunci funcția de discriminare se poate scrie

$$D_i(\mathbf{X}) = w_{i1}X(1) + w_{i2}X(2) + \ldots + w_{iM}X(M) - \alpha_i \tag{15.30}$$

Coeficienții w_{ij} se numesc *ponderile sau parametrii clasificatorului.*

Clasificatorul alege valoarea cea mai mare, așa cum se vede în fig. 15.3, pentru cazul $m = 2$ și $M = 2$

Relația (15.30) poate fi scrisă:

$$D_i(\mathbf{X}) = \mathbf{W}_i^T\mathbf{Y}_i \tag{15.31}$$

unde:

$$\mathbf{W}_i^T = [w_{i1}\, w_{i2} \ldots w_{iM}\alpha_i] \tag{15.32}$$

și

$$\mathbf{Y}_i^T = [X_i(1)\, X_i(2) \ldots X_i(M) - 1] \tag{15.33}$$

Spațiul $[\mathbf{Y}]$ se numește *spațiul mărit* din cauză că are o dimensiune în plus față de spațiul $[\mathbf{X}]$. Vectorii $\mathbf{Y}$ se obțin din vectorii $\mathbf{X}$ prin adăugarea unei componente egale cu -1.

Funcția de discriminare dată de relația (15.26) se scrie în acest caz, mai simplu și anume: $D_i(\mathbf{X}) = \mathbf{W}_i^T\mathbf{Y}_i$.

Clasificatorul bazat pe distanța minimă dă rezultate bune, numai dacă mulțimea $\mathbf{X}_i$ a formelor din spațiul transformat este grupată în jurul formei medii $\overline{\mathbf{X}}_i$ care caracterizează clasa ω_i.

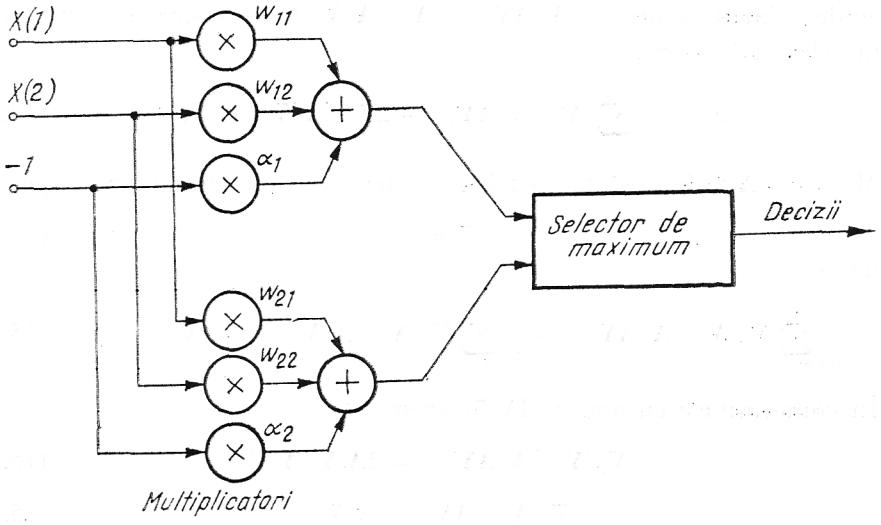


Fig. 15.3. Clasificare bazată pe distanța minimă.

● **Clasificatorul bazat pe metoda celor mai mici patrate.** Acest clasificator *este utilizat cînd formele* $\mathbf{X}_i$ (care provin din φ_i, prin transformarea $\mathbf{T}$) *nu sînt grupate în jurul unei forme medii.*

Ideea de bază a clasificării în acest caz *este de a efectua o transformare* $\mathbf{A}$ *a spațiului „mărit"* [$\mathbf{Y}$] *într-un spațiu* [$\mathbf{Z}$] numit *spațiul deciziilor, care să aibă proprietatea că vectorii* $\mathbf{Y}_i$, *care erau dispersați în spațiul* [$\mathbf{Y}$], *să fie transformați în vectori* $\mathbf{Z}_i = \mathbf{A}\mathbf{Y}_i$, *grupați în jurul unui vector* $\mathbf{V}_i$, *numit vector de referință*, ales arbitrar. În acest spațiu [$\mathbf{Z}$], se poate aplica principiul distanței minime.

În fig. 15.4 este arătat schematic modul de realizare a acestui principiu.

Transformarea $\mathbf{A}$ se determină punînd condiția ca un set $\mathbf{Y}_i^{(k)}$ de vectori de instruire (care reprezintă forma de apartenență cunoscută) să fie transformați în vectori $\mathbf{Z}_i^{(k)}$, astfel încît aceștia să fie cît mai apropiați de $\mathbf{V}_i$ în sensul unei erori patratice medii minime.

Matricea eroare este:

$$\varepsilon_k = \mathbf{Z}_i^{(k)} - \mathbf{V}_i = \mathbf{A}\mathbf{Y}_i^{(k)} - \mathbf{V}_i \tag{15.34}$$

iar eroarea patratică medie este:

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \| \varepsilon_k \|^2 \tag{15.35}$$

Din relațiile precedente rezultă:

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (\mathbf{A}\mathbf{Y}_i^{(k)} - \mathbf{V}_i)^T (\mathbf{A}\mathbf{Y}_i^{(k)} - \mathbf{V}_i) \tag{15.36}$$

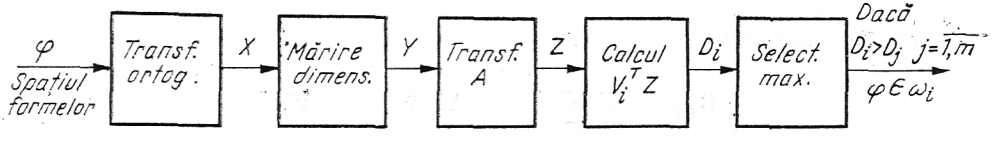


Fig. 15.4. Principiul clasificatorului bazat pe metoda celor mai mici pătrate.

de unde, ținînd seamă că $\mathbf{V}_i^T\mathbf{A}\mathbf{Y}_i^{(k)} = \mathbf{Y}_i^{(k)T}\mathbf{A}^T\mathbf{V}_i$ fiindcă sînt matrice cu un singur element, avem:

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\{\mathbf{Y}_i^{(k)T}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{Y}_i^{(k)} - 2\mathbf{Y}_i^{(k)T}\mathbf{A}^T\mathbf{V}_i + \|\mathbf{V}_i\|^2\} \tag{15.37}$$

Matricea $\mathbf{A}$ trebuie să fie astfel aleasă încît $\mathbf{e}_i$ să fie minimum, respectiv:

$$\nabla_A\mathbf{e}_i = 0 \tag{15.38}$$

de unde

$$\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\nabla_A\{\mathbf{Y}_i^{(k)T}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{Y}_i^{(k)}\} - \frac{2}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\nabla_A\{\mathbf{Y}_i^{(k)T}\mathbf{A}^T\mathbf{V}_i\} + \nabla_A\|\mathbf{V}_i\|^2\} = 0 \tag{15.39}$$

În conformitate cu anexa (IV.7) avem:

$$\nabla_A\{\mathbf{Y}_i^{(k)T}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{Y}_i^{(k)}\} = 2\mathbf{A}(\mathbf{Y}_i^{(k)}\mathbf{Y}_i^{(k)T}) \tag{15.40}$$

$$\nabla_A\{\mathbf{Y}_i^{(k)T}\mathbf{A}\mathbf{V}_i\} = \mathbf{V}_i\mathbf{Y}_i^{(k)T} \tag{15.41}$$

și

$$\nabla_A\{\|\mathbf{V}_i\|^2\} = 0 \tag{15.42}$$

Introducînd aceste relații în egalitatea (15.36) se obține:

$$\mathbf{A}\left[\frac{2}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\mathbf{Y}_i^{(k)}\mathbf{Y}_i^{(k)T}\right] = \frac{2}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\mathbf{V}_i\mathbf{Y}_i^{(k)T} \tag{14.43}$$

de unde:

$$\mathbf{A} = \left[\sum_{k=1}^{n_i}\mathbf{V}_i\mathbf{Y}_i^{(k)T}\right]\left[\sum_{k=1}^{n_i}\mathbf{Y}_i^{(k)}\mathbf{Y}_i^{(k)T}\right]^{-1} \tag{15.44}$$

Pînă în prezent în specificarea lui $\mathbf{A}$ au intervenit numai elemente $\mathbf{Y}_i^{(k)}$, caracteristice mulțimii ω_i. Este însă clar că în determinarea lui $\mathbf{A}$ va trebui să intervină vectorii de instruire $\mathbf{Y}_j^{(k)}$ corespunzător tuturor claselor. Acest lucru se face, luînd o valoare medie a lui $\mathbf{A}$ pe toate clasele posibile.

Pentru a efectua operația de mediere ne referim la relația (15.43) și notînd cu $P(\omega_i)$ probabilitatea de apariție a clasei ω_i avem:

$$\mathbf{A}\left[\frac{P(\omega_1)}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\mathbf{Y}_1^{(k)}\mathbf{Y}_1^{(k)T} + \frac{P(\omega_2)}{n_2}\sum_{k=1}^{n_2}\mathbf{Y}_2^{(k)}\mathbf{Y}_2^{(k)T} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{P(\omega_m)}{n_m}\sum_{k=1}^{n_m}\mathbf{Y}_m^{(k)}\mathbf{Y}_n^{(k)T}\right] = \frac{P(\omega_1)}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\mathbf{V}_1\mathbf{Y}_1^{(k)T} + \frac{P(\omega_2)}{n_2}\sum_{k=1}^{n_2}\mathbf{V}_2\mathbf{Y}_2^{(k)T} + \ldots$$

$$+ \frac{P(\omega_m)}{n_m}\sum_{k=1}^{n_m}\mathbf{V}_m\mathbf{Y}_n^{(k)T} \tag{15.45}$$

Introducem notațiile:

$$\mathbf{B}_{yY} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{P(\omega_j)}{n_i}(\mathbf{Y}_j^{(k)}\mathbf{Y}_i^{(k)T}) = \overline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T} \tag{15.46}$$

care reprezintă funcția de autocorelație a matricei $\mathbf{Y}$.

și

$$\mathbf{B}_{VY} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{P(\omega_i)}{n_i} (\mathbf{V}_i \mathbf{Y}_j^{(k)T}) = \overline{\mathbf{V}\mathbf{Y}^T} \tag{15.47}$$

care reprezintă funcția de corelație mutuală între matricele **V** și **Y**.

Cu aceste notații expresia matricei **A** poate fi scrisă:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_{VY}\mathbf{B}_{YY}^{-1} \tag{15.48}$$

După cum se poate vedea din relațiile (15.46) și (15.47) matricea **A** este o matrice cu $M + 1$ coloane și $M + 1$ linii.

Matricea **A** fiind determinată (din vectorii etalon de instruire) urmează să o utilizăm în procesul de decizie.

Pentru aceasta trebuie să specificăm în primul rînd vectorii de referință $\mathbf{V}_i$ pentru cele m clase. Fiindcă în general $m < M$, putem alege, pentru a simplifica calculele, vectorii $\mathbf{V}_i$ ca fiind m vectori unitari din spațiul $[\mathbf{Z}]$, $M + 1$ dimensional (în caz contrar, mărim dimensiunea spațiului $[\mathbf{Z}]$ adăugînd zerouri).

Vectorul $\mathbf{V}_i$ este o matrice cu $M + 1$ linii și poate fi scris:

$$\mathbf{V}_i^T = [\ \ldots\ \gamma_i\ \ldots\ ] \qquad i = \overline{1, m} \tag{15.49}$$

unde toate elementele sînt nule, cu excepția elementului γ_i, care este egal cu unitatea $\gamma_i = 1$.

Pentru a clasifica vectorul $\mathbf{Y}^T = [Y(1)\ Y(2), \ldots\ Y(M + 1) - 1]$, clasificatorul calculează

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{Y} \tag{15.50}$$

Dacă vectorul **Z** astfel calculat este mai aproape de vectorul $\mathbf{V}_i$ decît de ceilalți vectori de referință, clasificatorul decide că forma care corespunde vectorului **Y** face parte din clasa ω_i.

Distanța între **Z** și $\mathbf{V}_i$ este:

$$d_i^2 = \|\mathbf{Z} - \mathbf{V}_i\|^2 \qquad i = \overline{1, m} \tag{15.51}$$

care se poate scrie, analog relației (15.25):

$$d_i^2 = \|\mathbf{Z}\|^2 - 2\mathbf{V}_i^T\mathbf{Z} + \|\mathbf{V}_i\|^2 \qquad i = \overline{1, m} \tag{15.52}$$

unde $\|\mathbf{V}_i\|^2 = 1$ pentru $\forall i$.

Din relația precedentă se vede că d_i^2 este minimum cînd $\mathbf{V}_i^T\mathbf{Z}$ este maximum. Deci, clasificatorul trebuie să calculeze numai expresia

$$D_i = \mathbf{V}_i^T\mathbf{Z} \qquad i = \overline{1, m} \tag{15.53}$$

și să aleagă valoarea cea mai mare.

Ținînd seama de relația (15.50) se poate scrie:

$$D_i = \mathbf{V}_i^T\mathbf{A}\mathbf{Y} \qquad i = \overline{1, m} \tag{15.54}$$

unde matricea **A** cu $M + 1$ linii și $M + 1$ coloane poate fi scrisă:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1M}\beta_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2M}\beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{mM}\beta_M \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \tag{15.55}$$

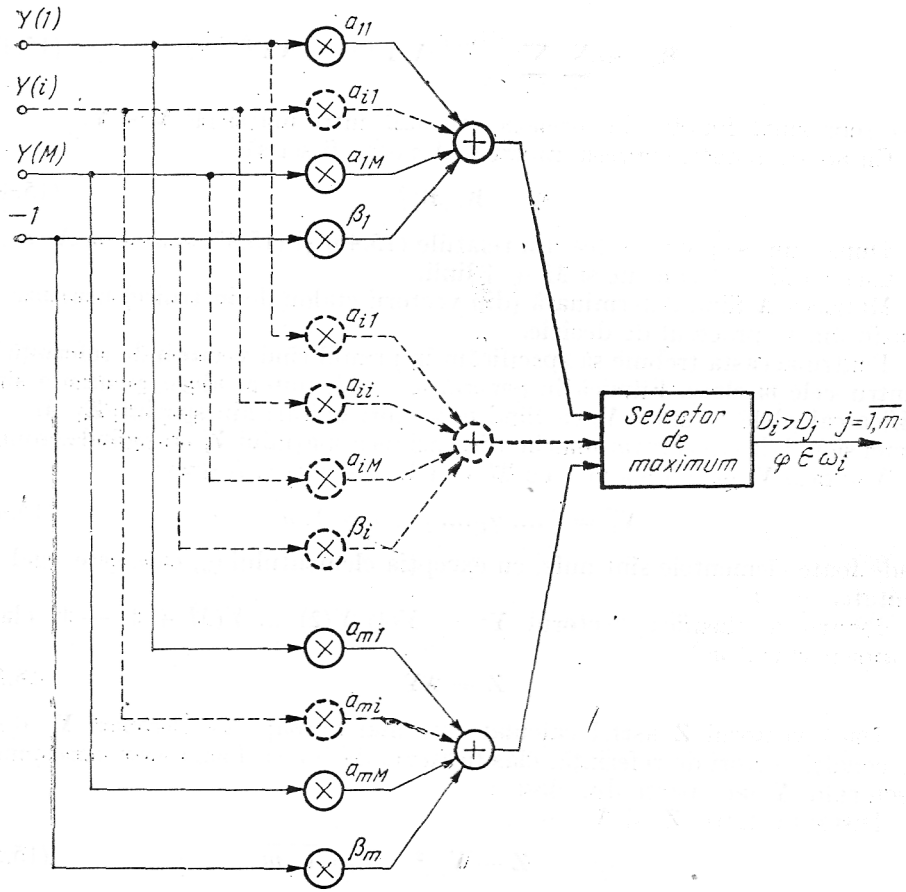


Fig. 15.5. Clasificator bazat pe metoda celor mai mici pătrate.

Din această matrice nu prezintă interes decît primele m linii, fiindcă matricea $\mathbf{V}_i^T$ poate avea numai unul din primele elemente diferit de zero, restul elementelor de la $m + 1$ la $M + 1$ fiind nule.

Ținînd seama de expresia (15.55), relația (15.54) poate fi scrisă:

$$D_i = a_{i1}Y(1) + a_{i2}Y(2) + \ldots + a_{iM}Y(M)\,\beta_i \quad i = \overline{1, m} \qquad (15.56)$$

Clasificatorul alege cel mai mare dintre numerele D_i și pentru $D_i \geqslant D_j$ $j = \overline{1, m}$ ia decizia $\varphi_x \in \omega_i$. În fig. 15.5 este arătat clasificatorul care ia decizii bazate pe metoda celor mai mici pătrate.

Din cele precedente rezultă că *clasificatorul este perfect definit dacă se cunoaște matricea* **A** *obținută printr-un proces de instruire.*

15.2. Recunoașterea de forme pe baze sintactice

Abordarea recunoașterii formelor pe baza teoriei deciziei prezentată în paragraful precedent este oportună cînd formele pot să fie reprezentate în mod convenabil sub formă de vectori. Sînt însă aplicații unde structura formei joacă un rol important în procesul de clasificare.

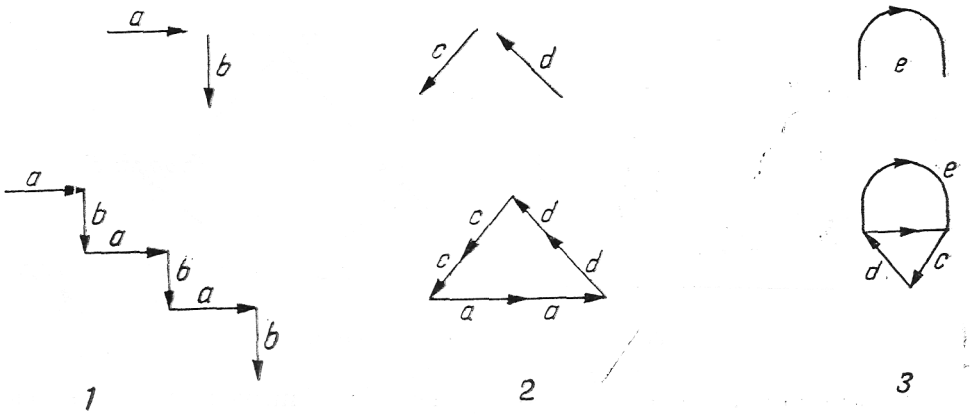


Fig. 15.6. Forme descompuse în elemente primitive.

În *abordarea* **sintactică,** *formele complexe sînt descrise* în termenii unei compoziții *din elemente mai simple* numite *trăsături sintactice* sau *primitive.*

În fig. 15.6, sînt arătate cîteva elemente primitive și modalitățile de a descompune anumite forme, în aceste elemente. Forma în trepte (1) este reprezentată de șirul *abab...*, triunghiul (2) este reprezentat de șirul *aaddcc* și forma (3) de șirul *acde.*

Pentru a mări puterea de descriere prin „primitive" se introduc operatori cum ar fi: „+", reprezentînd însumarea a două primitive „vîrf-bază" fig. (15.7,*a*) sau operatorul „**X**" însemnînd conectarea a două primitive „bază-bază" sau „—" însemnînd conectarea a două primitive „vîrf-vîrf" sau „*" însemnînd interconectarea a două primitive. Semnul „~" indică schimbarea direcției unei primitive.

În fig. 15.7 este arătată descompunerea unor forme în primitivele menționate cu titlu de exemplu.

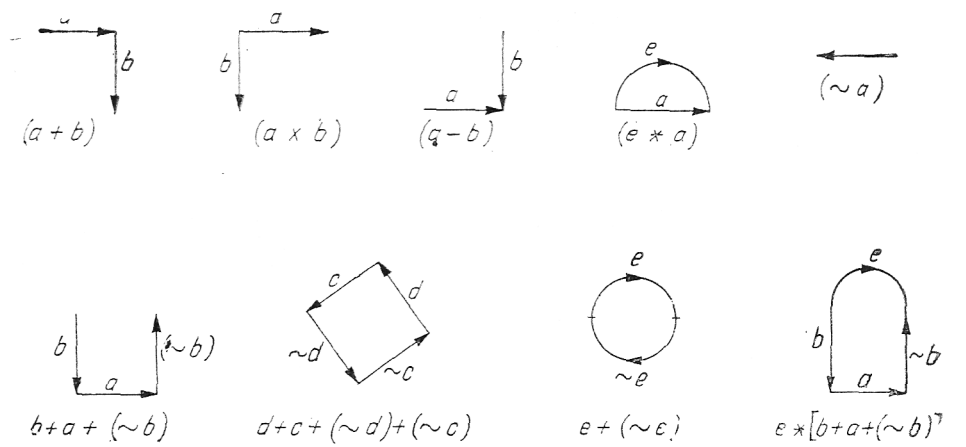


Fig. 15.7. Utilizarea unor operatori.

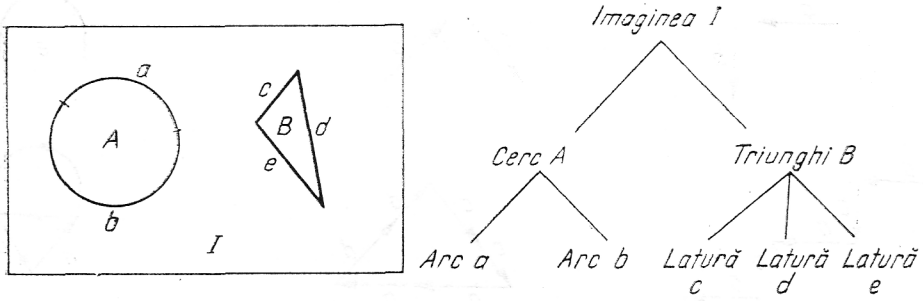


Fig. 15.8. Ierarhizarea unor forme.

În cazul formelor complexe, descompunerea în primitive nu mai este convenabilă. În acest caz se procedează la o ierarhizare a formelor, obținînd reprezentarea arborescentă din fig. 15.8.

Pentru a folosi conceptele teoriei formale a limbajelor, primitivele sînt interpretate ca fiind simboluri admise într-o anumită **gramatică,** prin gramatică înțelegîndu-se un *set de reguli de sintaxă menite a genera* **propoziții** *cu respectivele simboluri.*

ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR

I.1. Probabilități definite pe cîmpuri de evenimente

I.1.1. Cîmp de evenimente

Notăm cu Ω mulțimea tuturor „rezultatelor" posibile ale unei „experiențe" (mulțimea simbolurilor pe care le poate genera una sau mai multe surse de informație etc.). Această mulțime o numim *spațiul eșantioanelor*. Un element al acestei mulțimi se numește *eveniment elementar*. Reuniunea tuturor evenimentelor elementare se numește *eveniment sigur* (E). Evenimentul imposibil se notează cu Φ. Două evenimente sînt complementare dacă:

$$A \cap \bar{A} = E \qquad \text{și} \qquad A \cap \bar{A} = \Phi$$

Fie $\mathfrak{F}$ o clasă de submulțimi ale lui Ω. $\mathfrak{F}$ se numește *cîmp de evenimente* dacă:

1. $E \in \mathfrak{F}$
2. $(\forall)\, A \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{F}$
3. $(\forall)\, A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F}$

Elementele lui $\mathfrak{F}$ se numesc *evenimente*. Orice cîmp de evenimente conține evenimentul imposibil Φ și pentru $(\forall)\, A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Se spune că $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ este un *sistem complet* de evenimente dacă:

$$A_i \cap A_j = \Phi \quad \text{pt} \quad i \neq j \quad \text{și} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$$

I.1.2. Probabilitate

Se numește probabilitate pe cîmpul de evenimente $\mathfrak{F}$, o funcție reală $P(A)$ de evenimentele $A \in \mathfrak{F}$, care are proprietățile:

1. $P(E) = 1$
2. $P(A) \geqslant 0$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dacă $A \cap B = \Phi$

Consecințe:

$P(\Phi) = 0$
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
$P(A) \leqslant P(B)$ dacă $A \subset B$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Fie un sistem complet de evenimente elementare:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E \qquad A_i \cap A_j = \Phi \qquad i \neq j$$

și evenimentul:

$$A = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_m} \qquad m \leqslant n$$

Dacă evenimentele A_i sînt egal posibile, probabilitatea evenimentului A (definiția clasică) este:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

I.1.2.1. *Probabilități condiționate*

Fie sistemul complet de evenimente:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E \quad \text{și} \quad A_i \cap A_j = \Phi \quad i \neq j$$

și fie două evenimente A și B din acest sistem:

$$A = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_m}$$

$$B = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots \cup A_{j_k}$$

unde indicii pot fi oricare din numerele $\overline{1, n}$

Se notează cu A_{p_r} evenimentele comune și avem:

$$A \cap B = A_{p_1} \cup A_{p_2} \cup \ldots \cup A_{p_r}$$

și relațiile: $m \leqslant n$; $k \leqslant n$; $r \leqslant m$; $r \leqslant k$.

Dacă evenimentul B s-a realizat, probabilitatea realizării evenimentului A este:

$$P(A/B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Rezultă că

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(A/B) = P(A)\ P(B/A) \tag{I.1}$$

Evenimentele A și B se numesc *independente* dacă:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{și} \quad P(B/A) = P(B) \quad \text{deci:}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) \tag{I.2}$$

I.1.2.1. *Probabilități complete*

Dacă evenimentul B are loc în una din ipotezele $A_1, A_2 \ldots A_n$, respectiv $B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$, atunci:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} (A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ P(B/A_i) \tag{I.3}$$

I.1.2.2. *Formulele lui Bayes*

Dacă s-a realizat evenimentul B, probabilitatea ca el să se realizeze în ipoteza A_i se deduce din:

$$P(A_i \cap B) = P(B)\ P(A_i/B) = P(A_i)\ P(B/A_i)$$

de unde:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\ P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ P(B/A_i)} \tag{I.4}$$

I.1.3. Variabile aleatoare discrete

Se numește *variabilă aleatoare* (V.A.) o funcție reală ξ definită pe un sistem complet de evenimente $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Valorile pe care le ia variabila aleatoare le notăm cu x_i. Probabilitatea ca ξ să ia valoarea x_1 se notează:

$$P(A_i) = p(x_i) = p_i$$

I.1.3.1. *Distribuția variabilei aleatoare*

Se numește *distribuția* V.A.ξ ansamblul format din valorile pe care le poate lua ξ și probabilitățile corespunzătoare:

$$[\xi] = [x_1\ x_2 \ldots x_n]$$

$$[P] = [p_1\ p_2 \ldots p_n] \quad \text{cu} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Legea care dă probabilitatea ca V.A. ξ să ia valoarea x_i se numește *lege de distribuție* sau pe scurt *distribuție*:

$$P(x_i) = P\{\xi = x_i\}$$

În cazul a două V.A. avem distribuția de ordinul doi:

$$P_2(x_i,\ y_j) = P\{\xi = x_i;\ \eta = y_j\}$$

Introducînd notația cu doi indici, primul indicînd ordinul funcției de distribuție, al doilea ordinul variabilei, avem:

$$P_{11}(x_i) = P\{\xi = x_i;\ \text{pt } (\forall)\ y_j\} = \sum_{y_j} P_2(x_i,\ y_j) \tag{I.5}$$

$$P_{12}(y_j) = P\{\text{pt. } (\forall)\ x_i;\ \eta = y_j\} = \sum_{x_i} P_2(x_i,\ y_j) \tag{I.6}$$

Aceste distribuții se numesc *distribuții marginale.*

I.1.3.2. *Funcția de repartiție*

Se numește *funcție de repartiție* a variabilei aleatoare ξ, probabilitatea:

$$F(x) = P\{\xi \leqslant x\} = \sum_{x_i \leqslant x} P(x_i) \tag{I.7}$$

Funcția de repartiție de ordinul doi este:

$$F_2(x,\ y) = P\{\xi \leqslant x;\ \eta \leqslant y\} \tag{I.8}$$

$$F_2(x,\ y) = \sum_{x_i \leqslant x} \sum_{y_j \leqslant y} P_2(x_i,\ y_j) \tag{I.9}$$

Funcții de repartiție și distribuții marginale:

$$F_{11}(x) = \sum_{x_i \leqslant x} P_{11}(x_i) = \sum_{x_i \leqslant x} \sum_{y_j} P_2(x_i, y_j) = F_2(x, \infty) \tag{I.10}$$

$$F_{12}(y) = \sum_{y_j \leqslant y} P_{12}(y_j) = \sum_{x_i} \sum_{y_j \leqslant y} P_2(x_i, y_j) = F_2(\infty, y) \tag{I.11}$$

Dacă V.A. sînt independente:

$$P_2(x_i, y_j) = P_{11}(x_i)\, P_{12}(y_j); \quad F_2(x, y) = F_{11}(x)\, F_{12}(y) \tag{I.12}$$

Funcția de repartiție condiționată:

$$F(x/y_j) = \sum_{x_i \leqslant x} P_2(x_i/y_j) \tag{I.13}$$

- **Proprietăți ale funcției de repartiție**

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 0$ pt $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$
2. $F(\infty) = 1, \quad F(-\infty) = 0$

unde $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x)$, $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x)$

3. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a < b$, atunci $P(a < \rho \leqslant b) = F(b) - F(a)$
4. $F(x)$ este monoton crescătoare: $F(a) \leqslant F(b)$ dacă $a < b$.
5. $F(x)$ este continuă la dreapta în $(\forall) a \in \mathbb{R}$

$$F(a + 0) = F(a)$$

6. $F(x)$ este continuă într-un punct a dacă $P(\xi = a) = 0$,

$$F(a - 0) = F(a) \Leftrightarrow P(\xi = a) = 0$$

Dacă $F(x)$ este dată, putem determina probabilitatea ca ξ să aparțină unui interval oarecare:

$$P(a < \xi \leqslant b) = F(b) - F(a)$$

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = F(b) - F(a - 0)$$

$$P(a < \xi < b) = F(b - 0) - F(a)$$

$$P(a \leqslant \xi < b) = F(b - 0) - F(a - 0)$$

I.2. Probabilități pe cîmpuri infinite

I.2.1. Cîmp de evenimente și probabilități

Definiția cîmpului de evenimente dată în § I.1.1. trebuie completată în cazul în care Ω este infinit (măsurarea unei tensiuni de zgomot) prin aceea că și reuniunea unei mulțimi numerabile de evenimente A_i ale cîmpului $\mathfrak{F}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, este un eveniment în $\mathfrak{F}$.

De asemenea, în definiția probabilității se include proprietatea:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{1} P(A_i)$$

În cazul cîmpurilor infinite, evenimentele se prezintă prin mulțimi de puncte.

Funcția P numită probabilitate, împreună cu cîmpul de evenimente $\mathfrak{F}$ și cu spațiul eșantioanelor Ω, formează un cîmp de probabilitate pe care îl notăm $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

I.2.2. Variabilă aleatoare

Fie o funcție reală ξ definită pentru orice eveniment elementar $\omega \in \Omega$. Valoarea pe care o ia funcția ξ în punctul ω o notam cu x.

Dacă mulțimea evenimentelor elementare pentru care $x \leqslant a$, oricare ar fi numărul real a, aparține lui $\mathfrak{F}$ (adică este un eveniment), vom spune că ξ este o variabilă aleatoare.

Prin această definiție, oricărei valori $x \leqslant a$ V.A. ξ îi corespunde o probabilitate.

Această definiție este valabilă și pentru cîmpurile finite de evenimente.

De un interes deosebit este cazul cînd Ω este spațiul $\mathbb{R}^n$ și în particular $\mathbb{R}$.

Variabilele aleatoare definite pe un cîmp infinit de evenimente se numesc discrete dacă iau un număr finit de valori sau dacă numărul valorilor luate este numerabil și se numesc continue dacă mulțimea valorilor luate are puterea continuului.

I.2.3. Densitatea de probabilitate

Fie $F(x)$ funcția de repartiție. Dacă $(\exists)$ o funcție pozitivă $w(x)$, integrabilă pe $(-\infty, \infty)$ cu proprietatea:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} w(u)\, \mathrm{d}u \tag{I.14}$$

atunci $w(x)$ se numește *densitatea de probabilitate* a variabilei aleatoare ξ.

Din proprietățile 3 și 2 ale funcției de repartiție rezultă:

$$P(a < \xi \leqslant b) = \int_{a}^{b} w(x)\, \mathrm{d}x \tag{I.15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\, \mathrm{d}x = 1 \tag{I.16}$$

Dacă funcția $w(x)$ există și este continuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$, vom spune că repartiția variabilei aleatoare ξ este continuă.

Dacă repartiția variabilei aleatoare ξ este continuă, funcția de repartiție $F(x)$ este deci valabilă în orice punct $x \in \mathbb{R}$ și derivata sa este egală cu densitatea de probabilitate:

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = w(x) \tag{I.17}$$

Densitatea de probabilitate de ordinul doi este definită de relația:

$$F_2(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} w_2(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{I.18}$$

cu proprietatea $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1$

și

$$w_2(x, y) = \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x\, \partial y} \tag{I.19}$$

Dacă V.A. ξ și η sînt independente:

$$F_2(x, y) = F_{11}(x)\, F_{12}(y) \Rightarrow w_{11}(x)\, w_{12}(x) \tag{I.20}$$

Funcții de repartiție și densități marginale

$$F_{11}(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(u, v)\, du\, dv \tag{I.21}$$

$$F_{12}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} w_2(u, v)\, du\, dv \tag{I.22}$$

și

$$w_{11}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x, y)\, dy \tag{I.23}$$

$$w_{12}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x, y)\, dx \tag{I.24}$$

Densitatea de probabilitate a V.A. discretă. Funcția de repartiție dată de relația (I.7) poate fi scrisă:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\, u(x - x_i) \tag{I.25}$$

unde $u(x)$ este treapta unitate: $u(x) = 1$ pentru $x \geqslant 0$ și $u(x) = 0$ pentru $x < 0$.

Din această relație rezultă:

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\, \delta(x - x_i) \tag{I.26}$$

unde „δ" este impulsul Dirac.

I.2.3.1. *Repartiții și densități de probabilitate condiționate*

Să considerăm probabilitatea:

$$P(\xi \leqslant x / y < \eta \leqslant y_1) = \frac{P(\xi \leqslant x_1,\ y < \eta \leqslant y_1)}{P(y < \eta \leqslant y_1)}$$

sau

$$P(\xi \leqslant x / y < \eta \leqslant y_1) = \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(u, v)\, du\, dv}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{y}^{y_1} w_2(u, v)\, du\, dv}$$

$$F(x/y) = \lim_{y_1 \to y} P(\xi \leqslant x / y < \eta \leqslant y_1) = \frac{\int_{-\infty}^{x} w_2(u, y)\, du}{\int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x, y)\, dx}$$

iar

$$w(x/y) = \frac{\partial F(x/y)}{\partial x} = \frac{w_2(x, y)}{w_{12}(y)} \tag{I.27}$$

sau

$$w_2(x, y) = w_{12}(y)\, w(x/y) = w_{11}(x)\, w(y/x) \tag{I.28}$$

În cazul continuu, formula probabilităților complete devine:

$$w_{11}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x/y)\, w_{12}(y)\, dy \tag{I.29}$$

I.3. Valoarea medie a unei variabile aleatoare

Integrala (Stieltjes)

$$\overline{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \mathrm{d}F(x) \tag{I.30}$$

se numește *valoare medie* a V.A. ξ, dacă integrala este convergentă.

$F(x)$ este funcția de repartiție a V.A.ξ.

Dacă $F(x)$ este continuă, valoarea medie a V.A.ξ, poate fi exprimată printr-o integrală Riemann:

$$\overline{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x)\, \mathrm{d}x \tag{I.31}$$

unde $w(x)$ este *densitatea de probabilitate.*

În cazul în care ξ este o V.A. discretă:

$$\overline{\xi} = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \tag{I.32}$$

I.4. Funcții caracteristice

Se numește *funcție caracteristică* a V.A. ξ valoarea medie:

$$\Phi(v) = \mathrm{e}^{\overline{jv\xi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{jvx} w(x)\, \mathrm{d}x \tag{I.33}$$

fiindcă $|\mathrm{e}^{jvx}| = 1$, integrala (I.33) este convergentă pentru $(\forall)\, v$ și pentru oricare densitate de probabilitate $w(x)$.

Funcțiile $\Phi(v)$ sînt perechi Fourier, deci

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v)\, \mathrm{e}^{-jvx}\, \mathrm{d}v \tag{I.34}$$

I.4.1. Densitatea de probabilitate a unei sume de V.A. independente

Fie

$$\xi = \sum_i \xi_i \tag{I.35}$$

iar

$$\mathrm{e}^{jv\xi} = \mathrm{e}^{jv\xi_1} \mathrm{e}^{jv\xi_2} \ldots = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{jv\xi_i} \tag{I.36}$$

deci

$$\Phi(v) = \overline{e^{jv\xi}} = \prod_{i=1}^{n} \overline{e^{jv\xi_i}} = \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(v) \tag{I.37}$$

unde

$$\Phi_i(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{1i}(x_i)\, e^{jvx_i}\, dx_i \tag{I.38}$$

aceste funcții determină pe $\Phi(v)$, iar din relația (I.34) se obține $w(x)$.

Dacă V.A. au o distribuție normală:

$$\Phi_i(v) = e^{ja_i v - \frac{\sigma_i^2 v^2}{2}} \tag{I.39}$$

unde a_i sînt valorile medii, iar σ_i^2 dispersiile; punînd $a = \sum_i a_i$ și $\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2$ se obține:

$$\Phi(v) = \prod_i \Phi_i(v) = e^{jav - \frac{\sigma^2 v^2}{2}} \tag{I.40}$$

respectiv

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} \tag{I.41}$$

adică suma V.A. normale independente este o V.A. normală. Rezultatul acesta poate fi generalizat și pentru cazul unor combinații liniare de V.A. normale, fără restricția independenței. Suma rezultantă, în acest caz, este un vector aleator cu o distribuție normală multidimensională.

I.5. Teorema limită centrală

Teorema limită centrală poate fi formulată în modul următor:

1. dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sînt V.A. cu distribuții oarecare;
2. dacă $\overline{\xi_1} = \overline{\xi_2} = \ldots = \overline{\xi_n} = 0$;
3. dacă V.A. sînt independente, sau au coeficienți de corelație mutuală care tind spre zero;
4. dacă valoarea fiecărei V.A. particulare ξ_k este neglijabilă față de suma tuturor variabilelor,

atunci densitatea de probabilitate a sumei $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ pentru n foarte mare tinde spre:

$$w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

adică spre o lege normală.

I.6. *Convergența variabilelor aleatoare.*

Spunem că V.A. ξ_n converge în *probabilitate* către V.A. ξ cînd $n \to \infty$, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\} = 0 \tag{I.42}$$

O condiție necesară și suficientă pentru ca această limită să existe, este ca pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$ și $(\forall)\ \lambda > 0$, să existe un N, astfel încît:

$$P\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} < \lambda \quad \text{pt.} \quad (\forall)\ n, m \geq N.$$

Spunem că V.A. ξ_n converge în *medie patratică* către V.A. ξ, cînd $n \to \infty$, dacă:

$$lim\ \overline{|\xi_n - \xi|^2} = 0$$

Această limită se mai scrie:

$$l.i.m._{n\to\infty}\ \xi_n = \xi$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca această limită să existe, este că pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, există un N astfel încît:

$$\overline{|\xi_n - \xi_m|^2} < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad (\forall)\ n, m \geq N$$

Convergența în medie patratică implică convergența în probabilitate.

TABELE ANEXE

TABELUL A.I.1

Valorile funcției $w(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3132	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107

TABELUL A.I.1 (continuare)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

TABELUL A.I.2

Valorile funcției $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16670	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24357	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30311	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39769	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42789	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49765	49801	49807
2,9	49813	49816	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

Valorile funcției $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$
0,01	1,0000	2,85	0,1009	5,70	−0,0966	8,55	0,0898
0,05	0,9996	2,90	0,0825	5,75	−0,0884	8,60	0,0854
0,10	0,9983	2,95	0,0646	5,80	−0,0801	8,65	0,0809
0,15	0,9963	3,00	0,0470	5,85	−0,0718	8,70	0,0762
0,20	0,9933	3,05	0,0300	5,90	−0,0634	8,75	0,0714
0,25	0,9896	3,10	0,0134	5,95	−0,0550	8,80	0,0665
0,30	0,9851	3,15	−0,0027	6,00	−0,0466	8,85	0,1614
0,35	0,9797	3,20	−0,0182	6,05	−0,0382	8,90	0,0563
0,40	0,9735	3,25	−0,0333	6,10	−0,0299	8,95	0,0511
0,45	0,9666	3,30	−0,0478	6,15	−0,0216	9,00	0,0458
0,50	0,9589	3,35	−0,0618	6,20	−0,0134	9,05	0,0404
0,55	0,9503	3,40	−0,0752	6,25	−0,0053	9,10	0,0351
0,60	0,9411	3,45	−0,0880	6,30	+0,0027	9,15	0,0297
0,65	0,9311	3,50	−0,1002	6,35	0,0105	9,20	0,0242
0,70	0,9203	3,55	−0,1119	6,40	0,0182	9,25	0,0188
0,75	0,9089	3,60	−0,1229	6,45	0,0257	9,30	0,0134
0,80	0,8967	3,65	−0,1334	6,50	0,0331	9,35	0,0080
0,85	0,8839	3,70	−0,1432	6,55	0,0403	9,40	0,0026
0,90	0,8704	3,75	−0,1524	6,60	0,0472	9,45	−0,0027
0,95	0,8562	3,80	−0,1610	6,65	0,0539	9,50	−0,0079
1,00	0,8415	3,85	−0,1690	6,70	0,0604	9,55	−0,0131
1,05	0,8261	3,90	−0,1764	6,75	0,0667	9,60	−0,0182
1,10	0,8102	3,95	−0,1831	6,80	0,0727	9,65	−0,0231
1,15	0,7937	4,00	−0,1892	6,85	0,0784	9,70	−0,0280
1,20	0,7767	4,05	−0,1947	6,90	0,0838	9,75	−0,0328
1,25	0,7592	4,10	−0,1996	6,95	0,0890	9,80	−0,0374
1,30	0,7412	4,15	−0,2039	7,00	0,0939	9,85	−0,0419
1,35	0,7228	4,20	−0,2075	7,05	0,0984	9,90	−0,0462
1,40	0,7039	4,25	−0,2106	7,10	0,1027	9,95	−0,0504
1,45	0,6846	4,30	−0,2131	7,15	0,1066	10,0	−0,0544
1,50	0,6650	4,35	−0,2150	7,20	0,1102	10,1	−0,0619
1,55	0,6450	4,40	−0,2163	7,25	0,1135	10,2	−0,0686
1,60	0,6247	4,45	−0,2170	7,30	0,1165	10,3	−0,0745
1,65	0,6042	4,50	−0,2172	7,35	0,1191	10,4	−0,0796
1,70	0,5833	4,55	−0,2169	7,40	0,1216	10,5	−0,0838
1,75	0,5623	4,60	−0,2160	7,45	0,1234	10,6	−0,0871
1,80	0,5410	4,65	−0,2146	7,50	0,1251	10,7	−0,0894
1,85	0,5196	4,70	−0,2127	7,55	0,1265	10,8	−0,0908
1,90	0,4981	4,75	−0,2104	7,60	0,1274	10,9	−0,0913
1,95	0,4764	4,80	−0,2075	7,65	0,1280	11,0	−0,0909
2,00	0,4546	4,85	−0,2042	7,70	0,1283	11,1	−0,0896
2,05	0,4329	4,90	−0,2005	7,75	0,1283	11,2	−0,0874
2,10	0,4111	4,95	−0,1963	7,80	0,1280	11,3	−0,0844
2,15	0,3893	5,00	−0,1918	7,85	0,1274	11,4	−0,0806
2,20	0,3675	5,05	−0,1868	7,90	0,1264	11,5	−0,0761
2,25	0,3458	5,10	−0,1815	7,95	0,1252	11,6	−0,0709
2,30	0,3242	5,15	−0,1759	8,00	0,1237	11,7	−0,0651
2,35	0,3028	5,20	−0,1699	8,05	0,1218	11,8	−0,0588
2,40	0,2814	5,25	−0,1636	8,10	0,1197	11,9	−0,0519
2,45	0,2603	5,30	−0,1570	8,15	0,1174	12,0	−0,0447
2,50	0,2394	5,35	−0,1502	8,20	0,1147	12,1	−0,0372
2,55	0,2187	5,40	−0,1431	8,25	0,1118	12,2	−0,0294
2,60	0,1983	5,45	−0,1358	8,30	0,1087	12,3	−0,0214
2,65	0,1781	5,50	−0,1283	8,35	0,1053	12,4	−0,0134
2,70	0,1583	5,55	−0,1206	8,40	0,1017	12,5	−0,0053
2,75	0,1388	5,60	−0,1127	8,45	0,0979	12,6	+0,0027
2,80	0,1196	5,65	−0,1047	8,50	0,0939	12,7	0,0105

TABELUL A.I.3 (continuare)

x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$
12,8	0,0181	16,7	−0,0501	25,0	−0,0053	63,0	+0,0027
12,9	0,0254	16,8	−0,0528	26,0	+0,0293	64,0	0,0144
13,0	0,0323	16,9	−0,0550	27,0	0,0354	65,0	0,0127
13,1	0,0388	17,0	−0,0566	28,0	0,0097	66,0	−0,0004
13,2	0,0449	17,1	−0,0576	29,0	−0,0229	67,0	−0,0128
13,3	0,0503	17,2	−0,0580	30,0	−00329	68,0	−0,0132
13,4	0,0553	17,3	−0,0578	31,0	−0,0130	69,0	−0,0017
13,5	0,0595	17,4	−0,0570	32,0	+0,0172	70,0	+0,0111
13,6	0,0632	17,5	−0,0558	33,0	0,0303	71,0	0,0134
13,7	0,0661	17,6	−0,0539	34,0	0,0156	72,0	0,0035
13,8	0,0684	17,7	−0,0516	35,0	−0,0122	73,0	−0,0093
13,9	0,0699	17,8	−0,0487	36,0	−0,0275	74,0	−0,0133
14,0	0,0708	17,9	−0,0454	37,0	−0,0174	75,0	−0,0052
14,1	0,0709	18,0	−0,0417	38,0	+0,0078	76,0	+0,0076
14,2	0,0703	18,1	−0,0376	39,0	0,0247	77,0	0,0132
14,3	0,0690	18,2	−0,0332	40,0	0,0186	78,0	0,0069
14,4	0,0671	18,3	−0,0285	41,0	−0,0039	79,0	−0,0061
14,5	0,0645	18,4	−0,0236	42,0	−0,0218	80,0	−0,0124
14,6	0,0613	18,5	−0,0185	43,0	−0,0193	81,0	−0,0078
14,7	0,0575	18,6	−0,0133	44,0	+0,0004	82,0	+0,0038
14,8	0,0533	18,7	−0,0080	45,0	0,0189	83,0	0,0117
14,9	0,0485	18,8	−0,0026	46,0	0,0196	84,0	0,0087
15,0	0,0434	18,9	−0,0027	47,0	0,0063	85,0	−0,0021
15,1	0,0378	19,0	0,0079	48,0	−0,0160	86,0	−0,0107
15,2	0,0320	19,1	0,0130	49,0	−0,0195	87,0	−0,0095
15,3	0,0259	19,2	0,0179	50,0	−0,0053	88,0	+0,0004
15,4	0,0197	19,3	0,0226	51,0	+0,0131	89,0	0,0097
15,5	0,0133	19,4	0,0270	52,0	0,0190	90,0	0,0099
15,6	0,0069	19,5	0,0311	53,0	0,0075	91,0	0,0012
15,7	0,0005	19,6	0,0348	54,0	−0,0104	92,0	−0,0085
15,8	−0,0058	19,7	0,0382	55,0	−0,0182	93,0	−0,0102
15,9	−0,0120	19,8	0,0411	56,0	−0,0093	94,0	−0,0026
16,0	−0,0180	19,9	0,0436	57,0	+0,0077	95,0	+0,0072
16,1	−0,0237	20,0	0,0457	58,0	0,0171	96,0	0,0103
16,2	−0,0292	21,0	0,0398	59,0	0,0108	97,0	0,0032
16,3	−0,0342	22,0	−0,0004	60,0	−0,0051	98,0	−0,0059
16,4	−0,0389	23,0	−0,0368	61,0	−0,0158	99,0	−0,0101
16,5	−0,0431	24,0	−0,0377	62,0	−0,0119	100,0	−0,0051
16,6	−0,0469						

Valorile funcției $f(x) = -\log_2 x$
pentru $0{,}01 \leqslant x \leqslant 0{,}99$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	—	6,6439	5,6439	5,0589	4,6439	4,3219	4,0589	3,8365	3,6439	3,4740
0,1	3,3219	3,1845	3,0589	2,9435	2,8365	2,7370	2,6439	2,5564	2,4740	2,3960
0,2	2,3219	2,2516	2,1845	2,1203	2,0589	2,0000	1,9435	1,8890	1,8365	1,7859
0,3	1,7370	1,6897	1,6439	1,5995	1,5564	1,5146	1,4740	1,4344	1,3960	1,3585
0,4	1,3219	1,2864	1,2516	1,2176	1,1845	1,1520	1,1203	1,0893	1,0589	1,0292
0,5	1,0000	0,9715	0,9435	0,9160	0,8890	1,8625	0,8365	0,8110	0,7859	0,7613
0,6	0,7370	0,7132	0,6897	0,6666	0,6439	0,6215	0,5995	0,5778	0,5564	0,5354
0,7	0,5146	0,4941	0,4740	0,4541	0,4344	0,4151	0,3960	0,3771	0,3585	0,3401
0,8	0,3219	0,3040	0,2864	0,2689	0,2516	0,2345	0,2176	0,2009	0,1845	0,1682
0,9	0,1520	0,1361	0,1203	0,1047	0,0893	0,0741	0,0589	0,0440	0,0292	0,0145

Valorile funcției $f(x) = \log_2 x$
pentru $1 \leqslant x \leqslant 99$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0,0000	1,0000	1,5850	2,0000	2,3219	2,5850	2,8074	3,0000	3,1699
1	3,3219	3,4594	3,5850	3,7004	3,8074	3,9069	4,0000	4,0875	4,1699	4,2479
2	4,3219	4,3923	4,4594	4,5236	4,5850	4,6439	4,7004	4,7549	4,8074	4,8580
3	4,9069	4,9542	5,0000	5,0444	5,0875	5,1293	5,1699	5,2095	5,2479	5,2854
4	5,3219	5,3575	5,3923	5,4263	5,4494	5,4919	5,5236	5,5546	5,5850	5,6147
5	5,6493	5,6724	5,7004	5,7279	5,7549	5,7814	5,8074	5,8329	5,8580	5,8826
6	5,9069	5,9307	5,9542	5,9773	6,0000	6,0224	6,0444	6,0661	6,0875	6,1085
7	6,1293	6,1498	6,1699	6,1898	6,2095	6,2288	6,2479	6,2668	6,2854	6,3038
8	6,3219	6,3399	6,3575	6,3750	6,3923	6,4094	6,4263	6,4430	6,4594	6,4757
9	6,4919	6,5078	6,5236	6,5392	6,5546	6,5698	6,5850	6,5999	6,6147	6,6294

Valorile funcției $f(x) = -x \log_2 x$

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	—	0,0100	0,0179	0,0251	0,0319	0,0382	0,0443	0,0501	0,0557	0,0612
0,01	0,0664	0,0716	0,0766	0,0815	0,0862	0,0909	0,0955	0,0999	0,1043	0,1086
0,02	0,1129	0,1170	0,1211	0,1252	0,1291	0,1330	0,1369	0,1407	0,1444	0,1481
0,03	0,1518	0,1554	0,1589	0,1624	0,1659	0,1693	0,1727	0,1760	0,1793	0,1825
0,04	0,1852	0,1889	0,1921	0,1952	0,1983	0,2013	0,2043	0,2073	0,2103	0,2132
0,05	0,2161	0,2190	0,2218	0,2246	0,2274	0,2301	0,2329	0,2356	0,2383	0,2409
0,06	0,2435	0,2461	0,2487	0,2513	0,2538	0,2563	0,2588	0,2613	0,2637	0,2661
0,07	0,2686	0,2709	0,2733	0,2756	0,2780	0,2803	0,2826	0,2848	0,2871	0,2893
0,08	0,2915	0,2937	0,2959	0,2980	0,3002	0,3023	0,3044	0,3065	0,3086	0,3106
0,09	0,3127	0,3147	0,3167	0,3187	0,3207	0,3226	0,3246	0,3265	0,3284	0,3303
0,10	0,3322	0,3341	0,3359	0,3378	0,3396	0,3414	0,3432	0,3450	0,3468	0,3485
0,11	0,3503	0,3520	0,3537	0,3555	0,3571	0,3588	0,3605	0,3622	0,3638	0,3654
0,12	0,3671	0,3687	0,3703	0,3719	0,3734	0,3750	0,3766	0,3781	0,3796	0,3811
0,13	0,3826	0,3841	0,3856	0,3871	0,3886	0,3900	0,3915	0,3929	0,3943	0,3957
0,14	0,3971	0,3985	0,3999	0,4012	0,4026	0,4040	0,4053	0,4066	0,4079	0,4092
0,15	0,4105	0,4118	0,4131	0,4144	0,4156	0,4169	0,4181	0,4194	0,4206	0,4238
0,16	0,4230	0,4242	0,4254	0,4266	0,4277	0,4289	0,4301	0,4312	0,4323	0,4335
0,17	0,4346	0,4357	0,4368	0,4379	0,4390	0,4400	0,4411	0,4422	0,4432	0,4443
0,18	0,4453	0,4463	0,4474	0,4484	0,4494	0,4504	0,4514	0,4523	0,4533	0,4543
0,19	0,4552	0,4562	0,4571	0,4581	0,4590	0,4599	0,4608	0,4617	0,4626	0,4635
0,20	0,4644	0,4653	0,4661	0,4670	0,4678	0,4687	0,4695	0,4704	0,4712	0,4720
0,21	0,4728	0,4736	0,4744	0,4752	0,4760	0,4768	0,4776	0,4783	0,4791	0,4788
0,22	0,4806	0,4813	0,4820	0,4828	0,4835	0,4842	0,4849	0,4856	0,4863	0,4870
0,23	0,4877	0,4883	0,4890	0,4897	0,4903	0,4910	0,4916	0,4923	0,4949	0,4935
0,24	0,4941	0,4947	0,4954	0,4960	0,4966	0,4971	0,4977	0,4983	0,4989	0,4994
0,25	0,5000	0,5006	0,5011	0,5016	0,5022	0,5027	0,5032	0,5038	0,5043	0,5048
0,26	0,5053	0,5058	0,5063	0,5068	0,5072	0,5077	0,5082	0,5087	0,5091	0,5096
0,27	0,5100	0,5105	0,5109	0,5113	0,5118	0,5122	0,5126	0,5130	0,5134	0,5138
0,28	0,5142	0,5146	0,5150	0,5154	0,5158	0,5161	0,5165	0,5169	0,5172	0,5176
0,29	0,5179	0,5182	0,5186	0,5189	0,5192	0,5196	0,5199	0,5202	0,5205	0,5208
0,30	0,5211	0,5214	0,5217	0,5220	0,5222	0,5225	0,5228	0,5230	0,5233	0,5235
0,31	0,5228	0,5240	0,5243	0,5245	0,5247	0,5250	0,5252	0,5254	0,5256	0,5258
0,32	0,5260	0,5262	0,5264	0,5266	0,5268	0,5270	0,5272	0,5273	0,5275	0,5277
0,33	0,5278	0,5280	0,5281	0,5283	0,5284	0,5286	0,5287	0,5288	0,5289	0,5290
0,34	0,5292	0,5293	0,5294	0,5295	0,5296	0,5297	0,5298	0,5299	0,5299	0,5300

0,35	0,5301	0,5302	0,5302	0,5303	0,5304	0,5304	0,5305	0,5305	0,5305	0,5206
0,36	0,5306	0,5306	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307
0,37	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5306	0,5306	0,5306	0,5305	0,5305
0,38	0,5304	0,5304	0,5304	0,5303	0,5302	0,5302	0,5301	0,5300	0,5300	0,5299
0,39	0,5298	0,5297	0,5296	0,5295	0,5294	0,5293	0,5292	0,5293	0,5290	0,5289
0,40	0,5288	0,5286	0,5285	0,5284	0,5283	0,5281	0,5280	0,5278	0,5277	0,5275
0,41	0,5274	0,5272	0,5271	0,5269	0,5267	0,5266	0,5264	0,5262	0,5260	0,5258
0,42	0,5256	0,5255	0,5253	0,5251	0,5249	0,5246	0,5244	0,5242	0,5240	0,5238
0,43	0,5236	0,5233	0,5231	0,5229	0,5226	0,5224	0,5222	0,5219	0,5217	0,5214
0,44	0,5211	0,5209	0,5206	0,5204	0,5201	0,5298	0,5195	0,5193	0,5190	0,5237
0,45	0,5184	0,5181	0,5178	0,5175	0,5172	0,5169	0,5166	0,5163	0,5160	0,5157
0,46	0,5153	0,5150	0,5147	0,5144	0,5140	0,5137	0,5133	0,5130	0,5127	0,5123
0,47	0,5120	0,5116	0,5112	0,5109	0,5105	0,5102	0,5098	0,5094	0,5090	0,5087
0,48	0,5083	0,5079	0,5075	0,5071	0,5067	0,5063	0,5059	0,5055	0,5051	0,5047
0,49	0,5043	0,5039	0,5034	0,5030	0,5026	0,5022	0,5017	0,5013	0,5009	0,5004
0,50	0,5000	0,4996	0,4991	1,4987	0,4982	0,4978	0,4873	0,4968	0,4964	0,4959
0,51	0,4954	0,4950	0,4945	0,4940	0,4935	0,4930	0,4926	0,4921	0,4916	0,4911
0,52	0,4906	0,4901	0,4896	0,4891	0,4886	0,4880	0,4875	0,4870	0,4865	0,4860
0,53	0,4854	0,4849	0,4844	0,4839	0,4833	1,4828	0,4822	0,4817	0,4811	0,4806
0,54	0,4800	0,4795	0,4789	0,4784	0,4778	0,4772	0,4767	0,4761	0,4755	0,4750
0,55	0,4744	0,4738	0,4732	0,4726	0,4720	0,4714	0,4708	0,4702	0,4697	0,4691
0,56	0,4684	0,4678	0,4672	0,4666	0,4660	0,4654	0,4648	0,4641	0,4635	0,4629
0,57	0,4623	0,4616	0,4610	0,4603	0,4597	0,4591	0,4584	0,4578	0,4571	0,4565
0,58	0,4558	0,4551	0,4545	0,4538	0,4532	0,4525	0,4518	0,4512	0,4505	0,4498
0,59	0,4491	0,4484	0,4477	0,4471	0,4464	0,4457	0,4450	0,4443	0,4436	0,4429
0,60	0,4422	0,4415	0,4408	0,4401	0,4393	0,4386	0,4379	0,4372	0,4365	0,4357
0,61	0,4350	0,4343	0,4335	0,4328	0,4321	0,4313	0,4306	0,4298	0,4291	0,4283
0,62	0,4276	0,4268	0,4261	0,4253	0,4246	0,4238	0,4230	0,4223	0,4215	0,4207
0,63	0,4199	0,4192	0,4184	0,4176	0,4168	0,4160	0,4153	0,4145	0,4137	0,4129
0,64	0,4121	0,4113	0,4105	0,4097	0,4089	0,4080	0,4072	0,4064	0,4056	0,4048
0,65	0,4040	0,4032	0,4023	0,4015	0,4007	0,3998	0,3990	0,3982	0,3973	0,3995
0,66	0,3957	0,3948	0,3940	0,3931	0,3922	0,3914	0,3905	0,3897	0,3888	0,3880
0,67	0,3871	0,3862	0,3854	0,3845	0,3836	0,3828	0,3819	0,3810	0,3801	0,3792
0,68	0,3784	0,3775	0,3766	0,3857	0,3748	0,3739	0,3730	0,3721	0,3712	0,3703
0,69	0,3694	0,3685	0,3676	0,3666	0,3657	0,3648	0,3639	0,3430	0,3621	0,3611
0,70	0,3602	0,3593	0,3583	0,3574	0,3565	0,3555	0,3546	0,3536	0,3527	0,3518
0,71	0,3508	0,3499	0,3489	0,3480	0,3470	0,3461	0,3451	0,3441	0,3432	0,3422
0,72	0,3412	0,3403	0,3393	0,3383	0,3373	0,3364	0,3354	0,3344	0,3334	0,3324
0,73	0,3314	0,3304	0,3295	0,3285	0,3275	0,3265	0,3255	0,3245	0,3235	0,3225
0,74	0,3215	0,3204	0,3194	0,3184	0,3174	0,3164	0,3154	0,3144	0,3133	0,3123
0,75	0,3113	0,3103	0,3092	0,3082	0,3071	0,3061	0,3051	0,3040	0,3030	0,3019
0,76	0,3009	0,2999	0,2988	0,2978	0,2967	0,2956	0,2946	0,2935	0,2925	0,2914

TABELUL A.I.5 (continuare)

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,77	0,2903	0,2893	0,2882	0,2871	0,2861	0,2850	0,2839	0,2828	0,2818	0,2807
0,78	0,2796	0,2785	0,2774	0,2763	0,2735	0,2741	0,2731	0,2720	0,2709	0,2698
0,79	0,2687	0,2676	0,2664	0,2653	0,2642	0,2631	0,2620	0,2609	0,2598	0,2587
0,80	0,2575	0,2564	0,2535	0,2542	0,2531	0,2519	0,2508	0,2497	0,2485	0,2474
0,81	0,2462	0,2451	0,2440	0,2428	0,2417	0,2405	0,2394	0,2382	0,2371	0,2359
0,82	0,2348	0,2336	0,2324	0,2313	0,2301	0,2990	0,2278	0,2266	0,2255	0,2243
0,83	0,2231	0,2220	0,2208	0,2196	0,2184	0,2172	0,2160	0,2149	0,2137	0,2125
0,84	0,2113	0,2101	0,2089	0,2077	0,2065	0,2053	0,2041	0,2029	0,2017	0,2005
0,85	0,1993	0,1981	0,1996	0,1957	0,1944	0,1932	0,1920	0,1908	0,1896	0,1884
0,86	0,1871	0,1859	0,1847	0,1834	0,1822	0,1810	0,1797	0,1785	0,1773	0,1760
0,87	0,1748	0,1735	0,1723	0,1711	0,1698	0,1686	0,1673	0,1661	0,1648	0,1635
0,88	0,1623	0,1610	0,1598	0,1585	0,1572	0,1560	0,1547	0,1534	0,1522	0,1509
0,89	0,1496	0,1484	0,1471	0,1458	0,1445	0,1432	0,1419	0,1407	0,1394	0,1381
0,90	0,1368	0,1355	0,1342	0,1329	0,1316	0,1303	0,1290	0,1277	0,1264	0,1251
0,91	0,1238	0,1225	0,1212	0,1199	0,1186	0,1173	0,1159	0,1146	0,1133	0,1120
0,92	0,1107	0,1094	0,1080	0,1067	0,1054	0,1040	0,1027	0,1014	0,1000	0,0987
0,93	0,0974	0,0960	0,0947	0,0933	0,0920	0,0907	0,0893	0,0880	0,0866	0,0833
0,94	0,0839	0,0826	0,0812	0,0798	0,0785	0,0771	0,0758	0,0744	0,0730	0,0717
0,95	0,0703	0,0689	0,0676	0,0662	0,0648	0,0634	0,0621	0,0607	0,0593	0,0579
0,96	0,0565	0,0552	0,0538	0,0524	0,0510	0,0495	0,0482	0,0466	0,0462	0,0458
0,97	0,0422	0,0412	0,0398	0,0384	0,0376	0,0376	0,0358	0,0343	0,0325	0,0314
0,98	0,0286	0,0271	0,0257	0,0243	0,0230	0,0214	0,0201	0,0186	0,0172	0,0158

STRUCTURI ALGEBRICE ȘI ELEMENTE DE CALCUL ÎN CÎMPURI FINITE

II.1. Structuri algebrice

Fie două mulțimi oarecare notate cu M și Ω.

O aplicație $f : M \times M \to M$, se numește *lege de compoziție internă* pe mulțimea M.

Ea asociază fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$, elementul $f(x, y)$. Vom nota $f(x, y)$ cu $x + y$ sau $x \cdot y$.

Numim *lege de compoziție externă* pe M, o aplicație $g : \Omega \times M \to M$, care asociază fiecărei perechi $(\lambda, x) \in \Omega \times M$ elementul $g(\lambda, x)$, $\lambda \in \Omega$, $x \in M$.

Spunem că pe mulțimea M avem dată o *structură algebrică*, dacă pe M s-a definit o lege de compoziție (internă sau externă) cu anumite proprietăți.

II.1.1. Grup

Fie G o mulțime înzestrată cu o lege internă notată aditiv „$+$". Spunem că G are o structură de *grup* (aditiv), dacă legea „$+$" este asociativă, posedă element neutru și orice element din G are un simetric față de această lege. Adică G este grup în următoarele condiții:

1. $(\forall)\ x, y, z \in G \Rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $(\exists)\ e \in G$ *a.î.* $(\forall)\ x \in G \Rightarrow x + e = e + x = x$
3. $(\forall)\ x \in G$, $(\exists)\ x' \in G$ *a.î.* $x + x' = x' + x = e$

unde e este elementul neutru. Elementul x' se notează cu $-x$.

Un grup G se numește *abelian* sau grup comutativ, dacă pentru $(\forall)\ x, y \in G \Rightarrow x + y = y + x$.

Se numește *grup cu operatori* orice grup G înzestrat cu o lege de compoziție externă, distributivă față de operația de grup.

Un grup G se numește *finit*, dacă mulțimea G are un număr finit de elemente.

Numărul elementelor din grupul finit G se numește *ordinul grupului*.

Fie o lege internă de tip multiplicativ, notată „$\cdot$", care definește pe G o structură de grup. În G se pot construi puterile întregi ale unui element $a \in G$ punînd:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ factori}}$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n$$

$$a^0 = e$$

Un grup G se numește *monogen* dacă este generat de unul dintre elementele sale. Un grup monogen finit se numește *ciclic*.

Într-un grup, cel mai mic număr natural n pentru care $a^n = e$ se numește *ordinul elementului* a.

Fie G și G' grupuri; o aplicație $f : G \to G'$ se numește *omomorfism* al grupului G în G' dacă oricare ar fi $x, y \in G$ avem $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Un omomorfism bijectiv se numește *izomorfism.*

Orice omomorfism al lui G în G se numește *endomorfism.*

Orice izomorfism al lui G în G se numește *automorfism.*

Fie $G_1 \subset G$ o submulțime în grupul G. Spunem că G_1 este un *subgrup* în grupul G, dacă legea de compoziție internă din G induce pe G_1 o structură de grup.

Condiția necesară și suficientă ca $G_1 \subset G$ să fie un subgrup în G este ca $(\forall) x, y \in G_1 \Rightarrow x - y \in G_1$ (criteriul subgrupului).

II.1.2. Inel

Mulțimea I înzestrată cu două legi de compoziție interne, una notată aditiv „$+$" și alta multiplicativ „$\cdot$" se numește *inel*, dacă:

1. I are o structură de grup abelian față de legea „$+$";
2. legea „$\cdot$" este asociativă și distributivă în raport cu legea „$+$". Dacă în plus are loc și proprietatea de comutativitate în raport cu legea „$\cdot$", I se numește *inel comutativ*. Dacă în raport cu legea „$\cdot$" există element neutru (unitate), I se numește *inel unitar.*

În inelul I elementul $a \neq 0$ este *divizor al lui zero* dacă $(\exists)\ b \in I,\ b \neq 0$, astfel încît: $a \cdot b = 0$. Dacă $a \neq 0$ este divizor al lui zero, atunci din relația $ax = ay$ nu rezultă $x = y$. Elementul a este element *regulat*, dacă din $ax = ay$ rezultă $x = y$.

Un inel I comutativ cu unitate și fără divizori ai lui zero se numește *domeniu de integritate* (inel de întregi). Într-un domeniu de integritate, relația $ab = 0$ implică sau $a = 0$ sau $b = 0$, iar $a^n = 0$ implică $a = 0$.

Se numește *subinel* al unui inel I orice submulțime $I_1 \subset I$ pentru care legile de compoziție din I induc în I_1 o structură de inel.

Condiția necesară și suficientă ca $I_1 \subset I$ să fie un subinel este ca:

$$(\forall)\ x, y \in I_1 \Rightarrow x - y \in I_1 \quad \text{și} \quad x \cdot y \in I_1$$

Se numește *ideal* stîng (respectiv drept) în inelul I orice submulțime $I_1 \subset I$ cu proprietatea că:

1. I_1 este subgrup aditiv în I $((\forall)\ x, y \in I_1 \Rightarrow x - y \in I_1)$.
2. $(\forall)\ x \in I_1$ și $(\forall)\ y \in I \Rightarrow y \cdot x \in I_1$ (pentru ideal stîng) respectiv,
   $(\forall)\ x \in I_1$ și $(\forall)\ y \in I \Rightarrow x \cdot y \in I_1$ (pentru ideal drept).

Un ideal în același timp stîng și drept se numește *ideal bilateral.* Orice ideal este subinel.

Pentru inelele comutative, noțiunile de ideal stîng și ideal drept coincid. Dacă inelul I este un inel cu unitate, atunci unitatea nu aparține nici unui ideal.

Fie $\mathbb{Z}$ inelul întregitor și P mulțimea multiplilor întregului pe $\in \mathbb{Z}$. Mulțimea P formează un ideal în raport cu $\mathbb{Z}$.

Se numește *ideal generat* de o submulțime $A \subset I$ intersecția tuturor idealurilor din I, care conțin pe A.

Într-un inel comutativ, idealul generat de un element arbitrar fixat $a \in I$ se numește *ideal principal*. Spunem că I este un inel principal dacă orice ideal al său este principal.

Se numește *caracteristica inelului* I cel mai mic întreg natural q pentru care $q \cdot x = 0$, oricare ar fi $x \in I$. *Caracteristica inelului cu unitate* este cel mai mic întreg natural c pentru care $q \cdot 1 = 0$.

Spunem că elementul $y \in I$ divide elementul $x \in I$ dacă $(\exists)\ z \in I$ astfel încît $x = y \cdot z$ (y se numește *divizor* pentru x).

Un element $y \in I$ se numește *divizor propriu* pentru elementul $x \in I$ dacă $(\exists)\, z \in I$ astfel încît $x = y \cdot z$ și în plus y nu este inversabil în I.

Elementele $x, y \in I$ se numesc *prime* între ele în I dacă nu au nici un divizor propriu comun.

Condiția necesară și suficientă ca $x, y \in I$ să fie prime între ele este ca să $(\exists)\, a, b \in I$ astfel încît:

$$ax + by = 1 \text{ (teorema lui Bézout).}$$

II.1.3. Clase de resturi

O lege de compoziție „$*$" definită pe mulțimea M este *compatibilă cu o relație de echivalență* R pe M dacă și numai dacă:

$$(\forall)\, x, y, x', y' \in M,\ xRy \quad \text{și} \quad x'Ry' \Rightarrow x * x'Ry * y'$$

Pe inelul întregilor $\mathbb{Z}$, legile de compoziție „$+$" și „$\cdot$„ sînt compatibile cu relația de echivalență R, cunoscută sub numele de *relație de echivalență „modulo p"*:

$$\text{fie} \quad p \in \mathbb{N},\ (\forall)\, x, y \in \mathbb{Z}\ xRy \Leftrightarrow x - y = p \cdot q,\ q \in \mathbb{Z}$$

Această relație de echivalență se notează:

$$x \equiv y \pmod{p}.$$

Pe orice mulțime M, o relație de echivalență R permite construirea *mulțimii cît* (factor) notată M/R.

Orice lege de compoziție „$*$" pe o mulțime M, compatibilă cu R pe M, induce pe M/R o lege de compoziție internă „$\hat{*}$" (numită *lege cît*).

Pe inelul $\mathbb{Z}$, relația de echivalență „modulo p" conduce la mulțimea factor $\mathbb{Z}/R^{not}Z_p = \{C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}\}$ înzestrată cu operațiile „$\hat{+}$" și „$\hat{\cdot}$" induse de cele două operații din $\mathbb{Z}$ astfel: $(\forall)\, C_x, C_y \in Z_p$.

1. $C_x \hat{+} C_y = C_{x+y}$
2. $C_x \hat{\cdot} C_y = C_{x \cdot y}$

În raport cu cele două legi „$\hat{+}$" și „$\hat{\cdot}$", mulțimea Z_p este un inel. Relația de echivalență „modulo p" determină o partiție a inelului $\mathbb{Z}$ în clase de echivalență numite clase de resturi „modulo p".

Prima clasă este formată din idealul generat de elementul $p \in \mathbb{Z}$, respectiv de mulțimea multiplilor întregului p.

Deorece idealul nu epuizează toate elementele inelului, se poate găsi un element din inel care nu aparține idealului, de ex. elementul 1. Acesta poate fi ales ca prim element al clasei următoare, ale cărei elemente se formează prin adunarea elementului 1 cu fiecare din elementele idealului. Operația se continuă pînă la epuizarea tuturor elementelor inelului. Ultima clasă are ca prim element, elementul $p - 1$,

$$\begin{array}{llllll} 0, & p & , -p & , 2p, & -2p & , \ldots \\ 1, & p+1, & -p+1, & 2p+1, & -2p+1, & \ldots \\ \vdots & & & & & \\ p-1, & 2p-1, & -1 & , 3p-1, & -p-1, & \ldots \end{array}$$

Prin această partiție fiecare element al inelului se găsește într-una și numai una din clasele de resturi. Fiecare clasă de resturi modulo p conține sau pe 0 sau un întreg pozitiv mai mic decît p.

Convenim să notăm clasele de resturi cu $\{\ \}$, fiecare element al unei clase putînd să reprezinte clasa:

$$\begin{aligned}
&\{0\} \quad = \{p\} \quad = \{-p\} \quad = \ldots \\
&\{1\} \quad = \{p+1\} = \{-p+1\} = \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\{p-1\} = \{2p-1\} = \{-1\} \quad = \ldots
\end{aligned}$$

În general vom alege primul element ca fiind reprezentant al clasei.

Un element oarecare „a" al inelului se găsește în clasa de resturi $\{r\}$, dacă și numai dacă rest $\frac{a}{p} = r$.

În particular, dacă considerăm inelul format din mulțimea numerelor întregi, iar prima clasă ca fiind idealul format din multiplii lui 2, obținem clasele de resturi modulo 2:

$$\begin{aligned}
&0, \quad 2, \quad -2, \quad 4, \quad -4, \ldots \\
&1, \quad 3, \quad -1, \quad 5, \quad -3, \ldots
\end{aligned}$$

pe care le notăm cu $\{0\}$ și $\{1\}$.

Operațiile între aceste clase sînt:

$$\begin{aligned}
&\{1\}+\{1\} = \{1+1\} = \{2\} = \{0\} \qquad \{1\}\cdot\{1\} = \{1\} \\
&\{1\}+\{0\} = \{1\} \qquad \text{și} \qquad \{1\}\cdot\{0\} = \{0\} \\
&\{0\}+\{0\} = \{0\} \qquad\qquad\quad \{0\}\cdot\{0\} = \{0\}
\end{aligned}$$

Cînd nu se pot crea confuzii, vom nota clasele cu 0 și 1, renunțînd la paranteze.

În cadrul structurii de grup, clasele astfel formate se numesc *clase alăturate*.

II.1.3. Corp

O mulțime K înzestrată cu două legi de compoziție (notate aditiv și respectiv multiplicativ) are o structură de *corp* dacă:

1. K are o structură de inel;
2. mulțimea elementelor diferite de zero formează un grup multiplicativ.

Deci, un corp K, este un inel cu unitate în care orice element $\neq 0$ este inversabil.

Un corp K în care operația „$\cdot$" este comutativă se numește *cîmp*.

O submulțime $K_1 \subset K$ este un subcorp în K, dacă legile de compoziție din K induc pe K_1 o structură de corp. Condiția necesară și suficientă ca o submulțime $K_1 \subset K$ să fie subcorp este să avem îndeplinite condițiile:

1. $(\forall)\ x \in K_1$ și $(\forall)\ y \in K_1 \Rightarrow x - y \in K_1$;
2. $(\forall)\ x \in K_1$ și $(\forall)\ y \in K_1,\ y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in K_1$

Orice corp K este un domeniu de integritate. Într-un corp, considerat ca inel, singurele ideale sînt $\{0\}$ și K.

Corpul K fiind inel cu unitate și fără divizori ai lui zero, vom numi *caracteristica* corpului K cel mai mic întreg natural p pentru care $p \cdot 1 = 0$. În acest caz K se numește *corp de caracteristică finită* și anume de caracteristică p.

Exemple de corpuri de caracteristică finită sînt toate corpurile finite; există însă și corpuri infinite de caracteristică finită.

Dacă K este de caracteristică p, atunci p este prim.

● **Demonstrație.** Presupunem că $p = s \cdot t$, unde $s < p$, $t < p$ $(s \cdot 1)(t \cdot 1) = p \cdot 1 = 0$

Neexistînd divizori ai lui 0, rezultă că sau $s \cdot 1 = 0$ sau $t \cdot 1 = 0$, ceea ce contrazice faptul că p este cel mai mic întreg care satisface relația $p \cdot 1 = 0$, q.e.d.

Dacă caracteristica corpului K este p, atunci pentru orice element a din acest corp are loc egalitatea: $p \cdot a = 0$.

● **Demonstrație.** $p \cdot a = (p \cdot 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$

Dacă caracteristica corpului K este zero, atunci din $n \neq 0$ și $a \neq 0$ rezultă $n \cdot a \neq 0$. De exemplu, corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ au caracteristica zero.

În concluzie, caracteristica unui corp K este sau nulă sau un număr prim.

În corpul de caracteristică p este satisfăcută relația:

$$(a + b)^p = a^p + b^p \tag{II.1}$$

● **Demonstrație.** Folosind formula de dezvoltare a binomului avem:

$$(a + b)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} b + C_p^2 a^{p-2} b^2 + \ldots + C_p^{p-1} a b^{p-1} + b^p$$

Vom arăta că $C_p^1, C_p^2, \ldots, C_p^{p-1}$ sînt multiplii de p.

Întradevăr, $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ și pentru $0 < k < p$, rezultă $0 < p - k < p$, deci orice factor care apare la numitor este strict mai mic decît p, deci este prim cu p. Cum K are caracteristica p, rezultă $p \cdot x = 0$ pentru $(\forall) x \in K$, deci $C_p^k a^{p-k} b^k = 0$ pentru $0 < k < p$, q.e.d.

Corpul K se numește *prim* dacă nu conține nici un subcorp diferit de el însuși.

Inelul claselor de resturi Z_p cu p prim este un cîmp.

● **Demonstrație.** Fie $Z_p = \{C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}\}$

Oricare ar fi clasa $C_x \neq C_0$, avem că $1 \leqslant x < p$. Întrucît p este prim, rezultă că x și p sînt prime între ele și conform teoremei lui Bézout $(\exists)$ α, $\beta \in \mathbb{Z}$, astfel încît $\alpha x + \beta y = 1$

$$\alpha x - 1 = (-\beta)\, p \Leftrightarrow C_{\alpha x} = C_1.$$

Dar $C_{\alpha \cdot x} = C_\alpha \cdot C_x$. Rezultă deci $C_\alpha C_x = 1$, ceea ce înseamnă că C_x este inversabil (q.e.d).

Corpurile de clase de resturi Z_p(cu p prim) sînt prime și se numesc *cîmpuri Galois* (cu p elemente). Ele se notează $GF(p)$.

Fie date corpurile K și L așa fel încît $K \subset L$. Corpul L se numește *extensia* corpului K, dacă structura algebrică de corp indusă pe K de structura lui L coincide cu structura lui K.

Dacă L este o extensie a corpului K, atunci L este spațiu vectorial peste K. Dimensiunea spațiului vectorial se numește *gradul extinderii* L peste K.

II.1.4. Spațiu vectorial

Un grup abelian M se numește *modul* la stînga (respectiv la dreapta) peste inelul I dacă există o lege de compoziție externă: $I \times M \to M$ care asociază fiecărei perechi (α, x) elementul $\alpha \cdot x \in M$ (respectiv $x \cdot \alpha \in M$) astfel ca:

1. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (respectiv $(x + y) \cdot \alpha = x \cdot \alpha + y \cdot \alpha$)
2. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (respectiv $x \cdot (\alpha + \beta) = x \cdot \alpha + x \cdot \beta$)
3. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ (respectiv $(x \cdot \beta)\alpha = x \cdot (\beta \cdot \alpha)$).

Dacă inelul I este comutativ, atunci noțiunile de modul la dreapta și modul la stînga coincid.

Orice inel poate fi considerat ca un modul la stînga sau la dreapta peste el însuși.

Dacă inelul I este cu unitate și $1 \cdot x = x$ oricare ar fi $x \in M$, atunci modulul se numește *unitar*.

Orice modul unitar peste un corp K se numește *spațiu vectorial* peste K.

Elementele unui spațiu vectorial se numesc vectori iar elementele corpului K scalari.

Orice corp K poate fi privit ca spațiu vectorial peste el însuși.

Fie E un spațiu vectorial peste un corp K și $E_1 \subset E$ o parte a sa nevidă.

Spunem că $E_1 \subset E$ este un *subspațiu vectorial* în E dacă cele două operații date pe E (adunarea vectorilor și înmulțirea unui vector ca un scalar) induc pe E_1 o structură de spațiu vectorial peste K.

● **Criteriul subspațiului.** Condiția necesară și suficientă ca $E_1 \subset E$ să fie un subspațiu este ca:

$$(\forall)\, x, y \in E_1 \quad \text{și} \quad (\forall)\, \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in E_1.$$

Fie I o familie de indici și fie $\{x_i\}_{i \in I}$ o familie de elemente din E și $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ o familie de scalari din K; orice element $x \in E$ de forma

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

unde $\lambda_i = 0$, cu excepția unui număr finit de indici, se numește *combinație liniară* a familiei $\{x_i\}_{i \in I}$.

Dacă familia $\{a_i\}_{i \in I} \in E$ este dată, atunci mulțimea combinațiilor liniare ale familiei formează un subspațiu vectorial peste K, numit *subspațiul generat* de familia $\{a\}_{i \in I}$.

Vectorii familiei se numesc *generatori*.

Vectorii familiei $\{a_i\}_{i \in I}$ se numesc *liniar independenți*, dacă și numai dacă relația $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0$ implică $\lambda_i = 0$ pentru toți indicii $i \in I$.

Dacă vectorii familiei $\{a_i\}_{i \in I}$ nu sînt liniar independenți, atunci se numesc *liniar dependenți* sau *legați*.

Orice familie $\{a_i\}_{i \in I}$ de vectori liniar independenți care generează spațiul E se numește *bază* a lui E.

Dacă $\{a_i\}_{i \in I}$ este o bază a spațiului E, atunci oricare ar fi $x \in E$ există familia de elemente $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ din K astfel încît:

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i.$$

Scalarii din familia $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ se numesc *coordonatele* vectorului x. Reprezentarea vectorului x în baza $\{a_i\}_{i\in I}$ este unică.

Numărul elementelor din bază (finit sau infinit) se numește *dimensiunea spațiului.*

II.1.5. Algebra

Fie I un inel comutativ cu unitate; mulțimea A se numește *algebră peste* I dacă:

1. A este inel;
2. A este modul peste I;
3. $(\forall)\ \alpha \in I$ și $(\forall)\ x, y \in A \Rightarrow 1 \cdot x = x$ și $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x)\, y = x(\alpha \cdot y)$.

În cazul cînd inelul I este un corp K (comutativ), vom spune că avem o *algebră peste un corp* K.

II.2. Elemente de calcul în cîmpuri finite

Fie F un corp și fie $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ unde $a_i \in F$, un polinom de grad n în necunoscuta x peste corpul F.

Mulțimea tuturor polinoamelor cu coeficienți în F este un *inel*, comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui zero, notat cu $F[x]$, (a se verifica).

În inelul $F[x]$, mulțimea $P[x]$ a multiplilor polinomului $p(x) \in F[x]$ formează un ideal (a se verifica).

Un polinom $f(x) \in F[x]$ se numește *ireductibil* dacă nu este divizibil cu nici un polinom $g(x) \in F[x]$, astfel ca $0 < \text{grad } g < \text{grad } f$.

Dacă singurul divizor comun al polinoamelor $f(x)$ și $g(x) \in F[x]$ este un polinom de grad zero, polinoamele se numesc *prime* între ele.

Dacă polinoamele $f(x)$ și $g(x)$ sînt prime între ele

$$(\exists)\ u(x), v(x) \in F[x]$$

astfel încît

$$f(x)\, u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1.$$

Elementele inelului $F[x]$ pot fi organizate în clase de resturi în raport cu idealul $P[x]$ format din toți multiplii unui polinom, de grad n, $p(x) \in F[x]$. Aceste clase se numesc *clase de resturi modulo* $p(x)$ și sînt similare claselor de resturi modulo p, un număr întreg. În cazul în care coeficienții se găsesc într-un corp cu două elemente $(0,1)$, avem:

0	$p(x)$	$0+$multiplii lui $p(x)$
1	$1+p(x)$	$1+$multiplii lui $p(x)$
x	$x+p(x)$	$x+$ „
$1+x$	$1+x+p(x)$	$1+x+$ „
$1+x+\ldots+x^{n-1}$	$1+x+\ldots+x^{n-1}+p(x)$ ...	$1+x+\ldots+x^{n-1}+$multiplii lui $p(x)$

Clasele de resturi ale polinoamelor modulo un polinom $p(x)$ de grad n formează o algebră (a se verifica axiomele algebrei).

Vom nota aceste clase în următoarele moduri:

$$\{a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}\} = \{a_0\} + \{a_1\}\{x\} + \ldots + \{a_{n-1}\}\{x^{n-1}\} =$$
$$= A_0 + A_1 X + \ldots + A_{n-1}X^{n-1}$$

Se obișnuiește să se noteze clasa A_i chiar cu elementul ei reprezentant a_i. Rezultă notația:

$$\{a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}\} = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$$

În general, în locul notației $\{f(x)\}$ se va utiliza notația $f(X)$.

Fie J un ideal în algebra polinoamelor modulo $p(x)$ și fie $g(x)$ un polinom nenul, de grad minim, astfel încît $g(X) \in J$.

Atunci o clasă oarecare $s(X)$ este în J dacă și numai dacă $s(x)$ e divizibil prin $g(x)$.

● **Demonstrație.** *Necesitatea*:

Fie $s(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, grad $r <$ grad g.

Rezultă $s(X) = g(X)\ q(X) + r(X)$

Cum $s(X)$ și $g(X) \in J \Rightarrow s(X) - g(X) \cdot q(x) \in J$ deci și $r(X) \in J$ ceea ce contrazice ipoteza că $g(x)$ este polinomul de gradul cel mai mic din J. Deci este necesar ca $s(x)$ să fie divizibil prin $g(x)$.

Suficiența: Fie $s(x) = g(x) \cdot q(x)$ și deci $s(X) = g(X) \cdot q(X)$ cum $g(X) \in J$ rezultă că și $s(X) \in J$,q.e.d.

Corolar: Polinomul $g(x)$ divide pe $p(x)$.

● **Demonstrație.** Fie $p(x) = g(x)\ q(x) + r(x)$, grad $r <$ grad g

$$\{0\} = p(X) = g(X)\ q(X) + r(X)$$

Deoarece $g(X)\ q(X) \in J$ rezultă că și $r(X) \in J$, ceea ce contravine ipotezei. Deci $r(x) = 0^-$ și $p(x)$ este un multiplu al lui $g(x)$.

Polinomul $g(x)$ de grad minim, cu proprietatea că $g(X) \in J$, se numește *polinom generator* al idealului J.

În algebra polinoamelor modulo $p(x)$ dacă $g(x) \cdot h(x) = p(x)$ atunci $a(X)$ este în *spațiul nul* al idealului generat de $h(x)$, dacă și numai dacă este în idealul generat de $g(x)$.

● **Demonstrație.** *Suficiența*. Fie $a(X)$ în idealul generat de $g(x)$ și fie $b(X)$ o clasă oarecare în idealul generat de $h(x)$. Atunci $a(x)$ este un multiplu al polinomului $g(x)$ și $b(x)$ un multiplu al lui $h(x)$, iar $a(x)\ b(x)$ este un multiplu al lui $p(x)$.

Rezultă $a(X) \cdot b(X) = \{a(x) \cdot b(x)\} = 0$. Deci $a(X)$ este în spațiul nul al idealului generat de $h(x)$.

Necesitatea. Dacă $a(X) \cdot h(X) = 0$, atunci $a(x)\ h(x)$ trebuie să fie un multiplu al polinomului $p(x)$. Deci $a(x)$ trebuie să fie divizibil cu $g(x)$ și rezultă că $a(X)$ se află în idealul generat de $g(x)$.

II.2.1 Teorema de existență a rădăcinii

Pentru orice polinom $q(x)$ ireductibil de grad m peste corpul F există o extensie a acestui corp, astfel încît în ea se găsește o rădăcină a lui $q(x)$.

Demonstrarea teoremei constă în construirea unei extensii a corpului F, care să conțină o rădăcină a lui $q(x)$. Pentru aceasta luăm întreg inelul polinoamelor $F[x]$ și îl împărțim în clase fără elemente comune, punînd în aceeași clasă polinoamele care prin împărțirea cu polinomul dat $q(x)$ dau același rest (clase de resturi).

Pentru a arăta că mulțimea claselor de resturi formează un corp, trebuie de fapt să arătăm că pentru fiecare element există și elementul invers. Unitatea va fi clasa polinoamelor care împărțite prin $q(x)$ dau restul 1 și o vom nota cu E.

Fie acum dată o clasă A, diferită de cea nulă. Polinomul $\varphi(x)$ ales ca reprezentant al clasei A nu se va împărți exact prin $q(x)$ și de aceea, ținînd seama de ireductibilitatea polinomului $q(x)$, aceste două polinoame sînt prime între ele.

Deci $(\exists)\ u(x)$ și $v(x)$ satisfăcînd relația:

$$\varphi(x)\,u(x) + q(x)\,v(x) = 1$$

de unde:

$$\varphi(x)\,u(x) = 1 - q(x)\,v(x)$$

Membrul al doilea dă restul 1 prin împărțirea la $q(x)$, deci $\in E$. Dacă notăm cu B clasa căreia îi aparține $u(x)$ vom obține: $A \cdot B = E$, de unde $B = A^{-1}$. Cu aceasta, existența elementului invers pentru orice clasă nenulă este demonstrată și deci mulțimea claselor de resturi constituie un corp. Vom nota cu X clasa formată din polinoamele care, împărțite cu $q(x)$ dau restul x. Această clasă servește ca rădăcină a polinomului $q(x)$.

Fie $q(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Oricărui element a din corpul F îi corespunde clasa formată din polinoamele care împărțite prin $q(x)$ dau restul a; elementul a, considerat ca polinom de grad zero, aparține el însuși acestei clase, care se notează cu A. Elementelor $a_i \in F$ le corespund clasele A_i.

Clasa $A_m X^m + A_{m-1}X^{m-1} + \ldots + A_1 X + A_0$ conține polinomul $q(x)$. Însă $q(x)$ se împarte exact cu el însuși și de aceea clasa care îl conține este clasa nulă,

$$A_m X^m + A_{m-1}X^{m-1} + \ldots + A_1 X + A_0 = 0$$

Înlocuind clasele A_i prin elementele a_i din corpul F deducem că

$$a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0 = 0$$

adică clasa X este efectiv rădăcină a polinomului $q(x)$.

În concluzie, mulțimea claselor de resturi modulo $q(x)$ — un polinom de grad m, cu coeficienți în cîmpul F, ireductibil în acest cîmp, formează un cîmp numit *cîmp Galois* și notat $GF(p^m)$.

Acest cîmp se numește o extensie algebrică de grad m a cîmpului F, care se numește *cîmp de bază* și se notează $GF(p)$.

Se poate arăta că orice cîmp finit este izomorf cu un cîmp Galois.

II.2.2. Teoreme cu aplicații la teoria codurilor

Formularea este făcută pentru cazul codurilor binare și deci vom lua în considerare numai cîmpurile Galois $GF(2)$ și extensiile $GF(2^m)$.

În cazul în care $p = 2$ operația de adunare notată cu „+" este echivalentă cu operația de scădere „—" și ca urmare aceasta va fi notată tot cu „+".

● **Teorema 1.** *Elementele cîmpului $GF(2^m)$, cu excepția elementului nul, formează un grup multiplicativ ciclic* (cu $2^m - 1$ elemente).

Demonstrație. Pentru a demonstra că acest grup este ciclic, vom arăta că el conține cel puțin un element de ordinul $n = 2^m - 1$.

Fie numărul n descompus în factori primi de forma:

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r}.$$

Pentru fiecare factor $p_i^{e_i}$ există un element $\beta_i \in GF(2^m)$ de ordinul $p_i^{e_i}$, $i = \overline{1, r}$.

Fie $p_1^{e_1}$ și $p_2^{e_2}$, ele fiind relativ prime $(\exists)\, s, t$ astfel încît $sp_1^{e_1} + tp_2^{e_2} = 1$. Folosind această relație rezultă că:

$$(\beta_1\beta_2)^{sp_1^{e_1}} = \beta_2^{sp_1^{e_1}} = \beta_2^{1-tp_2^{e_2}} = \beta_2 \quad \text{iar}$$

$$(\beta_1\beta_2)^{tp_2^{e_2}} = \beta_1^{tp_2^{e_2}} = \beta_1^{1-sp_1^{e_1}} = \beta_1$$

Deci β_1 și β_2 sînt puteri ale lui $\beta_1\beta_2$

Dacă $(\exists)\, a > 1$ astfel încît $(\beta_1\beta_2)^{\frac{p_1^{e_1} p_2^{e_2}}{a}} = 1$, atunci sau β_1 are ordinul mai mic decît $p_1^{e_1}$, sau β_2 are ordinul mai mic decît $p_2^{e_2}$ și rezultă o contradicție. Ca urmare $\beta_1\beta_2$ are ordinul $p_1^{e_1}p_2^{e_2}$. Se demonstrează prin inducție că elementul

$$\alpha = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_r \text{ are ordinul } p_1^{e_1}p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r} = n \qquad \text{q.e.d.}$$

Definiția 1. Elementul α se numește *element primitiv* dacă toate cele $2^m - 1$ elemente nenule din $GF(2^m)$ pot fi exprimate ca puteri ale lui α. Ordinul elementului primitiv α este $n = 2^m - 1$, respectiv $\alpha^n = 1$.

Definiția 2. Dacă una din rădăcinile polinomului ireductibil $g(x)$ de grad m, cu coeficienți în $GF(2)$, este element primitiv al cîmpului $GF(2^m)$, polinomul se numește *primitiv*, (se poate demonstra că pentru fiecare grad, există cel puțin un polinom primitiv).

● **Teorema 2.** *Polinomul $x^n + 1$, în care $n = 2^m - 1$, are ca rădăcini toate elementele nenule ale cîmpului $GF(2^m)$ în număr de $n = 2^m - 1$.*

Demonstrație. În $GF(2^m)$ există un element primitiv α de ordin $n = 2^m - 1$, respectiv $\alpha^n = 1$. Deci α este o rădăcină a polinomului $x^n + 1$.
În acest caz și α^2 este o rădăcină fiindcă

$$(\alpha^2)^n = (\alpha^n)^2 = 1, \text{ la fel } \alpha^3 \ldots \alpha^{n-1} \qquad \text{q.e.d.}$$

● **Teorema 3.** *Fie $q(x)$ un polinom ireductibil, de grad m și fie $\alpha \in GF(2^m)$ o rădăcină a lui. Atunci și α, α^2, $\alpha^{2^2} \ldots \alpha^{2^{m-1}}$ sînt rădăcini ale lui $q(x)$.*

Demonstrație. Fie $q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$, $a_i \in GF(2)$
Atunci conform relației (II.1) avem

$$[g(x)]^2 = a_0^2 + a_1^2x^2 + \ldots + a_m^2x^{2m}$$

Dacă $a_i = \{0\}$ atunci $a_i^2 = \{0\}$ iar
dacă $a_i = \{1\}$ atunci $a_i^2 = a_i$
Rezultă: $[q(x)]^2 = q_0 + a_1x^2 + \ldots + a_mx^{2m}$
Deci, dacă α este o rădăcină a polinomului $q(x)$ și α^2 este o rădăcină.
Ridicînd la pătrat relația precedentă, rezultă că și α^4 este o rădăcină ș.a.m.d.

● **Teorema 4.** *Toate rădăcinile unui polinom primitiv au același ordin.*

Demonstrație. Conform teoremei 3, dacă α este o rădăcină, atunci și α^{2^i} este o rădăcină. Fie e ordinul lui α și e' ordinul lui α^{2^i}.
Atunci $(\alpha^{2^i})^e = \alpha^{e2^i} = (\alpha^e)^{2^i} = 1^{2^i} = 1$
deci e' divide pe e, respectiv

$$\alpha^{e'} = (\alpha^2)^{e'} = \alpha^{2^i 2^{m-i} e'} = [(\alpha^2)^{e'}]^{2^{m-i}} = 1^{2^{m-i}} = 1$$

deci e divide pe e'.
Rezultă că $e' = e$, q.e.d.

● **Teorema 5.** *Polinomul* $x^n + 1$ *este divizibil cu polinomul* $x^m + 1$ *dacă și numai dacă* n *este divizibil cu* m.

Demonstrație. N e c e s i t a t e a. Presupunem că $n = mk + r$, unde $r < m$.

Atunci $x^n + 1 = x^r(x^{mk} + 1) + x^r + 1$

Conform algoritmului de împărțire

$$x^n + 1 = q(n)\,(x^m + 1) + r(x)$$

Comparînd cele două ecuații rezultă:

$$q(x) = \frac{x^r(x^{mk} + 1)}{x^m + 1} \text{ și } r(x) = x^r + 1$$

Restul $r(x)$ este zero numai dacă $r = 0$, deci numai dacă m divide pe n.

S u f i c i e n ț a. Fie $n = km$. Polinomul $y + 1$ divide polinomul $y^k + 1$ pentru că $y = 1$ este o rădăcină a lui $y^k + 1$.

Punînd $x^m = y$ avem $x^n + 1 = y^k + 1$ care este divizibil cu $y + 1 = x^m + 1$ · q.e.d.

Definiția 3. Polinomul $m(x)$, de gradul cel mai mic, cu coeficienți în $GF(2)$, care are ca rădăcină un element $\beta \in GF(2^m)$, se numește *polinom minimal* al lui β.

● **Teorema 6.** *Dacă un polinom oarecare* $f(x)$ *cu coeficienți în* $GF(2)$ *are ca rădăcină pe* $\beta \in GF(2^m)$, $f(\beta) = 0$, *atunci* $f(x)$ *este divizibil cu* $m(x)$, *polinomul minimal al lui* β.

Demonstrație. Conform algoritmului lui Euclid avem:

$$f(x) = m(x)\,q(x) + r(x), \text{ unde grad } r < \text{grad } m.$$

Deoarece $f(\beta) = 0$ și $m(\beta) = 0$ rezultă $r(\beta) = 0$

Ori acest lucru se poate întîmpla numai dacă $r(x) \equiv 0$, fiindcă gradul lui $r(x)$ este mai mic decît al polinomului $m(x)$.

● **Teorema 7.** *Orice element din* $GF(2^m)$ *are un polinom minimal de grad* m *sau mai mic.*

Demonstrație. Cîmpul $GF(2^m)$ fiind de dimensiune m, pentru oricare element $\alpha \in GF(2^m)$ mulțimea formată din $m + 1$ elemente și anume $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^m$ nu poate fi liniar independentă

$$a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

Există deci un polinom de grad m (sau mai mic)

$$m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

astfel încît $m(\alpha) = 0$

Definiția 4. Se numește *perioada* unui polinom $q(x)$ cel mai mic întreg r astfel încît $q(x)$ divide pe $x^r + 1$.

II.3. Proprietățile matricei de control a codurilor B.C.H.

Dacă polinomul $g(x)$ are ca rădăcini elementele $\alpha, \alpha^3, \ldots, \alpha^{2e-1} \in GF(2^m)$ se obține un cod capabil să corecteze e erori independente.

Demonstrație

Fie $$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^0 & \alpha^3 & \alpha^6 & \dots & \alpha^{3(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ \alpha^0 & \alpha^{2e-1} & \alpha^{(2e-1)} & \dots & \alpha^{(2e-1)\,(n-1)} \end{bmatrix}$$

Presupunem că $(\exists)\, q \leqslant 2e$ coloane din matricea $\mathbf{H}$ liniar dependente. Rezultă:

$$\begin{cases} \alpha^{i_1} + \alpha^{i_2} + \dots + \alpha^{i_q} = 0 \\ (\alpha^{i_1})^3 + (\alpha^{i_2})^3 + \dots + (\alpha^{i_q})^3 = 0 \\ (\alpha^{i_1})^{2e-1} + (\alpha^{i_2})^{2e-1} + \dots + (\alpha^{i_q})^{2e-1} = 0 \end{cases}$$

Notăm $\alpha i_1 = y_1 \dots \alpha^{i_q} = y_q$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \dots + y_q = 0 \\ y_1^3 + y_2^3 + \dots + y_q^3 = 0 \\ \vdots \\ y_1^{2e-1} + y_2^{2e-1} + \dots + y_q^{2e-1} = 0 \end{cases}$$

În corpurile de caracteristică 2, conform relației (II.1) este satisfăcută relația:

$$(y_1^i + y_2^i + \dots + y_q^i)^2 = y_1^{2i} + y_2^{2i} + \dots + y_q^{2i}$$

Rezultă un nou sistem cu $2e$ ecuații, din care reținem doar q ecuații:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \dots + y_q = 0 \\ y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_q^2 = 0 \\ y_1^3 + y_2^3 + \dots + y_q^3 = 0 \\ \vdots \\ y_1^q + y_2^q + \dots + y_q^q = 0 \end{cases}$$

Ținînd seama de aceste relații, rezultă că determinantul care are suma coloanelor egală cu zero, este nul:

$$y_1 y_2 \dots y_q \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ y_1 & y_2 & \dots y_q \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots y_q^2 \\ y_1^{q-1} & y_1^{q-1} & \dots y_q^{q-1} \end{vmatrix} = 0$$

Fiindcă elementele $y_1, y_2, \dots, y_q$ nu sînt nule, rezultă că determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ y_1 & y_2 & \dots y_q \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots y_q^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{q-1} & y_2^{q-2} & \dots y_q^{q-1} \end{vmatrix}$$

este nul.

Ori, acest determinant este *determinantul lui Vandermonde*, a cărui valoare este:

$$D = \prod_{i>j} (y_i - y_j)$$

Fiindcă elementele $y_1 = \alpha^{i_1}$, $y_2 = \alpha^{i_2}$, ..., $y_2 = \alpha^{i_q}$ sînt elemente distincte ale cîmpului $GF(2^m)$, rezultă că D nu poate fi nul, și în consecință nu există $q \leqslant 2e$ coloane liniar dependente.

Rezultă deci că $2e$ coloane ale matricei **H** sînt liniar independente, deci codul este capabil să corecteze e erori independente.

TABELUL A.II.1

Numărul polinoamelor ireductibile $N(r)$ modulo p

$p=$	2	3	5	7	11
$r = 1$	2	3	5	7	11
2	1	3	10	21	55
3	2	8	40	112	440
4	3	18	150	588	3630
5	6	48	624	3360	22208
6	9	116	2580	12215	
7	18	312	11160		
8	30	810	48750		
9	56	2457			
10	99	5880			

unde r este gradul polinomului ireductibil

TABELUL A.II.2

Numărul polinoamelor primitive $M(m)$ modulo p

$p=$	2	3	5	7	11
$m = 1$	1	1	2	2	4
2	1	2	4	8	16
3	2	4	20	48	176
4	2	8	48	160	960
5	6	22	304	1120	
6	6	48	720		
7	18	156			
8	18	320			
9	48	1008			
10	60	2640			

unde m este gradul polinomului primitiv

TABELUL A.II.3

Polinoame binare ireductibile și perioada lor

Polinom ireductibil	Perioada	Primitivă
$x + 1$	1	nu
$x^2 + x + 1$	3	da
$x^3 + x + 1$	7	da
$x^3 + x^2 + 1$	7	da
$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	5	nu
$x^4 + x + 1$	15	da
$x^4 + x^3 + 1$	15	da
$x^5 + x^2 + 1$	31	da
$x^5 + x^3 + 1$	31	da
$x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$	31	da
$x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$	31	da
$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$	31	da
$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$	31	da

Descompunerea în factori a polinoamelor (pînă la gradul 9) în cîmpul binar

Reprezentare binară	Polinoame $P(x)$
	$m = 1$
10	x
11	$x + 1$
	$m = 2$
101	$x^2 + 1 = (x + 1)^2$
111	$x^2 + x + 1$
	$m = 3$
1001	$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$
1011	$x^3 + x + 1$
1101	$x^3 + x^2 + 1$
1111	$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3$
	$m = 4$
10001	$x^4 + 1 = (x + 1)^4$
10011	$x^4 + x + 1$
10101	$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2$
10111	$x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
11001	$x^4 + x^3 + 1$
11011	$x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)$
11101	$x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)$
11111	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
	$m = 5$
100001	$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
100011	$x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
100101	$x^5 + x^2 + 1$
100111	$x^5 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x + 1)$
101001	$x^5 + x^3 + 1$
101011	$x^5 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
101101	$x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^3(x^2 + x + 1)$
101111	$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
110001	$x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)$
110011	$x^5 + x^4 + x + 1 = (x + 1)^5$
110101	$x^5 + x^4 + x + 1 = (x + 1)(x^4 + x + 1)$
110111	$x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
111001	$x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x^2 + 1)$
111011	$x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$
111101	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
111111	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)\,(x^2 + x + 1)^2$
	$m = 6$
1000001	$x^6 + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2$
1000011	$x^6 + x + 1$
1000101	$x^6 + x^2 + 1 = (x^3 + x + 1)^2$
1000111	$x^6 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1001001	$x^6 + x^3 + 1$
1001011	$x^6 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^3(x^3 + x^2 + 1)$
1001101	$x^6 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1001111	$x^6 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
1010001	$x^6 + x^4 + 1 = (x^3 + x^2 + 1)^2$
1010011	$x^6 + x^4 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)$
1010101	$x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)^6$
1010111	$x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$
1011001	$x^6 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1011011	$x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$
1011101	$x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1011111	$x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^4 + x + 1)$
1100001	$x^6 + x^5 + 1$
1100011	$x^6 + x^5 + x + 1 = (x + 1)^2(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Reprezentare binară	Polinoame $P(x)$
1100101	$x^6 + x^5 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
1100111	$x^6 + x^5 + x^2 + x + 1$
1101001	$x^6 + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)^3(x^3 + x + 1)$
1101011	$x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)^3$
1101101	$x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$
1101111	$x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^5 + x^2 + 1)$
1110001	$x^6 + x^5 + x^4 + 1 = (x + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1110011	$x^6 + x^5 + x^4 + x + 1$
1110101	$x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$
1110111	$x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^4(x^2 + x + 1)$
1111001	$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^4 + x + 1)$
1111011	$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^5 + x^3 + 1)$
1111101	$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^4 + x^3 + 1)$
1111111	$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
	$m = 7$
10000001	$x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
10000011	$x^7 + x + 1$
10000101	$x^7 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
10000111	$x^7 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3(x^4 + x^3 + 1)$
10001001	$x^7 + x^3 + 1$
10001011	$x^7 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x + 1)$
10001101	$x^7 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^5 + x^3 + 1)$
10001111	$x^7 + x^3 + x^2 + x + 1$
10010001	$x^7 + x^4 + 1$
10010011	$x^7 + x^4 + x + 1 = (x + 1)^2(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
10010101	$x^7 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x + 1)$
10010111	$x^7 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^2 + x + 1)$
10011001	$x^7 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)^5(x^2 + x + 1)$
10011011	$x^7 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
10011101	$x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
10011111	$x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1)$
10100001	$x^7 + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
10100011	$x^7 + x^5 + x + 1 = (x + 1)(x^6 + x^5 + 1)$
10100101	$x^7 + x^5 + x^2 + 1 = (x + 1)^3(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
10100111	$x^7 + x^5 + x^2 + x + 1$
10101001	$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^6 + x^5 + x^2 + x + 1)$
10101011	$x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$
10101101	$x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^4 + x + 1)$
10101111	$x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^2 + x^2 + 1)$
10110001	$x^7 + x^5 + x^4 + 1 = (x + 1)^2(x^5 + x^2 + 1)$
10110011	$x^7 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
10110101	$x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
10110111	$x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)$
10111001	$x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$
10111011	$x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^4(x^3 + x + 1)$
10111101	$x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)^3$
10111111	$x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
11000001	$x^7 + x^6 + 1$
11000011	$x^7 + x^6 + x + 1 = (x + 1)^3(x^2 + x + 1)^2$
11000101	$x^7 + x^6 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^6 + x + 1)$
11000111	$x^7 + x^6 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x + 1)$
11001001	$x^7 + x^6 + x^3 + 1 = (x + 1)^2(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
11001011	$x^7 + x^6 + x^3 + x + 1$
11001101	$x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
11001111	$x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)^2$
11010001	$x^7 + x^6 + x^4 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
11010011	$x^7 + x^6 + x^4 + x + 1$
11010101	$x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$
11010111	$x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$

Reprezentare binară	Polinoame $P(x)$
11011001	$x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
11011011	$x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$
11011101	$x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^4(x^3 + x^2 + 1)$
11011111	$x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$
11100001	$x^7 + x^6 + x^5 + 1 = (x + 1)^3(x^4 + x + 1)$
11100011	$x^7 + x^6 + x^5 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
11100101	$x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + 1$
11100111	$x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
11101001	$x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^3 + x^2 + 1)$
11101011	$x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^2(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
11101101	$x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^6 + x^4 + x^3 + x + 1)$
11101111	$x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
11110001	$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 1$
11110011	$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)^2$
11110101	$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x + 1)(x^3 + x + 1)$
11110111	$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
11111001	$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^6 + x^4 + x^2 + x + 1)$
11111011	$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^5 + x^2 + 1)$
11111101	$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
11111111	$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^7$
	$m = 8$
100000001	$x^8 + 1 = (x + 1)^8$
100000011	$x^8 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)$
100000101	$x^8 + x^2 + 1 = (x^4 + x + 1)^2$
100000111	$x^8 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
100001001	$x^8 + x^3 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
100001011	$x^8 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^2(x^6 + x^4 + x^2 + x + 1)$
100001101	$x^8 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^5 + x^2 + 1)$
100001111	$x^8 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
100010001	$x^8 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)^4$
100010011	$x^8 + x^4 + x + 1 = (x + 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 1)$
100010101	$x^8 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x^2 + 1)^2$
100010111	$x^8 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
100011001	$x^8 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
100011011	$x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$
100011101	$x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
100011111	$x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)$
100100001	$x^8 + x^5 + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
100100011	$x^8 + x^5 + x + 1 = (x + 1)^4(x^4 + x + 1)$
100100101	$x^8 + x^5 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
100100111	$x^8 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + 1)$
100101001	$x^8 + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
100101011	$x^8 + x^5 + x^3 + x + 1$
100101101	$x^8 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$
100101111	$x^8 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + 1)$
100110001	$x^8 + x^5 + x^4 + 1) = (x + 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
100110011	$x^8 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^5 + x^3 + 1)$
100110101	$x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^2 + x + 1)$
100110111	$x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^6 + x^4 + x^3 + x + 1)$
100111001	$x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$
100111011	$x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)^2(x^3 + x^2 + 1)$
100111101	$x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^3(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
100111111	$x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
101000001	$x^8 + x^6 + 1 = (x^4 + x^3 + 1)^2$
101000011	$x^8 + x^6 + x + 1 = (x + 1)(x^7 + x^6 + 1)$
101000101	$x^8 + x^6 + x^2 + 1 = (x + 1)^4(x^2 + x + 1)^2$
101000111	$x^8 + x^6 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^5 + x^2 + 1)$
101001001	$x^8 + x^6 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x + 1)$
101001011	$x^8 + x^6 + x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1)$

Reprezentare binară	Polinoame $P(x)$
101001101	$x^8 + x^6 + x^3 + x^2 + 1$
101001111	$x^8 + x^6 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^6 + x + 1)$
101010001	$x^8 + x^6 + x^4 + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x + 1)^2$
101010011	$x^8 + x^6 + x^4 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
101010101	$x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2$
101010111	$x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
101011001	$x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x + 1)$
101011011	$x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^3(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
101011101	$x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^7 + x^6 + x^3 + x + 1)$
101011111	$x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
101100001	$x^8 + x^6 + x^5 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + 1)$
101100011	$x^8 + x^6 + x^5 + x + 1$
101100101	$x^8 + x^6 + x^5 + x^2 + 1$
101100111	$x^8 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^5(x^3 + x^2 + 1)$
101101001	$x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + 1$
101101011	$x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
101101101	$x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^6 + x^3 + 1)$
101101111	$x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^4 + x + 1)$
101110001	$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + 1$
101110011	$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
101110101	$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^7 + x^6 + x^4 + x + 1)$
101110111	$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
101111001	$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)^3(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
101111011	$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$
101111101	$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)$
101111111	$x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)$
110000010	$x^8 + x^7 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^4 + x^3 + x + 1)$
110000011	$x^8 + x^7 + x + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
110000101	$x^8 + x^7 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^7 + x + 1)$
110000111	$x^8 + x^7 + x^2 + x + 1$
110001001	$x^8 + x^7 + x^3 + 1 = (x + 1)^4(x^4 + x^3 + 1)$
110001011	$x^8 + x^7 + x^3 + x + 1$
110001101	$x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + 1$
110001111	$x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
110010001	$x^8 + x^7 + x^4 + 1 = (x + 1)(x^7 + x^3 + x^2 + x + 1)$
110010011	$x^8 + x^7 + x^4 + x + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
110010101	$x^8 + x^7 + x^4 + x^2 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
110010111	$x^8 + x^7 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3(x^5 + x^3 + 1)$
110011001	$x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^2 + 1)$
110011011	$x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^7 + x^3 + 1)$
110011101	$x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^4 + x + 1)$
110011111	$x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
110100001	$x^8 + x^7 + x^5 + 1 = (x + 1)^2(x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1)$
110100011	$x^8 + x^7 + x^5 + x + 1$
110100101	$x^8 + x^7 + x^5 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^4 + x^2 + x + 1)$
110100111	$x^8 + x^7 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
110101001	$x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + 1$
110101011	$x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^6(x^2 + x + 1)$
110101101	$x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
110101111	$x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
110110001	$x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + 1$
110110011	$x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x + 1)(x^7 + x^4 + 1)$
110110101	$x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)^3(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
110110111	$x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)^2$
110111001	$x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)^2(x^3 + x + 1)$
110111011	$x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x + 1)$
110111101	$x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
110111111	$x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^6 + x^5 + x^4 + x + 1)$
111000001	$x^8 + x^7 + x^6 + 1 = (x + 1)(x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
111000011	$x^8 + x^7 + x^6 + x + 1$

Reprezentare binară	Polinoame $P(x)$
111000101	$x^8 + x^7 + x^6 + x^2 + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^3 + 1)$
111000111	$x^8 + x^7 + x^6 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)^3$
111001001	$x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)\ (x^6 + x + 1)$
111001011	$x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^7 + x^4 + x^3 + 1)$
111001101	$x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^5(x^3 + x + 1)$
111001111	$x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + x + 1$
111010001	$x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 = (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
111010011	$x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x + 1 = (x + 1)^3(x^5 + x^2 + 1)$
111010101	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
111010111	$x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$
111011001	$x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)^2(x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)$
111011011	$x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)^2$
111011101	$x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
111011111	$x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
111100001	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
111100011	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
111100101	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^6 + x^5 + 1)$
111100111	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1$
111101001	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^7 + x^5 + x^2 + x + 1)$
111101011	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
111101101	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^4 + x^3 + 1)$
111101111	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
111110001	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 1 = (x + 1)^3(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
111110011	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1$
111110101	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$
111110111	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^4 + x + 1)$
111111001	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$
111111011	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^2(x^6 + x^5 + x^2 + x + 1)$
111111101	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^7 + x^5 + x^3 + x + 1)$
111111111	$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$
	$m = 9$
1000000001	$x^9 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$
1000000011	$x^9 + x + 1$
1000000101	$x^9 + x^2 + 1 = (x^4 + x^3 + 1)\ (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1000000111	$x^9 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^5 + x^3 + x + 1)$
1000001001	$x^9 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1)$
1000001011	$x^9 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1)$
1000001101	$x^9 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^3(x^6 + x^5 + x^2 + x + 1)$
1000001111	$x^9 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1000010001	$x^9 + x^4 + 1$
1000010011	$x^9 + x^4 + x + 1 = (x + 1)^4(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
1000010101	$x^9 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1)$
1000010111	$x^9 + x^4 + x^2 + x + 1$
1000011001	$x^9 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x + 1)(x^4 + x + 1)$
1000011011	$x^9 + x^4 + x^3 + x + 1$
1000011101	$x^9 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^5 + x^3 + 1)$
1000011111	$x^9 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1)$
1000100001	$x^9 + x^5 + 1$
1000100011	$x^9 + x^5 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1000100101	$x^9 + x^5 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1000100111	$x^9 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x + 1)$
1000101001	$x^9 + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1)$
1000101011	$x^9 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)$
1000101101	$x^9 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$
1000101111	$x^9 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3(x^6 + x^5 + 1)$
1001110001	$x^9 + x^5 + x^4 + 1 = (x + 1)^5(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1000110011	$x^9 + x^5 + x^4 + x + 1$
1000110101	$x^9 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^6 + x^4 + x^3 + x + 1)$

Reprezentare binară	Polinoame $P(x)$
1000110111	$x^9 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)^2(x^4 + x^3 + 1)$
1000111001	$x^9 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^6 + x^4 + x + 1)$
1000111011	$x^9 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^5 + x^2 + x + 1)$
1000111101	$x^9 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1000111111	$x^9 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^4 + x + 1)(x^5 + x^2 + 1)$
1001000001	$x^9 + x^6 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^6 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1001000011	$x^9 + x^6 + x + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1001000101	$x^9 + x^6 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^6 + x + 1)$
1001000111	$x^9 + x^6 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^6 + 1)$
1001001001	$x^9 + x^6 + x^3 + 1 = (x + 1)^3(x^2 + x + 1)^3$
1001001011	$x^9 + x^6 + x^3 + x + 1$
1001001101	$x^9 + x^6 + x^3 + x^2 + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1001001111	$x^9 + x^6 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^3 + 1)$
1001010001	$x^9 + x^6 + x^4 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1001010011	$x^9 + x^6 + x^4 + x + 1 = (x^4 + x^3 + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1001010101	$x^9 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x + 1)$
1001010111	$x^9 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^6(x^2 + x + 1)$
1001011001	$x^9 + x^6 + x^4 + x^3 + 1$
1001011011	$x^9 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x + 1)$
1001011101	$x^9 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 1)$
1001011111	$x^9 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
1001100001	$x^9 + x^6 + x^5 + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
1001100011	$x^9 + x^6 + x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1001100101	$x^9 + x^6 + x^5 + x^2 + 1$
1001100111	$x^9 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1001101001	$x^9 + x^6 + x^5 + x^3 + 1$
1001101011	$x^9 + x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^3(x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)$
1001101101	$x^9 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)^2$
1001101111	$x^9 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
1001110001	$x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^6 + x^3 + x + 1)$
1001110011	$x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x + 1)(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1001110101	$x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)^4(x^5 + x^2 + 1)$
1001110111	$x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
1001111001	$x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1001111011	$x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)^2$
1001111101	$x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
1001111111	$x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1010000001	$x^9 + x^7 + 1 = (x^4 + x + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1010000011	$x^9 + x^7 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1010000101	$x^9 + x^7 + x^2 + 1 = (x + 1)^3(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
1010000111	$x^9 + x^7 + x^2 + x + 1$
1010001001	$x^9 + x^7 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^2 + x + 1)$
1010001011	$x^9 + x^7 + x^3 + x + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1010001101	$x^9 + x^7 + x^3 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1010001111	$x^9 + x^7 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x + 1)$
1010010001	$x^9 + x^7 + x^4 + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1010010011	$x^9 + x^7 + x^4 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$
1010010101	$x^9 + x^7 + x^4 + x^2 + 1$
1010010111	$x^9 + x^7 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + 1)$
1010011001	$x^9 + x^7 + x^4 + x^3 + 1$
1010011011	$x^9 + x^7 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^5(x^4 + x^3 + 1)$
1010011101	$x^9 + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^3 + x + 1)$
1010011111	$x^9 + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)^3(x^3 + x^2 + 1)$
1010100001	$x^9 + x^7 + x^5 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1010100011	$x^9 + x^7 + x^5 + x + 1$
1010100101	$x^9 + x^7 + x^5 + x^2 + 1$
1010100111	$x^9 + x^7 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3(x^2 + x + 1)(x^4 + x + 1)$
1010101001	$x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
1010101011	$x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^2 + 1)$

Reprezentare binară	Polinoame $P(x)$
1010101101	$x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^3 + 1)$
1010101111	$x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
1010110001	$x^9 + x^7 + x^5 + x^4 + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)$
1010110011	$x^9 + x^7 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1010110101	$x^9 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)^2(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1010110111	$x^9 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
1010111001	$x^9 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)^4(x^5 + x^3 + 1)$
1010111011	$x^9 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + 1)$
1010111101	$x^9 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
1010111111	$x^9 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^5 + x^4 + + x^3 + x + 1)$
1011000001	$x^9 + x^7 + x^6 + 1 = (x + 1)^3(x^6 + x^5 + x^4 + x + 1)$
1011000011	$x^9 + x^7 + x^6 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^6 + x^5 + x^2 + x + 1)$
1011000101	$x^9 + x^7 + x^6 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1011000111	$x^9 + x^7 + x^6 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1011001001	$x^9 + x^7 + x^6 + x^3 + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1011001011	$x^9 + x^7 + x^6 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2(x^3 + x + 1)$
1011001101	$x^9 + x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
1011001111	$x^9 + x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + x + 1$
1011010001	$x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$
1011010011	$x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + 1)$
1011010101	$x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^4 + 1)$
1011010111	$x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 1)$
1011011001	$x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)^2$
1011011011	$x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$
1011011101	$x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^6 + x + 1)$
1011011111	$x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^4(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1011100001	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^5 + x^2 + 1)$
1011100011	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1 = (x + 1)^3(x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1)$
1011100101	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^5 + x + 1)$
1011100111	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x + 1)^3$
1011101001	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1011101011	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x^4 + x + 1)(x^5 + x^3 + 1)$
1011101101	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^6 + x^5 + 1)$
1011101111	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^4 + + x^2 + x + 1)$
1011110001	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1011110011	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + + x^3 + x^2 + 1)$
1011110101	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$
1011110111	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x^2 + 1)$ $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1011111001	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$
1011111011	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + 1)$
1011111101	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^7(x^2 + x + 1)$
1011111111	$x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^4 + x^3 + 1)\cdot$ $\cdot (x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1100000001	$x^9 + x^8 + 1$
1100000011	$x^9 + x^8 + x + 1 = (x + 1)^9$
1100000101	$x^9 + x^8 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)$
1100000111	$x^9 + x^8 + x^2 + x + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + 1)$
1100001001	$x^9 + x^8 + x^3 + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1100001011	$x^9 + x^8 + x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
1100001101	$x^9 + x^8 + x^3 + x^2 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x + 1)$
1100001111	$x^9 + x^8 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^4 + x + 1)^2$
1100010001	$x^9 + x^8 + x^4 + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1100010011	$x^9 + x^8 + x^4 + x + 1$
1100010101	$x^9 + x^8 + x^4 + x^2 + 1$
1100010111	$x^9 + x^8 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^5 + x^2 + 1)$
1100011001	$x^9 + x^8 + x^4 + x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$

Reprezentare binară	Polinoame $P(x)$
1100011011	$x^9 + x^8 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1100011101	$x^9 + x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^3(x^6 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1100011111	$x^9 + x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
1100100001	$x^9 + x^8 + x^5 + 1 = (x + 1)^4(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)$
1100100011	$x^9 + x^8 + x^5 + x + 1$
1100100101	$x^9 + x^8 + x^5 + x^2 + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^6 + x^3 + 1)$
1100100111	$x^9 + x^8 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1100101001	$x^9 + x^8 + x^5 + x^3 + 1 = (x^4 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1100101011	$x^9 + x^8 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1100101101	$x^9 + x^8 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1100101111	$x^9 + x^8 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 1)$
1100110001	$x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + 1$
1100110011	$x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)^4$
1100110101	$x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 1)$
1100110111	$x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1)$
1100111001	$x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1100111011	$x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$
1100111101	$x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1100111111	$x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3(x^3 + x^2 + 1)^2$
1101000001	$x^9 + x^8 + x^6 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1101000011	$x^9 + x^8 + x^6 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)(x^4 + x + 1)$
1101000101	$x^9 + x^8 + x^6 + x^2 + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1101000111	$x^9 + x^8 + x^6 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^4(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1101001001	$x^9 + x^8 + x^6 + x^3 + 1$
1101001011	$x^9 + x^8 + x^6 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1)$
1101001101	$x^9 + x^8 + x^6 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2(x^3 + x^2 + 1)$
1101001111	$x^9 + x^8 + x^6 + x^3 + x^2 + x + 1$
1101010001	$x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^5 + x^3 + x + 1)$
1101010011	$x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1101010101	$x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^5 + x^3 + 1)$
1101010111	$x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^6 + x + 1)$
1101011001	$x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)^3(x^6 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1101011011	$x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$
1101011101	$x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x^4 + x^3 + 1)(x^5 + x^2 + 1)$
1101011111	$x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)\cdot$ $\cdot(x^6 + x^5 + x^2 + x + 1)$
1101100001	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + 1$
1101100011	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1101100101	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^2 + 1 = (x + 1)^5(x^4 + x + 1)$
1101100111	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1101101001	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + 1)$
1101101011	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x + 1$
1101101101	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$
1101101111	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
1101110001	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + 1)$
1101110011	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1$
1101110101	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^5 + x^2 + x + 1)$
1101110111	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)$
1101111001	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x^3 + x + 1)^2(x^3 + x^2 + 1)$
1101111011	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^3(x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1101111101	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^5 + x^3 + x + 1)$
1101111111	$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
1110000001	$x^9 + x^8 + x^7 + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)$
1110000011	$x^9 + x^8 + x^7 + x + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^2 + 1)$
1110000101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^2 + 1$
1110000111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
1110001001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x + 1)$
1110001011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^4(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1110001101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$;

Reprezentare binară	Polinoame $P(x)$
1110001111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + x + 1$
1110010001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + 1 = (x^3 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^2 + x + 1)$
1110010011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + 1)$
1110010101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)^3(x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$
1110010111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x^4 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1110011001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1110011011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)^2(x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1110011101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x^3 + x^2 + 1)^3$
1110011111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^6 + x^4 + x + 1)$
1110100001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + 1$
1110100011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + 1)$
1110100101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^6 + x^5 + x + 1)$
1110100111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x^4 + x^3 + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1110101011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)^6(x^3 + x^2 + 1)$
1110101011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^6 + x^5 + 1)$
1110101101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1110101111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^6 + x^5 + x^2 + 1)$
1110110001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)^2(x^4 + x + 1)$
1110110011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^6 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1110110101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$
1110110111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3(x^6 + x + 1)$
1110111001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$
1110111011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + 1)$
1110111101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x + 1)$ $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1110111111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^3 + 1)$
1111000001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1111000011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x + 1 = (x + 1)(x^4 + x^3 + 1)^2$
1111000101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^2 + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^6 + 1)$
1111000111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^2 + x + 1$
1111001001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^5 + x^2 + 1)$
1111001011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + x + 1$
1111001101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + 1$
1111001111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^5(x^2 + x + 1)^2$
1111010001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 = (x + 1)^3(x^6 + x + 1)$
1111010011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1111010101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$
1111010111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1111011001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + 1$
1111011011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1)^2(x^3 + x^2 + 1)(x^4 + x + 1)$
1111011101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)$
1111011111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)$
1111100001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + 1 = (x + 1)(x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1111100011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1$
1111100101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^3(x^3 + x + 1)$
1111100111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^2(x^7 + x^6 + x^3 + x + 1)$
1111101001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + 1$
1111101011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x + 1)$
1111101101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)^4(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$
1111101111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^6 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1111110001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 1 = (x^4 + x^3 + 1)(x^5 + x^3 + 1)$
1111110011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1 = (x + 1)^3(x^3 + x + 1)^2$
1111110101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1x)(5 + x^4 + x^2 + x + 1)$
1111110111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^7 + x^4 + 1)$
1111111001	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + x^2 + x + 1)$
1111111011	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$
1111111101	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x^4 + x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$
1111111111	$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2$

SEMNALE DETERMINISTE

III.1. Semnale periodice

III.1.1. Serii Fourier

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t} \tag{III.1}$$

iar

$$C(n\omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \tag{III.2}$$

unde T_0 este perioada, iar $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

Între coeficienții dezvoltării există relația

$$C(n\omega_0) = C^*(-n\omega_0). \tag{III.3}$$

III.1.2. Funcția de corelație

Dacă $s_1(t)$ și $s_2(t)$ sînt două semnale periodice de aceeași perioadă T_0, funcția de corelație mutuală este definită de relația:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s_1(t)\, s_2(t+\tau)\, dt \tag{III.4}$$

Dezvoltînd în serie Fourier semnalele $s_1(t)$ și $s_2(t)$ se obține:

$$R_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_{12}(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0\tau} \tag{III.5}$$

unde $P_{12}(\omega) = C_1^*(n\omega_0)\, C_2(n\omega_0)$ este *spectrul de putere de interacțiune*.

$$P_{12}(n\omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} R_{12}(\tau)\, e^{-jn\omega_0\tau}\, d\tau \tag{III.6}$$

Valoarea funcției de corelație mutuală în origine este egală cu *puterea de interacțiune*:

$$R_{12}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_{12}(n\omega_0) \tag{III.7}$$

Pentru funcția de autocorelație $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$ sînt valabile relațiile

$$R(\tau) \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)\, s(t+\tau)\, dt \tag{III.8}$$

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0\tau} \tag{III.9}$$

unde $P(n\omega_0) = |C(n\omega_0)|^2$ este *spectrul de putere.*

$$P(n\omega) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} R(\tau)\, e^{-jn\omega_0\tau}\, d\tau \qquad (III.10)$$

$$R(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n\omega_0) \qquad (III.11)$$

este puterea semnalului.

III.1.2. Teorema de convoluție a semnalelor periodice

Dacă $s_1(t)$ și $s_2(t)$ sînt semnale periodice de aceeași perioadă T_0 avem:

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)\, d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_1(n\omega_0)\, C_2(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t} \qquad (III.12)$$

III.2. Semnale aperiodice

- **Transformata Fourier**

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, dt \qquad (III.13)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, d\omega \qquad (III.14)$$

$S(\omega) = \mathfrak{F}\{s(t)\}$ este *densitatea spectrală a semnalului* $s(t)$. Relațiile precedente sînt valabile numai dacă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\, dt < +\infty \qquad (III.15)$$

Transformata Fourier are următoarele proprietăți:

1. $\mathfrak{F}\{s_1(t) + s_2(t)\} = S_1(\omega) + S_2(\omega)$ (III.16)
2. $\mathfrak{F}\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} = j\omega S(\omega)$ (III.17)
3. $\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} S(\omega)$ (III.18)
4. $\mathfrak{F}\{s(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau} S(\omega)$ (III.19)
5. $\mathfrak{F}\{e^{-j\Omega t} s(t)\} = S(\omega + \Omega)$ (III.20)
6. $\mathfrak{F}\{s(at)\} = \frac{1}{a} S\left(\frac{\omega}{a}\right)$ (III.21)

- **Transformata Laplace (bilaterală)**

$$\mathfrak{L}\{s(t)\} = S(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-pt}\, dt < +\infty \qquad (III.22)$$

Dacă integrala este convergentă pentru anumite valori $\sigma_0 = R_e\{p\}$, atunci:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} S(p)\, e^{pt}\, dp \qquad \text{(III.23)}$$

- **Funcția de corelație**

$$R_{12}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)\, s_2(t+\tau)\, dt \qquad \text{(III.24)}$$

sau

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e_{12}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \qquad \text{(III.25)}$$

unde: $e_{12}(\omega) = S_1^*(\omega)\, S_2(\omega)$ este *densitatea spectrală de energie de interacțiune.*

$$R_{12}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)\, s_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_1^*(\omega)\, S_2(\omega)\, d\omega \qquad \text{(III.26)}$$

Pentru funcția de autocorelație $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$ sînt valabile relațiile:

$$R(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, s(t+\tau)\, dt \qquad \text{(III.27)}$$

și

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \qquad \text{(III.28)}$$

unde $e(\omega)$ este *densitatea spectrală de energie.*

- **Teorema de convoluție a semnalelor aperiodice.** Produsul de convoluție este definit de relațiile:

$$s_1(t) \otimes s_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{(III.29)}$$

$$S_1(\omega) \otimes S_2(\omega) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\Omega)\, S_2(\omega-\Omega)\, d\Omega \qquad \text{(III.30)}$$

și au proprietățile:

$$\mathfrak{F}\{s_1(t)\, s_2(t)\} = S_1(\omega) \otimes S_2(\omega) \qquad \text{(III.31)}$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\{S_1(\omega)\, S_2(\omega)\} = s_1(t) \otimes s_2(t) \qquad \text{(III.32)}$$

- **Impulsul Dirac**

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\, d\omega \qquad \text{(III.33)}$$

„Funcția delta" (impulsul Dirac) are proprietățile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1 \qquad \text{(III.34)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \delta(t-\tau)\, dt = \frac{1}{2}[f(\tau-0) + f(\tau+0)] \qquad \text{(III.35)}$$

Din ultima proprietate rezultă că spectrul „funcției" $\delta(\lambda)$ este egal cu 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1. \qquad \text{(III.36)}$$

III.3. Teorema eșantionării

III.3.1. Eșantionarea semnalelor limitate la W în domeniul frecvență

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}\,\frac{\pi}{T}(t-nT) \tag{III.37}$$

unde:

$$\mathrm{sinc}_n(t) = \mathrm{sinc}\,\frac{\pi}{T}(t-nT) = \frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \tag{III.38}$$

iar $T = \frac{1}{2W}$ este intervalul Nyquist, W fiind cea mai înaltă frecvență din spectrul semnalului $s(t)$. Funcțiile $\mathrm{sinc}_n(t)$ sînt ortogonale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}_n(t)\,\mathrm{sinc}_j(t)\,dt = T\delta_{ij} \tag{III.39}$$

Semnalul eșantionat:

$$s_e(t) = s(t)\,\delta_T(t) \tag{III.40}$$

unde

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

Densitatea spectrală a semnalului eșantionat este: (fig. III.1).

$$S_e(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n\Omega);\quad \Omega = 4\pi W \tag{III.41}$$

III.3.2. Eșantionarea semnalelor limitate la D în domeniul timp

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\Omega)\,\mathrm{sinc}\,\frac{T}{2}(\omega - n\Omega) \tag{III.42}$$

unde $\mathrm{sinc}_n(\omega) = \mathrm{sinc}\,\frac{T}{2}(\omega - n\Omega)$ sînt funcții ortogonale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}_i(\omega)\,\mathrm{sinc}_j(\omega)\,d\omega = \Omega\delta_{ij} \tag{III.43}$$

iar $\Omega = \frac{2\pi}{D}$.

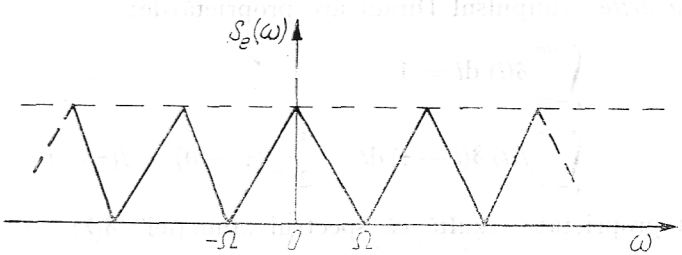


Fig. III.1. Spectrul semnalului eșantionat cu $T = \frac{1}{2W}$.

Practic putem să considerăm că semnalul este limitat atît în domeniul frecvență (la W) cît și în domeniul timp (la D). Dacă durata D a semnalului este foarte mare putem considera aproximativ că este determinat de $N = 2WD$ eșantioane.

În acest caz, energia semnalului de durată D și de frecvență maximă W este:

$$E_D = T \sum_{n=-DW}^{n=WD} s^2(nT) = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{n=-DW}^{n=DW} S(n\Omega)\, S^*(n\Omega) \qquad \text{(III.44)}$$

III. 3.3. Eșantionarea semnalelor de durată D

Semnalul $s(t)$, de durată D poate fi reprezentat în interiorul acestui interval de:

$$s(t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{n=+\frac{N}{2}} C(n\Omega)\, e^{jn\Omega t} \qquad 0 \leqslant t \leqslant D \qquad \text{(III.45)}$$

unde: $\Omega = \frac{2\pi}{D}$, iar $\frac{N}{2}$ este cea mai înaltă armonică din spectrul mesajului $\frac{N}{2}\,\Omega = 2\pi W$, de unde: $N = 2\,WD$.

(Fără a pierde din generalitate, N poate fi considerat a fi un număr par).

Înlocuim pe $t = \frac{kD}{N+1}$ în relația precedentă și obținem:

$$s\left(\frac{kD}{N+1}\right) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} C(n\Omega)\, e^{j\frac{2\pi nk}{N+1}} = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} C(n\Omega)\, \Phi^{nk} \qquad \text{(III.46)}$$

unde $\Phi = e^{j\frac{2\pi}{N+1}}$.

Multiplicînd cu Φ^{-mk} ambii membri ai ecuației (III.46) și însumînd se obține:

$$\sum_{k=0}^{N} s\left(\frac{kD}{N+1}\right)\Phi^{-mk} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} C(n\Omega)\, \Phi^{(n-m)k} \qquad \text{(III.47)}$$

Setul de funcții $\{\Phi^{mk}\}$ este ortogonal, fiindcă satisface relația:

$$\sum_{k=0}^{N} \Phi^{(n-m)k} = (N+1)\,\delta_{nm} \qquad \text{(III.48)}$$

care reprezintă suma unei progresii geometrice cu rația $e^{j\frac{2\pi}{N+1}(n-m)}$.

Ținînd seama de relația (III.48), relația (III.47) poate fi scrisă

$$\sum_{k=0}^{N} s\left(\frac{kD}{N+1}\right)\Phi^{-mk} = (N+1)\,C(m\Omega) \qquad \text{(III.49)}$$

de unde:

$$C(n\Omega) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} s\left(\frac{kD}{N+1}\right)\Phi^{-nk} \qquad \text{(III.50)}$$

Înlocuind în relația (III.45) se obține:

$$s(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{N} s\left(\frac{kD}{N+1}\right) \Phi^{-nk} \right\} e^{jn\Omega t} \qquad \text{(III.51)}$$

sau înlocuind pe Φ:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N} s\left(\frac{kD}{N+1}\right) \left\{ \frac{1}{N+1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{jn\Omega\left(t-\frac{kD}{N+1}\right)} \right. \qquad \text{(III.52)}$$

Notăm $\theta = \left(t - \frac{kD}{N+1}\right)\Omega$ și ținînd seama că în paranteza mare avem o progresie geometrică putem scrie:

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{jn\Omega\left(t-\frac{kD}{N+1}\right)} = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{jn\theta} = e^{-j\frac{N}{2}\theta} \frac{e^{j(N+1)\theta} - 1}{e^{j\theta} - 1} \qquad \text{(III.53)}$$

După unele transformări trigonometrice se obține:

$$e^{-j\frac{N}{2}\theta} \frac{e^{j(N+1)\theta} - 1}{e^{j\theta} - 1} = \frac{\sin\left[(N+1)\frac{\theta}{2}\right]}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad \text{(III.54)}$$

notînd $T = \frac{D}{N+1}$ avem:

$$\theta = \frac{2\pi}{D}(t - kT) = \frac{2\pi(t-kT)}{(N+1)T} \qquad \text{(III.55)}$$

Înlocuind relațiile (III.55) în (III.54) și apoi în (III.52) se obține

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N} s(kT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-kT)\right]}{(N+1)\sin\left[\frac{\pi}{(N+1)T}(t-kT)\right]} \qquad \text{(III.56)}$$

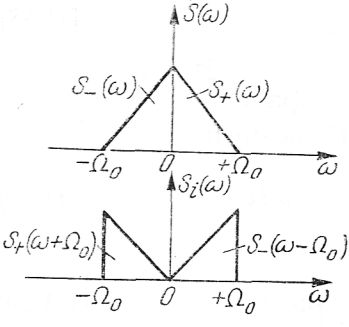


Fig. III.2. Inversarea spectrului.

III.4. Inversarea spectrului

Inversarea spectrului $S(\omega)$, respectiv obținerea spectrului $S_i(\omega)$, (fig. III.2) se face eșantionînd cu semnalul $\delta_T^*(t)$:

$$\delta_T^*(t) = \Sigma(-1)^n \delta(t - nT) \qquad \text{(III.57)}$$

Această funcție fiind periodică cu perioada $2T$ (fig. III.3), putem scrie:

$$\delta_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n)\, e^{jn\omega_0 t} \qquad \text{(III.58)}$$

unde:

$$C(n) = \frac{1}{2T}\int_{-\frac{3}{2}T}^{\frac{T}{2}} \delta_T^*(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad \text{(III.59)}$$

și $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{2T} = 2\pi W$

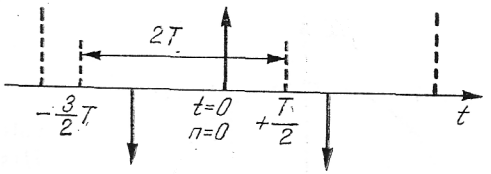


Fig. III.3. Semnalul de eșantionare.

sau

$$C(n) = \frac{1}{2T}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{T}{2}} [-\delta(t+T) + \delta(t)]\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad \text{(III.60)}$$

$$C(n) = 1 - e^{jn\omega_0 T} = 1 - e^{j\pi n} \qquad \text{(III.61)}$$

Densitatea spectrală a semnalului $\delta_T^*(t)$ este

$$D_T(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(n)\, \delta(\omega - n\omega_0) \qquad \text{(III.62)}$$

Semnalul $s_i(t)$ cu spectrul inversat $S_i(\omega)$ se obține din eșantionarea:

$$s_i^*(t) = s(t)\, \delta_T^*(t) \qquad \text{(III.63)}$$

Transformata $S_i^*(\omega) = \mathcal{F}\{s_i^*(t)\}$ este dată de produsul de convoluție

$$S_i^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D_T(\Omega)\, S(\omega - \Omega)\, d\Omega \qquad \text{(III.64)}$$

sau, înlocuind (III.62) și ținînd seama de proprietatea de filtrare a funcțiilor delta obținem:

$$S_i^*(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n)\, S(\omega - n\omega_0) \qquad \text{(III.65)}$$

Trecînd semnalul eșantionat $s_i^*(t)$ printr-un filtru ideal trece-jos cu frecvența de tăiere ω_0, și ținînd seama că $C(0) = 0$ și $C(1) = 2$ se obține:

$$S_i(\omega) = 2\,[S_+(\omega + \omega_0) + S_-(\omega - \omega_0)] \qquad \text{(III.66)}$$

care este spectrul lui $S(\omega)$ inversat (fig. III.2).

III.5. Trecerea semnalelor deterministe prin sisteme liniare

III.5.1. Specificarea sistemului liniar în domeniul timp

În domeniul timp sistemul este caracterizat prin funcția de pondere $h(t)$, respectiv de răspunsul la impulsul Dirac $\delta(t)$.

Sistemul este cauzal dacă:

$$h(t) = 0 \quad \text{pt. } t < 0 \qquad \text{(III.67)}$$

Sistemul este stabil dacă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty \qquad \text{(III.68)}$$

Dacă la intrare se aplică semnalul $x(t)$, răspunsul sistemului este:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{(III.69)}$$

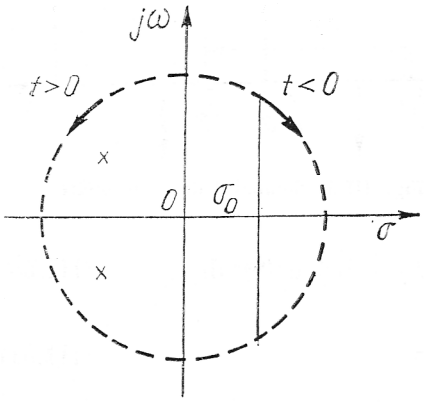


Fig. III.4. Planul complex în care polii funcției de transfer se găsesc la stînga dreptei $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$.

III.5.2. Specificarea sistemului liniar în domeniul frecvență

În domeniul frecvență, sistemul liniar este caracterizat prin funcția de transfer $H(s)$, unde $s = \sigma + j\omega$.

Sistemul este cauzal dacă funcția de transfer $H(s)$ are ca domeniu de convergență semiplanul definit de $R\{s\} > \sigma_0$, unde σ_0 este un număr finit. În acest caz polii lui $H(s)$ se găsesc la stînga dreptei $s = \sigma_0 + j\omega$, astfel încît:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} H(s)\, e^{st}\, ds \qquad \text{(III.70)}$$

este nul pentru $t < 0$ (fig. III.4).

Sistemul este stabil dacă domeniul de convergență a funcției de transfer $H(s)$ conține axa imaginară $\sigma = 0$ ($s = j\omega$). În acest caz

$$|H(\omega)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty \qquad \text{(III.71)}$$

Dacă la intrare se aplică semnalul $x(t)$, la ieșire se obține:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} H(s)\, X(s)\, e^{st}\, ds \qquad \text{(III.72)}$$

unde:

$$X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}, \quad \text{iar} \quad X(s)\, H(s) = Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$$

III.6. Transformata Z

Dacă $x_e(t)$ este un semnal eșantionat și $X_e(\omega) = \mathfrak{F}\{x_e(t)\}$, atunci:

$$X_e(\omega) = \frac{1}{T}\sum_n X(\omega - n\Omega) = \sum_n x(nT)\, e^{-j\omega Tn} \qquad \text{(III.73)}$$

Dacă considerăm că lucrămcu frecvența ωT, atunci obținem o funcție $X_e(\omega T)$ periodică cu perioada 2π.

$$X_e(\omega T) = \sum_n x(nT)\, e^{-j\omega Tn} = \sum_n x(nT)\, e^{-j(\omega T + 2\pi k)n} \qquad \text{(III.74)}$$

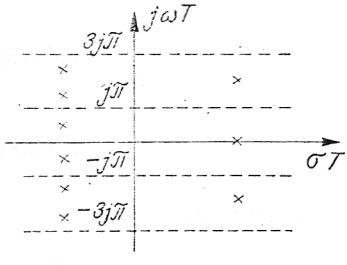


Fig. III.5. Planul complex în care se arată că polii se repetă periodic.

Funcția $X_e(sT)$, unde $sT = \sigma T + j\omega T$ fiind periodică, are poli și zerouri plasați în fîșii de lățime 2π, care se repetă nedefinit (fig. III.5).

Dacă evaluăm transformata inversă pentru a obține pe $x_e(t)$, ținînd cont că în interiorul conturului de integrare avem o infinitate de poli, vom obține pentru $x_e(t)$ valori infinite (reprezentate de funcții delta).

Dacă limităm conturul de integrare la fîșia de bază vom obține un semnal finit, respectiv secvența $\{x(nT)\}$.

Funcția $X_e\ (sT)$, definită pe tot planul complex, dacă o evaluăm numai în fîșia de bază o notăm cu $X(e^{sT})$. Cu această notație avem:

$$X(e^{sT}) = \sum_n x(nT)\, e^{-sTn} \tag{III.75}$$

Dacă facem transformarea inversă referindu-ne numai la fîșia de bază obținem

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\pi}^{\sigma_0+j\pi} X(e^{sT})\, e^{sTn}\, dsT \tag{III.76}$$

Pentru a evalua mai ușor această integrală facem schimbarea de variabilă $e^{sT} = z$.

Cu această schimbare relația (III.75) devine:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, z^{-n} \tag{III.77}$$

numită *transformata Z bilaterală*.

Pentru transformarea inversă avem $dz = e^{sT}\, dsT$, deci $dsT = z^{-1}\, dz$, iar conturul de integrare devine un cerc cu raza e^{σ_0}. În felul acesta integrala se rezolvă cu teorema reziduurilor

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\, z^{n-1}\, dz \tag{III.78}$$

numită *transformata Z inversă*.

Observație. Conturul C trebuie ales în interiorul domeniului de convergență a seriei (III.77).

Suma reziduurilor din interior ne dă valoarea secvenței pentru $n > 0$, iar suma reziduurilor din exterior ne dă valoarea secvenței pentru $n < 0$.

- **Proprietăți.**

1. *Liniaritate*

$$Z\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \tag{III.79}$$

2. *Deplasare în timp*

$$Z\{x(n - n_0)\} = z^{-n_0}X(z) \tag{III.80}$$

Convoluția

$$x(n) = x_1 \otimes x_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\, x_2(n-k) \tag{III.81}$$

$$Z\{x_1 \otimes x_2\} = X_1(z)\, X_2(z) \tag{III.82}$$

În majoritatea cazurilor, secvențele utilizate sînt cauzale. În acest caz transformata Z devine:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, Z^{-n} \tag{III.83}$$

numită *transformata Z unilaterală*.

Ea este utilă în cazurile cînd avem secvențe decalate în timp unele față de altele.

Fie $x_1(n) = x(n-1)$

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)\, Z^{-n}$$

Înlocuim $n-1$ cu m

$$X_1(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} x(m)\, z^{-m} - z^{-1} = z^{-1}\left[x(-1)\, z + \sum_{m=0}^{\infty} x(m)\, z^{-m}\right]$$

sau $$X_1(z) = Z\{x(n-1)\} = z^{-1}X(z) + x(-1)$$

În general pentru o întîrziere de n_0 eșantioane avem:

$$X_{n_0}(z) = Z\{x(n-n_0)\} = z^{-n_0}X(z) + x(-n_0) + x(-n_0+1)\, z^{-1} +$$

$+ \ldots x(-1)\, x^{-(n_0-1)}$, unde valorile $x(-1)$, $x(-2) \ldots x(-n_0)$ se resiplu cuno scute.

MATRICE

În cele ce urmează vor fi reamintite unele proprietăți ale matricelor, necesare pentru înțelegerea textului expus în diferitele capitole. Pentru simplificare se vor face exemplificări cu matrice cu un număr redus de elemente.

IV.1. Adunarea matricelor și multiplicarea cu un număr.

Adunarea a două matrice se definește numai pentru matrice de același tip (același număr de linii și de coloane).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \tag{IV.1}$$

Dacă λ este un număr real sau complex:

$$\lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \tag{IV.2}$$

IV.2. Înmulțirea a două matrice

Produsul a două matrice **AB** are sens numai dacă numărul de coloane ale matricei din stînga este egal cu numărul de linii al matricei din dreapta. Matricea produs va avea numărul de linii al matricei din stînga și numărul de coloane al matricei din dreapta. Elementul c_{kj} al matricei produs, situat pe linia k și coloana j, se obține înmulțind elementele liniei k ale matricei din stînga, cu elementele corespunzătoare din coloana j a matricei din dreapta și însumînd

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \tag{IV.3}$$

Proprietăți ale produsului de matrice:

1) *Înmulțirea a două matrice nu este totdeauna comutativă*

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \tag{IV.4}$$

2) *Înmulțirea matricelor este asociativă*

$$\mathbf{A(BC)} = \mathbf{(AB)\,C} = \mathbf{ABC} \tag{IV.5}$$

3) *Înmulțirea matricelor este distributivă față de adunare*

$$\mathbf{A(B + C)} = \mathbf{AB + AC} \tag{IV.6}$$

$$\mathbf{(A + B)\,C} = \mathbf{AC + BC} \tag{IV.7}$$

4) *Pentru clasa matricelor de tip (p, n) există o matrice de tip (p, p) cu care, înmulțind aceste matrice la stînga, le lasă neschimbate.* De asemenea, *există o matrice de tip (n,n) cu care, înmulțind aceste matrice la dreapta, le lasă neschimbate.*

Această matrice o numim **matrice unitate** sau **identitate**, și o notăm:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{IV.8}$$

IV.3. Transpusa unei matrice

Fiind dată o matrice $\mathbf{A}$ de tip (p, n), transpusa sa este o matrice obținută din schimbarca liniilor în coloane și a coloanelor în linii, cu păstrarea ordinei lor. O vom nota cu $\mathbf{A}^T$:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{IV.9}$$

Proprietăți:

1. $[\mathbf{A}^T]^T = \mathbf{A}$ (IV.10)
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ (IV.11)
3. $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (IV.12)

IV.4. Matrice adjunctă și matrice autoadjunctă

Dată fiind o matrice cu un număr oarecare de linii sau coloane, ale căror elemente sînt numere reale sau complexe, conjugata sa este matricea formată prin înlocuirea fiecărui element cu imaginarul său conjugat.

Se numește **matrice adjunctă** a unei matrice, matricea conjugată transpusei sale. Adjuncta matricei $\mathbf{A}$ se notează $\mathbf{A}^+$.

Se numește **matrice hermitică** sau **autoadjunctă,** o matrice pătrată care este egală cu adjuncta sa: $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$.

IV.5. Matricea inversă a unei matrice patratice

Dacă matricea $\mathbf{A}$ este nesingulară (determinantul ei este diferit de zero), există o matrice notată cu $\mathbf{A}^{-1}$, numită **matricea inversă** astfel încît:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{IV.13}$$

Inversarea unei matrice se obține prin următoarele operații:

— se formează matricea care are ca elemente complemenții algebrici ai elementelor matricei date (complementul algebric al elementului a_{kj} este $A_{kj} = (-1)^{k+j} M_{kj}$, M_{kj} fiind minorul format prin omiterea liniei k și a coloanei j din $|\mathbf{A}|$);

— se ia transpusa acesteia;

— se împarte matricea obținută cu determinantul matricei inițiale

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} \tag{IV.14}$$

Inversarea matricelor are proprietatea:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{IV.15}$$

IV.6. Vectori proprii și valori proprii ale unei transformări liniare caracterizate de matricea K

În cele ce urmează vom pune semn de egalitate între matrice și transformarea liniară care o caracterizează.

Notăm:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K(0,0) & K(0,1) & \dots & K(0,N-1) \\ K(1,0) & K(1,1) & \dots & K(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(N-1,0) & K(N-1,1) & \dots & K(N-1,N-1) \end{bmatrix} \quad \text{(IV.16)}$$

Dacă un vector $\varphi \neq 0$ are proprietatea că

$$\mathbf{K}\varphi = \lambda\varphi \quad \text{(IV.17)}$$

se spune că φ este un *vector propriu* al matricei **K**, iar numărul λ (real sau complex) este o valoare proprie a acestei matrici (transformări liniare).

Notăm cu $\varphi(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ componentele vectorului φ în spațiul de bază:

$$\varphi^T = [\varphi(0)\ \varphi(1)\ \dots\ \varphi(N-1)] \quad \text{(IV.18)}$$

Pentru a determina vectorii proprii se scrie setul de ecuații ce rezultă din relația (IV.17)):

$$\begin{aligned} &[K(0,0) - \lambda]\,\varphi(0) + K(0,1)\,\varphi(1) + \dots + K(0,N-1)\,\varphi(N-1) = 0 \\ &K(1,0)\,\varphi(0) + [K(1,1) - \lambda]\,\varphi(1) + \dots + K(1,N-1)\,\varphi(N-1) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &K(N-1,0)\,\varphi(0) + K(N-1,1)\,\varphi(1) + \dots + [K(N-1,N-1) - \lambda]\,\varphi(N-1) = 0 \end{aligned} \quad \text{(IV.19)}$$

Sistemul omogen în $\varphi(k)$ are o soluție nebanală pentru acele valori ale lui λ, pentru care:

$$\begin{bmatrix} K(0,0) - \lambda & K(0,1) & \dots & K(0,N-1) \\ K(1,0) & K(1,1) - \lambda & \dots & K(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(N-1,0) & K(N-1,1) & \dots & K(N-1,N-1) - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(IV.20)}$$

Această relație poate fi scrisă sub forma:

$$P(\lambda) = \lambda^N - \gamma_1\lambda^{N-1} + \dots + (-1)^N\gamma_N = 0 \quad \text{(IV.21)}$$

unde:

$\gamma_1 = \sum_{i=0}^{N-1} K(i,i)$ adică suma elementelor din diagonala principală (urma matricei)

γ_2 = suma minorilor de ordinul doi de pe diagonală, ș.a.m.d., iar

$$\gamma_N = det\ K.$$

Ecuația (IV.20) se numește *ecuația caracteristică*, iar polinomul $P(\lambda)$ se numește *polinom caracteristic*.

Rădăcinile λ_i, ale polinomului $P(\lambda)$ introduse în setul de ecuații (IV.19) permit găsirea vectorilor proprii φ_i.

În cazul semnalelor staționare, matricea **K** de covariație este hermitică fiind o matrice simetrică și reală.

În legătură cu matricele hermitice sînt valabile următoarele afirmații:

— valorile proprii ale unei transformări liniare hermitice sînt reale;

— la două valori proprii distincte ale unei transformări hermitice corespund doi vectori proprii ortogonali;

— într-un spațiu euclidian cu N dimensiuni, o transformare hermitică are N vectori proprii, ortogonali doi cîte doi.

Din cele precedente, rezultă că vectorii proprii ai matricei de covariație definesc o transformare ortogonală pe care o notăm cu **T**:

$$\mathbf{T}^T = [\varphi_0 \quad \varphi_1 \dots \varphi_{N-1}] = \boldsymbol{\varphi} \tag{IV.22}$$

unde:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T = [\varphi_i(0) \quad \varphi_i(1) \dots \varphi_i(N-1)] \tag{IV.23}$$

Cu aceste notații, ecuația (IV.17) poate fi scrisă:

$$\begin{bmatrix} K(0,0) & \dots & K(0,N-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ K(N-1,0) & \dots & K(N-1,N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_i(N-1) \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \varphi_i(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_i(N-1) \end{bmatrix}$$

$$i = \overline{0, N-1} \tag{IV.24}$$

sau considerînd întreg setul de ecuații pentru $i = \overline{0, N-1}$ avem:

$$\begin{bmatrix} K(0,0) & \dots & K(0,N-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ K(N-1,0) & \dots & K(N-1,N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0(0) & \varphi_1(0) & \dots & \varphi_{N-1}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(N-1) & \varphi_1(N-1) & \dots & \varphi_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_0\varphi_0(0) & \dots & \lambda_{N-1}\varphi_{N-1}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0\varphi_0(N-1) & \dots & \lambda_{N-1}\varphi_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} \tag{IV.25}$$

Se observă că:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(0) & \dots & \varphi_{N-1}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(N-1) & \dots & \varphi_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0\varphi_0(0) & \dots & \lambda_{N-1}\varphi_{N-1}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0\varphi_0(N-1) & \dots & \lambda_{N-1}\varphi_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} \tag{IV.26}$$

Din aceste relații rezultă:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{diag}\,\lambda_i \qquad i = \overline{0, N-1} \tag{IV.27}$$

Premultiplicînd cu $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ se obține:

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{diag}\,\lambda_i \tag{IV.28}$$

Sau fiindcă transformarea $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{T}^T$ este ortogonală: $\boldsymbol{\varphi}^{-1} = \boldsymbol{\varphi}^T$, se poate scrie

$$\mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^T = \mathrm{diag}\,\lambda_i \qquad i = \overline{0, N-1} \tag{IV.29}$$

Cu alte cuvinte, vectorii proprii ai matricei de covariație **K** definesc o transformare ortogonală **T** care o transformă într-o matrice diagonală.

IV.7. Gradientul unui produs de matrice

Fie matricele:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \end{bmatrix} \tag{IV.30}$$

și produsul:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{r} \tag{IV.31}$$

Gradientul lui $\mathbf{Q}$ față de $\mathbf{H}$ este:

$$\nabla_H \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h_{00}} & \dfrac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h_{01}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h_{10}} & \dfrac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h_{11}} \end{bmatrix} \tag{IV.32}$$

Produsul $\mathbf{Q}$ poate fi scris:

$$\mathbf{Q} = [r(0) \quad r(1)] \begin{bmatrix} h_{00} & h_{10} \\ h_{01} & h_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \end{bmatrix} \tag{IV.33}$$

sau

$$\mathbf{Q} = [h_{00}r(0) + h_{01}r(1)]^2 + [h_{10}r(0) + h_{11}r(1)]^2 \tag{IV.34}$$

și

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h_{00}} = 2[h_{00}r(0) + h_{01}r(1)]\, r(0) \tag{IV.35}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h_{01}} = 2[h_{00}r(0) + h_{01}r(1)]\, r(1) \tag{IV.36}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h_{10}} = 2[h_{10}r(0) + h_{11}r(1)]\, r(0) \tag{IV.37}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial h_{11}} = 2[h_{10}r(0) + h_{11}r(1)]\, r(1) \tag{IV.38}$$

Înlocuind aceste expresii în relația (IV.32) se obține

$$\nabla_H \mathbf{Q} = 2 \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^2(0) & r(0)\, r(1) \\ r(0)\, r(1) & r^2(1) \end{bmatrix} \tag{IV.39}$$

sau

$$\nabla_H \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \end{bmatrix} [r(0)\, r(1)] \tag{IV.40}$$

sau sub formă concisă:

$$\nabla_H \mathbf{Q} = 2\mathbf{H}(\mathbf{r}\mathbf{r}^T) \tag{IV.41}$$

Ținînd seama de relația (IV.31) se poate scrie:

$$\nabla_H \{\mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{r}\} = 2\mathbf{H}(\mathbf{r}\mathbf{r}^T) \tag{IV.42}$$

Se consideră relația:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{x}, \quad \text{unde} \quad \mathbf{x}^T = [x(0) \quad x(1)] \tag{IV.43}$$

sau:

$$\mathbf{R} = h_{00}x(0)\,r(0) + h_{10}x(0)\,r(1) + h_{10}x(1)\,r(0) + h_{11}x(1)\,r(0) \tag{IV.44}$$

$$\nabla_H\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x(0)\,r(0) & x(0)\,r(0) \\ x(1)\,r(1) & x(1)\,r(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} [r(0)\ r(1)] \tag{IV.45}$$

sau

$$\nabla_H\{\mathbf{r}^T\mathbf{H}^T\mathbf{x}\} = \mathbf{x}\mathbf{r}^T \tag{IV.46}$$

Ținînd seama că $\mathbf{x}\mathbf{x}^T = \| \mathbf{x} \|^2$ nu depinde de H avem:

$$\nabla_H\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} = 0 \tag{IV.47}$$

IV.8. **Demonstrarea relației** (15.21)

Relația (15.21) se obține din relația (15.20) după cum urmează:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_j)^T\,\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_j) - (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_i)^T\,\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_j) \tag{IV.48}$$

După efectuarea multiplicărilor se obține:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^T\mathbf{K}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j) + (\overline{\mathbf{X}}_i^T - \overline{\mathbf{X}}_j^T)\,\mathbf{K}^{-1}\mathbf{X} - (\overline{\mathbf{X}}_i^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_j) \tag{IV.49}$$

dar:

$$(\overline{\mathbf{X}}_i^T - \overline{\mathbf{X}}_j^T)\,\mathbf{K}^{-1}\mathbf{X} = \{[(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j)^T\,\mathbf{K}^{-1}\mathbf{X}]^T\}^T = [\mathbf{X}^T\mathbf{K}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j)]^T \tag{IV.50}$$

Fiindcă matricele $\mathbf{X}$ și $\overline{\mathbf{X}}_i$, $\overline{\mathbf{X}}_j$ sînt matrice coloană, produsul $\mathbf{X}^T\mathbf{K}^{-1^T}(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j)$ este un număr și ca urmare:

$$[\mathbf{X}^T\mathbf{K}^{-1^T}(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j)]^T = [\mathbf{X}^T\mathbf{K}^{-1^T}(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j) \tag{IV.51}$$

Dar fiindcă matricea de covariație $\mathbf{K}$ este o matrice simetrică avem: $\mathbf{K}^{-1^T} = \mathbf{K}^{-1}$ și relația $\mathbf{P}$ poate fi scrisă:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{X}^T\mathbf{K}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j) - \overline{\mathbf{X}}_i^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_i + \overline{\mathbf{X}}_j^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_j \tag{IV.52}$$

Să considerăm relația:

$$(\overline{\mathbf{X}}_i + \overline{\mathbf{X}}_j)^T\,\mathbf{K}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j) = \overline{\mathbf{X}}_i^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_j + \overline{\mathbf{X}}_j^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_i^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_j \tag{IV.53}$$

Dar $\overline{\mathbf{X}}_j^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_i$ este un număr, deci

$$\overline{\mathbf{X}}_j^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_i = (\overline{\mathbf{X}}_j^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{X}}_i)^T = \overline{\mathbf{X}}_i^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{X}_j \tag{IV.54}$$

Ținînd seama de relațiile (IV.54), (IV.53), relația (IV.52) poate fi scrisă:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{X}^T\mathbf{K}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\mathbf{X}}_j) - (\overline{\mathbf{X}}_i + \overline{\mathbf{X}}_j)^T\mathbf{K}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}_i - \mathbf{X}_j) \tag{IV.35}$$

Din egalitatea relațiilor (IV.48) și (IV.55) rezultă egalitatea relațiilor (15.20) cu (15.21).

BIBLIOGRAFIE ÎN LIMBA ROMÂNĂ

1. Angheloiu I. *Teoria codurilor*, București, Ed. Militară, 1972.
2. Cartianu Gh., Săvescu M., Constantin I., Stanomir D. *Semnale, circuite și sisteme*. București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1980.
3. Creangă I., Simovici D. *Teoria codurilor*. București, Ed. Didactică și Pedagogică 1975.
4. Cullman G. *Coduri detectoare și corectoare de erori*. București, Ed. Tehnică, 1972.
5. Eykhoff P. *Identificarea sistemelor*. București, Ed. Tehnică, 1977.
6. Gîrlașu S. *Prelucrarea în timp real a sistemelor fizice*. Craiova, Scrisul Românesc, 1978.
7. Gîrlașu S., Popp C., Sabin I. *Introducere în analiza spectrală și de corelație*. Timișoara, Ed. Facla, 1982.
8. Ionescu D. *Codificarea și coduri*. București, Ed. Tehnică, 1981.
9. Kaufmann A., Precigout M. *Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă*. București, Ed. Tehnică, 1973.
10. Leonte A., Vraciu G. *Elemente de calcul matriceal cu aplicații*. București, Ed. Tehnică, 1975.
11. Mateescu Ad. *Analiza și sinteza circuitelor electrice*. București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1975.
12. Murgan A. T., Rădoi C., Lăzărescu V. *Introducere în discretizarea și refacerea semnalelor continue; complemente la cursul de echipamente și aparate electronice complexe*. Litografia IPB, 1980.
13. Rulea G. *Prelucrarea optimă a semnalelor radio*. București, Ed. Tehnică, 1980.
14. Rulea G. *Radiolocație*. București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1980.
15. Spătaru Al. *Teoria transmisiunii informației. Semnale și perturbații*. București, Ed. Tehnică, 1966.
16. Spătaru Al. *Teoria transmisiunii informației. Coduri și decizii statistice*. București, Ed. Tehnică, 1971.
17. Stanomir D., Stănășilă O. *Metode matematice în teoria semnalelor*. București, Ed. Tehnică, 1980.
18. Stănășilă O. *Analiza matematică*, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1981.
19. Șabac Gh. *Matematici speciale*, vol. I și II, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1964, 1965.
20. Vlad V., Zaciu R., Miron N., Maurer J., Sporea D. *Prelucrarea optică a informației*. București, Ed. Academiei RSR, 1977.
21. Vlad Popescu A. *Complemente la cursul de Teoria transmisiunii informației, detecția semnalelor*. Litografia IPB, 1975.

BIBLIOGRAFIE

1. A c a m p o r a A. S., *Analysis of maximum likelihood sequence estimation performance for quadrature amplitude modulation.* În: „Bell Syst. Techn. J" 1981, 60, nr. 6, Part I, p. 865—885.
2. A g g a r w a l, N. L., *Clustering Analysis.* An Information Theoretic Approach, International Symposium on Information Theory, june 21—25, 1982, Les Arcs, France, Abstracts of Papers, 67.
3. A h m e d N., R a o K. R., *Orthogonal transforms for Digital Signal processing,* Berlin, Springer — Verlag, 1975.
4. A k i m o v P. S., K u b a s o v, A. N., L i t h o v s k i j V. J a., *Rangovoe binarnoe obnaruženie determinirovannogo signala na fone markovskoj pomehi.* In: Radiotehn. I Elektron, 1980, 25, nr. 7, p. 1454—59.
5. A k t a r M u s t a f a, S a n k u r B u l e n t, A b u t H u s e y i n, *Adaptive Delta Modulator with tree coder.* In AEU, 1979, 33, nr. 11, p. 437—440.
6. A m o r o s o F. *The use for quasi-bandlimited pulses in MSK transmission.* In: IEEE Trans. Commun, 1979, 27, nr. 10, Part. 2, p. 1616—1624.
7. A n d e r s o n J. B., *Error bounds for phase Modulation Codes with a severe Band-Width constraint NTC 1979.* In: Nat. Telecommun. conf. Washington D.C. 1979 conf. REC vol. 1 N.Y. 1979 55. 2/1—55. 2/5.
8. A n t o n o v V. M., *Vybor pary periodičeskij fazomanipulirovannyj signalfil'tr.* In: Izv. vuzov Radioelehtron, 1979, 22, nr. 9, p. 69—70.
9. A r q u e s, P. Y., *Decisions en traitement du signal.* Masson, Paris, 1979.
10. A u s t i n M a r k C. C h a n g M i n g U., *Quadrature overlapped raised-cosine modulation.* In: IEEE Trans. Commun. 1981, 29, nr. 3, p. 237—249.
11. B a r a h o v I. I., S k l j a n c e n k o v O. A. *K voprosu o kodirovanii informații.* În: Tr. Mosk. Energ. IN-TA, 1980, nr. 479, p. 61—62.
12. B a š i n G. M., D i m i t r i e n k o A. N. *Ob asimptoticeskoj effektivnosti adaptivano fil'tracii slučajnyh signalov po kriteriju maksimuma otnošenija signal/pomeha.* În: Radiotehn. i Elektron, 1980, 25, nr. 9, p. 2009—2011.
13. B a t t a i l G., *Sur l'emploi des signaux a bande limitée dans la théorie des communications.* În: Annales des télécommunications, 5—6, 1964.
14. B a t t a i l, G., *Polynomial Description of a Trellis and Applications to Linear Block Codes.* International Symposium on Information Theory, june 21—25, 1982, Les Arcs, France, Abstracts of Papers, p. 155—156.
15. B e l a v r i n V. P., *Kvantovaja fil'tracija markovskih signalov na fone belyh kvantovyh šumov.* În: Radiotehn. i elektron. 1980, 25, nr. 7, p. 1446—1453.
16. B e l l a n g e r M., *Traitement numerique du signal.* Masson, Paris, 1981.
17. B e m m a n n H. B., R o s s l e r A., *Laborgerat zur untersuchung des jitters.* „Nachrichtentechn. Elektron" 1980, 30, nr. 7, 289—292.
18. B e n e l l i G., C a p p e l l i n i V., L o t t i F., *Data compression techniques and applications.* În: „Radio and Electron. Eng.," 1980, 50, nr. 1—2, p. 29—53.
19. B e n j a m i n R. *Generalisations of maximum-entropy pattern analysis.* În: IEE Proc., 1980, F. 127, nr. 5, p. 341—353.

20. Berlekamp E. R. *The technology of error-correcting codes.* În: Proc. IEEE, 1980, 68, nr. 5, p. 564—593.
21. Bierbaum M., Wallmeier H. M. *A note on the capacity region of the multiple-access channel.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1979, 25, nr. 4, p. 484.
22. Binia J. *On the capacity of certain additive non-Gaussian channels.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1979, 25, nr. 4, p. 448—452.
23. Blanc-Lapierre, A., Picinbono B. *Proprietes statistiques du bruit de fond.* Masson, Paris, 1961.
24. Blanc-Lapierre A. *Decompositions doublement orthogonales pour des functions aleatoires de second ordre non stationnaires possedant une puissance moyenne positive.* Colloque GRETSI, Nice, mai-juin, 1979.
25. Borisov E. V., *Pomehoustojčivost' priema modirovannyh soobčenij v optičeskih linijah svjazi.* În: Radiotehn. i elektron. (Moskva) 1979, 24, nr. 10, p. 2139—2142.
26. Brind'amour A., Feher K. *Design and evaluation of a convolutional codec in additive white Gaussian noise, sinusoidal interference and intersymbol interference environment.* ICC'79. Int Conf. Commun, Boston, Mass, 1979, Conf. Rec. Vol. 1—4, New-York, N.Y., 1979, 34.5/1—34.5/S.
27. Brind'amour A., Feher K., *Design and evaluation of a convolutional codec in additive white Gaussian noise, sinusoidal interference and intersymbol interference environment.* În: „IEEE Trans commun", 1980, 28, nr. 3, p. 391—395.
28. Bromnikov V. N. *Analiz pomehoustojčivosti peredači hepreyvnyh soobaenij s pomoq'ju analogovogo kodirovanija.* Radiotehnika, 1980, 35, nr. 6, p. 64—67.
29. Brohnikov V. N., *Ocenka pomehoustojcivosti i dinamičeskoj ošibki priema signalov s fazoamplitudnoj moduljaciej.* În: Radiotehn. 1980, 35, nr. 9, p. 38—41.
30. Brooks R., *7B8B balandced code with simple error detecting capability.* În: Electron lett, 1980, 16, nr. 12, 458—459.
31. Bruk Ju, M., Injutin G. A. *Matričhye shemy v analizatore spektra.* În: Radiotehn. i Elektron., 1980, 25, nr. 9, p. 2004—2007.
32. Brown J., L. *Sampling bandlimited periodic signals an application of the DFT.* În: IEEE Trans. Educ., 1980, 23, nr. 4, p. 205—206.
33. Byhovskij M. A., *Potencial'naja pomehoustojčivost' Razdelenija dvuh signalov s CM.* În: Elektrosvjaz', 1979, nr. 10, p. 19—23.
34. Byhovskij, M. A. *Potencial'nye vozmožnosti razdelenija dvuh signalov peredavaemyh v obqej polose častot.* In: Radiotehnika i elektronika 1981, vol. 26, nr. 12, p. 2614—2621.
35. Bystrov S. T. *Pomenozaqiqennost' informacionnoj sistemy pri stohasticeskom izemeni parametrov informacionnogo kanala.* În: Tr. Mosk. Energ. Institut, 1981, nr. 522 p. 3—9.
36. Cain J. B., Geist J. M. *Interleaving considerations for convolutional coding on Gaussian Noise Channels with burst erasures.* „NTC 1979. NAt. Telecommun. Conf. Washington D.C. 1979. Conf. REC vol. 1" N.Y. 1979, 44.5/1—44.5/5.
37. Carlson A. B. *Communication Systems.* New-York, Mc Graw-Hill.
38. Chase D. *Practical soft decision decoding algorithms for long block codes.* „NTC 1979. NAT. Telecommun. Conf. Washington D.C. 1979, Conf. Rec. vol. 1" N.Y. 1979, 23.2/1—23.2/5.
39. Clavier I., Niquil M., Coffient G., Behr F. *Theorie et technique de la transmission des données.* Tom I — *Notions Fondamentales* Tom II — *Systemes de Tele-informatique.* Ed. Masson, Paris, 1979.
40. Cobben W. *Monte-Carlo-Simulation zur Bestimmung der Amplitudenverteilung des Ausgangssignals von nichtrekursiven linearen Filtern.* În: AEU, 1979, 33, nr. 9, p. 333—337.
41. Cot N., *On the Entropy of Random Trees.* Symposium on Information Theory, june 21—25, 1982, Les Arcs, France, Abstracts of Papers, p. 3.

42. Cot N. *On the Huffman Encoding of Infinite Source Alphabets.* International Symposium on Information Theory, june 21—25, 1982, Les Arcs, France, Abstracts of Papers, p. 15.
43. Cover T. M., Gamal A. El., Salehi M. *Multiple access channels with arbitarily correlated sources.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1980, 26, nr. 6, p. 648—657.
44. Cruz J., Simpson R. S. *Error Rate performance for SFSK with cochannel and intersymbol interference.* În: Electron. Lett, 1980, 16, nr. 13, p. 515—516.
45. Cruz J. R., Simpson R. S. *Performance of a specialized bandlimited baseband syst em in the presence of Gaussian and impulsive Noise.* În: AEU, 1981, 35, nr. 3, p. 118—120.
46. Čečik L. A. *Kereljacionnye svojstva šumopodohogo signala.* În: Izv. Vuzov, Radioelektron. 1980, 23, nr. 5, pag. 95—97.
47. Danilov V. I. *Pomehoustojcivyo limejnye othositel'no porjnokovyh statistik ocenhe intensivnosti sumovogo signala.* În: Radiotehn. i Electron., 1980, 25, nr. 9, p. 1996—1999.
48. Davisson L. D., Gray R. M. (Edited By). *Data Comppression.* New York, Halsted Press, 1976.
49. Debus W. *General Method for Calculating the Spectrum of a zero substitution coded signal.* În: IEEE Trans. Commun., 1979, 27, nr. 11, p. 1637—1643.
50. Dec' G. D. *Inženernanaja metodika opredelenija možnosti šuma kvantovanija pri del'ta moduljacii s odinarnya integrirovaniev.* În: Izv. vuzov. Radioelektron, 1979, 22, nr. 8, p. 80—81.
51. Deev V. V. *Prohoždenie signalov i šuma čerez ideal'nyj amplitudnyj ograničitel.* În: Izv. vuzov Radioelektron., 1979, nr. 8, p. 84—87.
52. Deshpande G. S., Wittke P. H., *Optimum Pulse Shaping in MSK-type Signals.* „NTC 1979. Nat Telecommun. conf. Washington D. C. 1979, conf. Rec. Vol. 1" N.Y. 1979, 33. 4/1—33.4/7.
53. Diusalar D., Simon M. K. *Spectral Characteristics of Convolutionally Codes Digital Signals.* În: IEEE Trans. Commun, 1980, 28, nr. 2, p. 173—186.
54. Dixon R. C. *Spread Spectrum Systems.* New-York, John Wiley & (and) Sons, 1979.
55. Doblinger G., *Autokorrelationsfunktion und Leistungsspectrum von amplitudenquantisiertem Gaussschem Rauschen.* În: Frequenz, 1981, 35, nr. 6, p. 151—155.
56. Dobrogowski A. *Optimal Segmented Compression characteristic for Speech.* În: „IEEE Trans. Commun", 1980, 28, nr. 2, p. 301—302.
57. Dodds D. E., Sendyk A. M., Wohlberg D.B. *Error tolerant Adaptive algorithmas for Delta-Modulation Coding.* În: „IEEE Trans. Commun" 1980, 28, nr. 3, p. 385—391.
58. Dorsch B. *Performance and limits of Coding for simple time varying channels.* „Int Zurich Semin. Dig. Commun. Dig. Transmiss. Wireless Syst. 1980, Proc." Zurich 1980, G 1/1—G 1/6.
59. Druzinin V. V., *Sposob obrabotki složnogo signala no fone strukturnoj pomehi.* În: Radiotehn., 1981, nr. 3, p. 52—55.
60. Dunlop J., Changkakati N. C. *Transmission of Speech by Adaptive Sampling.* În: Radio and Electron. Eng, 1980, 60, nr. 3, p. 127—132.
61. Egorov V. A. *Sintez alfavita signalov peredači dannyh.* În: Obrab. inf. v. sistemah svjazi, Leningrad, 1981, p. 44—49.
62. Emptoz H. A., *Pretopological Model for Pattern Racognition.* International Symposium on Information Theory, june 21—25, 1982, Les Arcs, France, Abstracts of Papers, p. 67.
63. Erdel K. *Quantizing distorstion in PCM systems caused by digital attenuation.* În: Freqenz, 1979, 33, nr. 9, p. 270—274.

64. Eršov L. A. *Pomehoustojcivost' kogerentnyh priemnikov fazovoj i častovoj telegrafii pri vozdejstvii impul'snyh pomeh i belogo šuma.* În: Izv, vuzov Radioelektron., 1979, 22, nr. 8, p. 82—84.

65. Esteban D. J. *Recent real time digital speech compression developments.* Int. Zurich Semin. Dig. Commun. Dig. Transmiss. Wireless Syst., 1980, Proc. Zurich, 1980. E 1/1—E 1/9.

66. Farrell P. G., *Goodman R. M. Soft-Decision error control for H.F. Data transmission.* În: IEE Proc., 1980, F 127, nr. 5, p. 389—400.

67. Fitzgerald R., Byrne C., — *Extrapolation of Band. limited Signals: A tutorial.* În: Signal Process. Theor. And Appl. Proc. Eusipco 80 1 st EU... Signal Process. Conf. Lausanne, sept. 16—18, 1980".

68. Fortet, R., Blanc-Lapierre A. *Theorie des fonctions aleatoires,* Masson, Paris, 1953.

69. Franks L. E., (Edited By). *Data communication fundamentals of baseband transmission.* New-York, Halsted Press, 1974.

70. Fukunaga K., Short R. D. *A class of feature extraction criteria and its relation to the bayes risk estimate.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1980, 26, nr. 1, p. 59—65.

71. Galdos Jorge I. *A lower bound on filtering error with application to phase demodulation.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1979, 25, nr. 4, p. 452—462.

72. Galkin V. P. *Pomehoustojčivost' priemnika psevdoslučajnogo signala.* În: Radiotehn. i elektron (Minsk), 1979, nr. 9, p. 10—15.

73. Gamal Abbas A., *The capacity of a class of broadcast channels.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1979, 25, nr. 2, p. 166—169.

74. Garber F. D., Pursley M. B. *Performance of offset quadriphase spreadspectrum multiple-access communications.* În: IEEE Trans. commun, 1981, 29, nr. 3, p. 305—314.

75. Gelfand V. M., *Normirovanie i izmerenie fluktuacionnyh pomeh v TV peredatcikah.* În: Elektrosvjaz, 1980, nr. 8, p. 25—30.

76. Geraniotis E. A., Michael B. P. *Error probability for direct-sequence spread spectrum multiple — Access communications.* Part. II approximations. În: IEEE Trans. Commun, 1982, 30, nr. 5, p. 985—995.

77. Gersho A. *Asymptotically optimal block quantization.* În: IEEE Trans. Inform Theory, 25, 1979, nr. 4, p. 373—380.

78. Gharavi H., Steele R. *Predictors for Intraframe encoding of Pal picture signals.* În: IEEE Proc., 1980, F. 127, nr. 3, p. 205—211.

79. Gorbačev A. A., Koldanov A. P., *O nekotoryh neparametričeskih podhodah k različeniju gipotez.* În: Radiotehn., 1979, 34, nr. 11, p. 35—40.

80. Gorškov A. K., Lesnikov V. A., Petrov E. P., Costikov A. V. *Vybor dliny registra sdviga diskretnogo soglasovannogo fil'tra v cifrovom obnaružitele. Poryš pomehoustojcivosti i efekt radioelektron sistem i ustrojstv.* Gorkij, 1981, nr. 40.

81. Graham R. L., Sloane N. J. *Lower bounds for constant weight codes.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1980, 26, nr. 1, p. 37—43.

82. Guarino C. R. *A New Method of Spectral Analysis and Sample rate reduction for band limited signals.* În: Proc. IEEE, 1981, 69, nr. 9, 1161—1163.

83. Guazzo M. *A general minimum redundancy source-coding algorithm.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1980, 26, nr. 1, p. 15—25.

84. Gurevič V. E., Negrienko A. Ja. *Predstavlenie periodičeski stacionarnogo impul'snogo slučajnogo processa vyššego porjadka processom pervogo porjadka s ekvivalentnym energeticeskim spektrom.* În: Teorija pered. inf. po kanalam svjaz. Leningrad, 1981, p. 32—37.

85. Gusev V. G. *O svjazi teoretičeskih osnov nekotoryh sovremennyh sposobov čifrovoj obrabotki signalov s klassičeskim metodom garmoniceskogo analiza.* În: Radiotehn i Elektron. 1981, 26, nr. 10, p. 2141—2147.
86. Gut R. E. *Effektivnost' peredaži informacii s diskretnym upravleniem dlitel'nost'ju signalov.* În: Radiotehn. 1980, 33, nr. 2, p. 69—73.
87. Haborov E. O. *Ocenka pomehoustojčivosti posledovatel'noj sistemy peredači dvoičnyh signalov so skopostju, preyvšajuqej skorost' nejkvista.* În: Teorija pered. inf. pokanalam svjazi. 1981, p. 142—148.
88. Hagenauer J. *Zur Kanalkapazitat bei Nachrichtenkanalen mit fading und gebundelten Fehlern.* În: AEU, 1980, 34, nr. 6, p. 230—237.
89. Hankamer M. *Error event statistics for convolutional codes.* În: IEEE Trans. commun. 1980, 28, nr. 2, p. 302—304.
90. Hanlon R. C., Gardner C. S. *Error performance of direct sequence spread spectrum systems on non-selective fading channels.* În: IEEE Trans. Commun. 1979, 27, nr. 11, p. 1696—1700.
91. Harmuth H. *Transmission of information by orthogonal function.* Berlin, Springer — Verlag, 1972.
92. Hänel H. *Zur digitalen Erzeugung von Zufallszmahlen mit vorgeschriebener Verteilungsdichte.* În: AEU, 1981, 35, nr. 4, p. 156—162.
93. Helgert H., Picholtz R. L. *Low rate coding for spread spectrum.* NTC 1979: Nat. telecommun. conf. Washington, D.C. 1979 conf. rec. vol. 1" N.Y. 1979, 54. 1/1—54. 1/7.
94. Hill M. A., Ballard P. T., Bryan S. D., Rosenwalo R. D. *Representation of observable signals in Chebyshev polynomials: application to phase-sensitive detection.* În: J. opt. Soc. Amer. 1979, 69, nr. 7, p. 978—984.
95. Hirt W., Pasupathy S. *Continuous phase chirp signals for data communication.* În: Int Zurich Semin. Dig. Commun. Dig. Trans. Wireless Syst., 1980, Proc., Zurich, 1980, 7/1—7/6.
96. Hirt W. Pasupathy S. *Suboptimal reception of binary CPSK signals.* În: IEE Proc., 1981, F128, nr. 3, p. 125—134.
97. Holevo A. S. *O propusknoj sposobnosti kvantovogo kanala svjazi.* În: Probl. Peredači inform., 1979, 15, nr. 4, p. 3—11.
98. Huang J. C. Y., Feher K. *Performance of partial response digital radio systems in linear and nonlinear bandlimited channels.* În: IEEE Trans. Commun., 1979, 27, nr. 11, p. 1720—1725.
99. Huang J. C. Y., Feher K., Gendron M., *Techniques to generate ISI and jitter-free bandlimited Nyquist signals and a method to analyse jitter effects.* În: IEEE Trans. Commun. 1979, 27, nr. 11, p. 1700—1711.
100. Hunt J. N., Ackroyd M. H. *Some integer Huffman sequence.* În: IEEE Trans inform. Theory, 1980, 26, nr. 1, 105—106.
101. Huynh Huu Tue, Bouchard M., Lecours M., *Signal to-noise ratio in ADPCM for different types of input signals: A simulation study.* În: „AEU" 1982, 36, nr. 1, 14—17.
102. Hwang Tai-Yang, *On the error correcting capability of algebraic analog decoding.* În: IEEE Trans. Inform. Theory 1980, 26, nr. 107—109.
103. Iaroslavski L. P., *Vedenie v ţifrovuiu obrabotchi izobrajenii.* Moscova, Sovetscoe radio, 1979.
104. Irland M. I., Pujolle G. *Comparison of two packet retransmission techniques.* În: „IEEE trans. inform. theory" 1980, 26, nr. 1, p. 92—97.
105. Ipatov, B. P., *Spektry mnogofaznyh posledovatel'nostej.* În: Izv. vuzov. Radioelektron. 1979, 22, nr. 9, p. 80—82.
106. Isakevič V. V., Lapin A. N. *Obrabotka spektrov signalov OFM v kahalan s možsimovl'noj interferenciej.* În: Radiotehn., 1981, 36, nr. 8, p. 64—66.

107. Ishizuka M., Mirade K., *Optimmum Gaussian filter and deviated — frequency — locking scheme for coherent detection of MSK.* În: IEEE Trans. Commun. 1980, 28, nr. 6, p. 850—857.

108. Israel H. *Signal aus dem Rauschen. Der Lock-in-Verstärker.* Funkschau, 1981, nr. 8, p. 67—69.

109. Jakeman A. P. *Joint parameter/state estimation.* Electron. Lett., 1979, 15, nr. 19, p. 582—583.

110. Jayant K. S., Steeler, NGAI Wai Chan, Schmitt C. E., *On soft decision demodulation for PCM and DPCM — Encoded Speech.* În: IEEE Transcommun. 1980, 28, nr. 2, p. 308—311.

111. Judin A. A., *Nekotorye svojstva signalov na vhode i vyhode dvuhurovnevogo kvantovatelja.* Elektrosvjaz's, 1981, nr. 10 p. 23—25.

112. Jumarie G., *Théorie rélativiste de l'information II. Information de Shannon, entropie de Renyi, ensembles flous relativistes.* În: Ann. Telecommun., 1979, 34. nr. 9—10, p. 491—507.

113. Kailath Th., *A View of Three Decades of Linear Filtering Theory.* În: IEEE Transactions on Information Theory, IT-20, 2, 1974, p. 146—181.

114. Karubalu K. *Isagogi sti theoria thoribu ke eformoges,* Athino, 1979.

115. Kaufhold B., *Varianten zur Optimierung des Empfangsfilters în PCM Regeneratoren mit hoher Bitrate.* În: Nachrichtentechn. Elektron, 1980, 30, nr. 2, p. 48—53.

116. Kaveh M. *High resolution spectral estimation for noisy signals.* În: IEEE Trans. Acoust. Speech, and Signal Process, 1979, 27, nr. 3, p. 286—287.

117. Kazakos D., *Low Order approximations of Markov chains in a decision theoretic context.* În: „IEEE Trans. Inform. Theory" 1980, 26, nr. 1, p. 97—100.

118. Kazakos D., Davisson L. D. *An improved decision directed detector.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1980, 26, nr. 1, p. 113—116.

119. Klousky D., Nikolaev B. *Sequential transmission of digital information in the presence of intersymbol interference.* Moscow, Mir Publishers, 1978.

120. Klovskij D. D., Kontorovic V. JA. *Analiz markovckij modelej razryvnyh slučajnyh processov.* În: Radiotehn. 1980, 35, nr. 7, p. 61—63.

121. Knysev I. P., *Vesovaya obrabotka LČM-signala s maloj bazoj.* În: Radiotehn. i elektron. 1980, 25, nr. 1, p. 106—110.

122. Kohovalov G. V. *Spektral'no-koppeljscionnyj analiz slozhyh impul'snyh slučajnyh pročessov.* În: Radiotehn. i Elektron. 1980, 25, nr. 12, p. 2566—2574.

123. Korezlioglu H., Loubaton P. *On the Quarter-Plane representation of 2-D Wide Sense Stationary Processes.* International Symposium on Information Theory, june 21—25, 1982, Les Arcs, France, Abstracts of Papers, p. 148.

124. Kostič J. M. *Fourier-series representation for phase density of sum of signal, noise and interference.* În: Electron Lett, 1979, 15, nr. 17, p. 541—542.

125. Kostic T. M. *Error rates of phase-modulated signals in multilink system with interference.*

126. Kozlenko N. I., P A. M., P. L. V., *Verojatnostnye harakteristiki ocenki soobčenija differencial'noj impul'sno-kodovoj moduljacii.* În: Radiotehn. I. Elektron. 1920, 25, nr. 9, p. 1873—1880.

127. Krasnosvskij Z. M., *Ob effektivnosti obnaruživajačego kodirovanija nepreryvnyh signalov.* În: Radiotehn. 1979, nr. 10, p. 48—50.

128. Kretz F., Sabatier J. *Echantillonage des images de television: analyse dans le domaine spatio-temporel et dans le domaine de Fourier.* În: Annales des Telecommunications, 36, 3—4, 1981, p. 231—273.

129. Krücker K. *Rapid interference suppression using Kalman filter approach.* În: Electron, Lett, 1981, 17, nr. 2, p. 65—67.

130. Krzymien W. A., *Spectral analysis of Variable-Length Block Coded Digital Signals*. În: NTC 1979; Nat. Telecommun. conf. Washington D.E. 1979, Conf. Rec. Vol. 1 N.Y. 1979, 55.6/1—55.6/5.
131. Kugurekov V. S. *Ob izbytočnosti linejnyh cikličeskih kodov s perestanovočnym dekodirovaniem*. În: Probl. Peredaci inform. 1980, 16, nr. 3, p. 108—110.
132. Kulman N. K. *Optimal'naja fil'tracija Gaussova processa na fone korrelirovannoj s nim pomehi*. În: Radiotehn. i Elektron., 1980, 25, nr. 11, p. 2334—2341.
133. Kunt M., *Decoulon F. Signal Processing; Theories and applications*, Proceedings of the first European Signal. Processing Conf. Lausanne Switzerland, sept. 16—18, 1980. North-Holland Publishing Company. Amsterdam-N.Y.-Oxford.
134. Kuznecov Ju. A., *Ob odnom sposobe različenija slučajnyh signalov s rovnomernym raspredeleniem mgnovennyh značenij amplitud*. În: Radiotehn. 1980, 35, nr. 1, p. 67—69.
135. Lagonyannis D. *Stieltjes — Type correlator based on Delta-Sigma Modulation*. În: IEE Proc., 1981, G 128, nr. 1, p. 9—14.
136. Lam F. K. Tsang W. M., *Chirp transform correlator using ultrasonic strip dispersive delay lines*. În: Int. j. Electron, 1980, 49, nr. 1, p. 15—27.
137. Lang Stephen W., Mc Clellan James H. *A simple proof. of stability for all-pole linear prediction models*. În: Proc. IEEE, 1979, 67, nr. 5, part. 1, p. 860—861.
138. Lazic D. E. *Class of Block codes for the Gaussian Channel*. În: Electron. Lett, 1980, 16, nr. 5, 185—186.
139. Lebedev D. S., Tukerman I. I. *Televidenie i teoria informații*, Moscva, Izdatelstvo Energhia, 1965.
140. Leuthold P. E. *A new concept for the realization of data modems with integrated digital filters and modulators*. Philips Res. 1972, repts 27, p. 223—243.
141. Levin B. R., *Teoreticeschie osnovî statisticescoi Radiotehnichii*. Moscva, Sovetscoe Radio, 1976.
142. Levin B. R. *Teoria nadejnosti Radiotehniceskih sistem*. Moscova, Sovetscoe radio, 1978.
143. Libois L. J. *La comutation electronique*. Paris, Ed. Ey Rolles, 1980.
144. Ljutin, V. I. *Optimal'nyj priem diskretnoj informacii, peredavaemoj fazomanipulirovannym psevdoslučajnym signalom*. În: Teorija per. inf. po kan. svjazi Leningrad-1981, p. 149—155.
145. Losev V. V. *Diskretnye signaly na osnove funckij Uolsa dlja mnogo-kanal'noj sistemy peredaci informacii*. În: Radiotehn. i electron., 1979, 24, nr. 11, p. 2222—2225.
146. Losev V. V. *Diadno-grupovaja struktura posledovatel'nostej bystrogo poiska*. În: Radio, tehn. i Elektron. (Moskva) 1980, 25, nr. 2, p. 427—428.
147. Losev V. V., *Primenenie teoretiko-čislovyh preobrazovateliy DLJA sinhronizacii i dekodirovanija signalov*. În: Radiotehn. i elektron. 1980, 25, nr. 7, p. 1468—1476.
148. Losev V. V., *Dekodirovanie mažoritarno-uplotnennyh signalov pri pomoqi diadnoj sverîki*. În: Radiotehn. i Elektron. 1980, 25, nr. 9, p. 1999—2001.
149. Lu Shyue Ching. *Random ciphering bounds on a class of secrecy systems and discrete message sources*. În: IEE Trans. Inform. Theory, 1979, 25, nr. 4, p. 405—414.
150. Lu Shyue Ching. *On secrecy systems with side information about the message available to a cryptanalyst*. În: IEEE Trans. Inform Theory, 1979, 25, nr. 4, p. 472—475.
151. Lu Shyue Ching. *The existance of good cryptosystems for key greater than the message redundancy*. În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1979, 25, nr. 4, p. 475—477.
152. Luvison A., Pirani G. *Design and performance of an adaptive Kalman receiver for synchronous data transmisson*. În: IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst., 1979, 15, nr. 5, p. 635—648.
153. Lysenko O. P. *Raspredelenie fazy slucajnogo vektora s razlicnymi komponentami*. În: Izv. vuzov. Radioelektron. 1980, 23, nr. 5, p. 85—87.

154. Macchi O., *Théorie statistique de la transmission de l'information en presence de bruit*. ENST, Paris, 1975.
155. Macchi C. *Modeles d'apprentissage. Computer Oriented Learning Processes*. Edited by J. C. Simon, Noordhoff-Leyden, 1976, p. 25—66.
156. Macchi O, Macchi C. *Théorie des systemes de communication*. ESE Gif sur Yvette, 1976.
157. Macchi C., Guilbert J. F. (editori): *Teleinformatique, Transport et traitement de l'information dans les reseaux et systemes informatiques*. Dunod Informatique, Paris, 1979.
158. Macchi O. *Le filtrage adaptif en telecommunications*. În: Annales des Telecommunications, 36, N. 11—12, 1981.
159. Maitre X., *Codage par Blocs d'echantillons pour la numerisation des signaux multiplexes par repartition en frequence*. În: Ann. Telecommun. 1980, 35, nr. 5—6, p. 155—178.
160. Makarov I. S. *Optimal'nyh priem pri mežsimol'noj interferenčii*. În: Radiotehn. 1979, T 34, nr. 2, p. 59—61.
161. Makarov S. B., Cikin I. A. *Diskretno-analogovyj metod formirovanija signalov s organicennym spektrom*. În: Radiotehn. 1980, 35, nr. 8, p. 3—10.
162. Malah D., Flanagan J. L., *Frequency scaling of speech signals by transform techniques*. În: „Bell syst. Techn. J" 1981, 60, nr. 9, p. 2107—2156.
163. Mark J. W., Todd T. D., *A nonuniform Sampling approach to data compression*. În: IEEE Trans. Commun. 1981, 29, nr. 1, p. 24—32.
164. Mark J. W. *Adaptive decision-Feedback predictive coding of digital sources*. În: IEE Proc., 1981, F128, nr. 3, p. 155—160.
165. Marko H. *Bemerkungen zur Spektralitransformation*. În: AEU, 1978, 32, p. 417—424.
166. Marko H. *Ein tragbares Terminal zur Wirtschaftlichen nutzung vorhandener Schmalbandkanale. HRSG: W. Hilberg, R. Piloty*. München, Olenbourg, 1979, 474—485.
167. Marko H. *Kann man über die Nyquistrate hinaus übertragen Moglichkeiten und Grenzen der Digitalen übertragung mit und ohne Quantisierte Ruckkopplung*. În: AEU, 1982, 36, nr. 6, 238—244.
168. Marko H. *Methoden der systemtheorie*. Berlin, Springer Verlag, 1982.
169. Markwitz W., *Convolutional codes for radio channels subject to Burst error*. Int Zurich semin. Dig. Commun: Dig. Transmiss. Wireless syst. 1980 Proc. Zurich 1980, G 3/1—G 3/4.
170. Mason J. S. D. *Power spectra from approximate transforms*. În: IEE Proc., 1980, A 127, nr. 4, p. 250—251.
171. Mason L. J., *An error probability formula for linear codes digital signals*. În: IEE Trans. Commun, 1980, 28, nr. 6, 904—905.
172. Matjusin O. T. *Bystrodejstvujuqij preobrazovatel'kodfaza*. În: Radiotehn. 1980, 35, nr. 7, p. 39—42.
173. Mauersberger W., *Generalised correlation model for designing 2-Dimensional image coders*. În: Electron. Lett., 1979, 15, nr. 20, p. 664—665.
174. Mazur B. A., Taylor D. P., *Demodulation and Chprier synchronization of Multi-H Phase codes*. În: IEEE Trans. Commun., 1981, 29, nr. 3, p. 257—266.
175. Mazurkov M. I., Sverdlik M. B., *Ocenka efektivnosti bystro metoda prjamogo vycislenija aperiodiceskoj svertki*. În: Radiotehn. i Elektron., 1980, 25, nr. 9, p. 1885—1903.
176. Mceliece R. J. *The theory of information and coding*. London, Addison-Wesley Publishing Company, 1979.
177. Mc Quilton D., *Efective constraint length of cyclic convolutional self orthogonal codes*. În: IEE Proc., 1981, F128, nr. 2, p. 69—73.

178. Meissner P. *A Multilevel Description of Segmented Speech Signals Modeled by a Composite Source.* International Symposium on Information Theory, june 21—25, 1982, Les Arcs, France, Abstracts of Papers, p. 65.

179. Middleton D. *Canonical nongaussian noise models. Their implications for measurement and for prediction of receiver performance.* În: IEEE Trans. Electromagn. Compatib., 1979, 21, nr. 3, p. 209—220.

180. Miki Shigeniko, Kaneru Seiko. *Adaptive schemes to recognize an asynchronously generated signal.* În: IEEE Trans. Commun., 1979, 27, nr. 11, p. 1711—1716.

181. Miller M. J., in Shu. *The Analysis of some selective-repeat ARQ schemes with finite receiver buffer.* În: IEEE Trans Commun., 1981, 29, nr. 9, p. 1307—1317.

182. Mitra D. *A generalized adaptive quantization system with a reconstruction method for noisy transmission.* În: IEEE Trans. Commun., 1979, 27, nr. 11, p. 1681—1689.

183. Mohanty N. C. *Detection of Marrcow Band frequency modulated signal.* În: IEEE Trans Commun, 1979, 27, nr. 12, p. 1806—1909.

184. Moiseeva, G. G. *Struktura optimal'nyh fazomanipulirovannyh signalov.* În: Teorija pered. inf. po kanalam svjazi. Leningrad, 1981, p. 110—113.

185. Morais D. H., Feher K. *Bandwidth efficiency and probability of error performance of MSK and offset QPSK Systems.* În: IEEE Trans. Commun, 1979, 27, nr. 12, 1794—1801.

186. Morgenstern G. *Zur Berechnung der spektralen Leistungsdichte von digitalen Basisband-Signalen.* Ferhmelde-Ing. 1979, 33, nr. 12, 405, ILL.

187. Morozov, V. M. *Analiz effektivnosti ustrojstva adaptivnogo dekodirovanija pomehoustojcivyh kodov v kanalah peredaci nepreryvnyh soobćenij.* În: Radiotehnika, 1981, vol. 36, nr. 11, p. 31—36.

188. Morozov, A. K., Penin P. I. *Pomohoustojcivost' nekogerentnogo priema bystrozamirajuqih binarnyh FRM-signalov.* În: Tr. Mosk energ. institut, 1981, nr. 516, p. 3—6.

189. Mullick S. K., Amsari R. *Digital interploation.* În: J. Inst. Electron. and Telecommun. Eng., 1980, 26, nr. 1, 9—20.

190. Munday E., Brine, Farell P. G., Jenkins V. *Hybrid signalling for spread spectrum data transmission.* Int. Zurich Semin. Dig. Commun. Dig. Transmiss Wireless Syst., 1980, Proc. Zurich, 1980, A8/1—A8/6.

191. Murthy Sundara K. M., Cattermole K. W. *Evaluation of Error probability for partial response systems.* În: Electron. Lett., 1980, 16, nr. 23, p. 886—888.

192. Nemirovskij E. E., Romanenko G. B., Mihajlovskaja L. G. *Analiticeskie ocenki kvazioptimalnyh metodov priema v celom blocnyh kodov.* În: Probl. Peredaci informacii, 1981, vol. 17, nr. 4, 34—40.

193. Neuburger E. *Einfuhrung in die Theorie des linearen Optimalfiltres.* R. Oldenbourg, Munchen-Wien, 1972.

194. Neuhoff, David L., Shielfs Paul C. *Channels with almost finite memory* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1979, 25, nr. 4, p. 440—447.

195. Newsome J. P., Edge D. A., Safavian O. *Analytical models for chirpsignal compression and dispersion.* În: Int. J. Electron, 1979, 47, nr. 2, p. 171—179.

196. Niwa Kunihiko, Yukawa Akira, Tomozawa Atsushi. *A discretely adaptive delta modulation codec.* În: IEEE Trans. Commun. 1981, 29, nr. 2, p. 168—173.

197. Obolonin I. A., Seryh V. I. *O točnosti modelirovanija radiokanalov.* În: Radiotehn. 1979, 34, nr. 12, p. 46—48.

198. Ohkubo Motoaki. *A study on wiretap multiple access channels.* În: Trans. Inst. Electron. and Commun. Eng. Jap. 1979, p. 469—476.

199. Okunev Ju B., Per'kov V. V., Jakovlev L. A. *Ispol'zovanie sloznyh signalov dlja postroenija sistemy peredaci diskretnoj informacii, invariantnoy k izmenenijan in castoty i fazy.* În: Radiotehn. 1979, 34, nr. 11, p. 26—30.
200. Oligboh C. N., Ackroyd M. H. *Linear Frequency codes sequence.* În: IEEE Proc. 1980, 127, nr. 4, p. 191—198.
201. Omel'cenko V. A. *Osnovy obobgenng spektral'no-korreljacionnoj teorii kontinual'nyh signalov.* În: Radiotehn. (Har'kov), 1981, nr. 59, p. 10—17.
202. Oppenheim Alan V, Lim Jae S. *The importance of phase in signals.* În: Proc. IEEE, 1981, 69, nr. 5, p. 529—541.
203. Qerbakov V. Ju. *Ispol'zovanie ocenii neizvestnoj modeli v zadače linejnoj fil'tracii soobčenij.* În: Radiotehn. 1980, 35, nr. 11, p. 62—65.
204. Papoulis Athanasios, Chamzas Christodoulos. *Detection of Hidden periodicities by adaptive extrapolation.* În: IEEE Trans. Acoust Speech and Signal Process, 1979, 27, nr. 5, p. 492—500.
205. Paramonov A. A. *Optimal'naja fil'tracija ogibajučej uzkopolosnogo slučajnogo processa.* În: Radiotehn. 1980, 35, nr. 6, p. 70—73.
206. Paramonov A. A. *Optimal'naja fil'tracija fazy uzkopolosnogo slučajnogo processa.* În: Radiotehn. 1981, vol. 36, nr. 11., p. 73—74.
207. Paskov B. A., *Čifrovoe formirovanie složnyh DCM signalov.* În: Tr. Mosk. energ. IN-TA, 1979 nr. 418, p. 69—72.
208. Pelegov Ju. F., *Obobčennye harakteristiki ansamblej ortogonal'nyh signalov.* În: Tr. NII Radio, 1931, nr. 4, p. 54—60.
209. Perov A. I. *Sintez i analiz odnogo algoritma adaptivanoj fil'tracii soobčenija.* În: Tr Mosk. Energ. In-Ta, 1980, nr. 467, p. 46—49.
210. Perov V. P. *Soglasovannaja fil'tracija vectornyh funkciy v obobgennom bazise.* În: Radiotehn. i Elektron., 1981, 26, nr. 10, p. 2114—2118.
211. Pervačeu S. V., Klimakov V. V. *O vybore šaga vremmenoj diskretizacii v diskretnoj adaptivnoj sisteme fil'tracii.* În: Tr. Mosk. Energ. In-Ta, 1980, nr. 467 p. 94—98.
212. Peterson W. W., Weldon E. J. *Error Correcting codes,* Massachusetts, the MitPress, 1972.
213. Petrovic G. *Power spectrum of the balanced digital signal generated by Markov source.* În: Electron. Lett, 1979, 15, nr. 24, p. 769—770.
214. Petrovic G. *Power spectrum of scrambled signal.* În: Electron. Lett, 1980, 16, nr. 4, p. 147—148.
215. Petrovskij, I. B. *Metody analiza složnosti i točnosti rasčetov verojatnostnyh harakteristik diskretnyh kanalov opisaemyh markovskoj model'ju, kodov i sistem peredači dannyh.* Obrab. inf. v. sistemah svjazi, Leningrad, 1981, p. 16—23.
216. Picinbono B. *Reconnaissance des formes et traitement du signal.* Congres AFCET/ /IRIA, Reconnaissance des formes et traitement des images chatenay-Malabry, fev. 1978, p. 881—895.
217. Picinbono B. *Éléments de Théorie du Signal.* Dunod Université, Paris, 1978.
218. Picinbono B. *Commande automatique de gain a référence bruit seul pour la détection adaptive.* În: Annales des Télécommunications, 36, nr. 11—12, 1981, p. 679—684.
219. Pilipčuk N. J., *Pomehoustojčivost'differencial'noj impul'snokodovoj moduljacii.* În: Radiotehn. Institut AN SSSR. Prepr. 1980, nr. 6, 275, IL.
220. Piskorz V. V. Čumačenko. A. A. *Diskretnaja obrabotka pri sovmestnom izmerenii častoty signala i ce proizvodnoj.* În: Izv. vuzov. Radioelektron, 1981, vol. 24, nr. 11. p. 40—45.
221. Pgrebnov V. N. *Rascet spectra processa na vyhode organičitelja pri složnomspertre vhodnogo vozdejstvija.* În: Tr. Nosk. Energ, IN-TA, 1980, nr. 467, p. 89—94.
222. Pogorebnov V. N. *Realizacija odnogo algoritma obnaruženija signala v šumah neizvestnoj močnosti.* În: Tr. Mosk. Energ. Institut, 1981, nr. 516, p. 49—54.

223. Pohlig S. C. *Fourier Transform phase coding of images.* În: IEEE Trans. Acoust Speech and signal process, 1980, 28, nr. 3, p. 339—341.
224. Poljakov P. F., *Pomehoustojčivost' optimal'nogo i neoptimal'nogo priema amplitudno-modulirovannyh radiosignalov v uslovijah apriornij neopredelenhosti.* În: Radiotehn. i Elektron, 1981, 26, nr. 10, p. 2110—2113.
225. Potter Y. M. *Recursive code generation based on M-sequence.* În: Electron. Lett, 1980, 16, nr. 22, p. 858—859.
226. Prabhu V. K., *The detection efficiency of 16-ARY qam.* În: Bell syst. techn. J, 1980, 59, 4, 639—656.
227. Prabhu K. M., Reddy V. U. *Data windows in Digital signal processing a review.* În: J. Inst. Electron and Telecommun Eng., 1980, 26, nr. 1, 69—76.
228. Protopopov L. N. *Sintez optimal'nyh periodičeskih signalov s fazovo moduljaciej.* În: Radiotehn. i Elektron. (Moskva) 1980, 25, nr. 2, p. 329—335.
229. Pyskin I. M. Čvilev G. D., *Kvazioptimal'nyh algoritm obnaruzenija determinirovannogo signala v negaussovyh pomenah.* În: Radiotehn i elektron (Moskva), 1980, 25, nr. 2, p. 304—312.
230. Rabiner L., Gold B. *Theory and application of digital signal processing.* Prentice Hall New Jersey, 1975.
231. Rappaport S. S., Schilling D. L. *A two-level coarse code acqusition scheme for spread spectra Radio.* În: IEEE Trans. Commun. 1980, 28, nr. 9, part 2, p. 1734—1742.
232. Redinbo G. R. *Optimum symbol by symbol mean-square error channel coding.* În: IEEE Trans. Inform. Theora, 1979, 25, nr. 4, p. 387—405.
233. Reed I. S., Truong T. K., Miller R. C. *Decoding of B.C.H. and R.S. codes with errors and erasures using continues fractions.*
234. Requicha A. A. *The zeros of entire functions. Theory and Engineering applications.* În: Proc. IEEE, 1980, 68, nr. 3, p. 308—328.
235. Richter H. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer, Berlin, 1966.
236. Rocha L. F., Cernuschi I. B., Orda C. *Convolution and correlation using delta modulators.* În: Proc. IEEE, 1980, 68, nr. 8, p. 1024—1026.
237. Roubine E., *Introduction à la theorie de la communication, I-Signaux non aleatoires, II-Signaux aleatoires, III-Theorie de l'information,* Masson, Paris, 1970.
238. Rudolph L. D., Hartmann C. P. R., Hwang Tai-Yang, Duc Nguyen f. *Algebraic analog decoding of linear binary codes.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1979, 25, nr. 4, p. 430—440.
239. Ruser D. *Erhohung der Storfestigkit durch Sradiktionsverfahren Nachrichtentenhn.* În: Elektron, 1979, 29, nr. 11, p. 478—480.
240. Rybakov B. S. *Koefficient korreljacii fazy signala pri malicii korrelirovannogo Gaussova suma s nesimmetrichoj spektral'noj plotnost'jv.* În: Radiotehn. 1980, 35, nr. 2, p. 55—57.
241. Sajdov P. I., Sepel' S. V. *K postroeniju formirujquh fil'trov v slucae stacionarnogo i nestaționarnogo slučajnyh processov.* În: Izv. Leningrad. Elektrotehn. IN-TA, 1979, nr. 253, p. 118—125.
242. Sakrison D. J. *On the structure of near optimum code generators for images.* În: ICC'79. INT Conf. Commun., Boston, Mass, 1979, Conf. Rec. Vol. 1—4 New-York, N.Y., 1979, 8.2/1—8.2/4.
243. Sarwate D. V., Pursley M. B. *Crosscorrelation properties of pseudorandom and related sequences.* În: Proc. IEEE, 1980, 68, nr. 5, p. 593—619.
244. Sasakawa M., *A study on a Sample and Hold Circuit for wideband codecs.* În: Elec. Commun. Lab. Techn. J, 1980, 29, nr. 3, p. 399—414.
245. Sato Mitsutake, Murata M., *Namekawat. Differential Pulse interval and width Modulated code.* În: Technol. Repets Osaka Univ., 1980, 30, p. 73—79.

246. Schamann N. *Statistische Bindungen zwischen Augenblickswerten des zum Sprachsignal gehorenden analytischen Signals.* În: AEU, 1979, 33, nr. 9, p. 347—354.
247. Schott W., *Ein Verfanhren zur kausalen Optimierung des Empfangers fur Puls-Amplituden-Modulationssystem.* În: AEU, 1980, 34, nr. 2, p. 74—80.
248. Schwartz M. *Computer-Communication network design and analysis.* New-Jersey, Prentice-Hall, 1977.
249. Schwind M., *Berechnung der Verbundwahrscheinlichkeit beliebiger Ordnung schwach korrelierter stochastischer Signale.* În: AEU, 1979, 33, nr. 10, p. 407—412.
250. Sedjakin V. P., Pecenkin A. S., *Eksperimental'noe issledovanie osibki predstavlenija nekotoryh signalov rjadami fur'e.* În: Radiotehn., 1980, 35, nr. 8, p. 68—69.
251. Semusin I. V., *Kontrol' optimal'nosti adaptivnogo fil'tra Kalmana po realizacii skaljarnogo processa.* În: Izv. ANSSSR. Tehn. Kibernet., 1979, nr. 6, p. 195—198.
252. Sevelenko V. D. *Issledovanie dinamiceskih osobennostey spektrov signalov.* În: Radiotehn., 1980, 35, nr. 9, p. 41—44.
253. Shankar P. *On BCH codes over arbitrarily integer rings.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1979, 25, nr. 4, p. 480—483.
254. Shore J. E., Johnson R. W. *Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entropy.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1980, 26, nr. 1, 26—37.
255. Sibalov S. N., *O vozmoznosti povysenija pomehozaqičennosti informacionnoj sistemy s obratnoj svjazju.* În: Tr. Mosk. Energ. IN-TA, 1979, nr. 418, p. 25—28.
256. Simon M. K., Smith J. G., *Alternate Symbol inversion for improved symbol synchronization in convolutionally codes systems.* În: IEEE Trans. Commun, 1980, 28, nr. 2, p. 228—237.
257. Skaug R., *Algorithm for calculating the nonperiodic autocorrelation of maximal length sequences.* În: IEE J. Electron. Circuite and Syst, 1979, 3, nr. 5, p. 213—218.
258. Skaug R., *Numerical Evaluation of the nonperiodic autocorrelation parameter for optima phases of Maximal Length Sequences.* În: IEEE Proc., 1980, F 127, nr. 3 p. 230—237.
259. Sloma A. M., Golfeld G. B. *Posledovatel'naja procedura obnaruzenija signala na fone Gaussovskoj pomehi s neizvestnymi korresjacionnymi svoystani.* În: Izv. vuzov Radiotehn., 1980, 23, nr. 7, p. 83—85.
260. Sloma A. M., Golfeld G. B. *Primenenie statistiki stjudenta dlja posledovatelnogo obnaruzenija signalov na fone pomeh s neizvesthymi korreljacijami.* În: Radiotehn., 1980, 35, nr. 9, p. 53—56.
261. Spătaru A., *Theorie de la transmission de l'information-signaux et bruits.* Masson-Paris, 1970.
262. Spătaru A. *Theorie de la transmission de l'information — codes et decisions.* Masson, Paris, 1973.
263. Spătaru A. *Theorie der Informationsubertragung,* Friedr. Vieweg. Braunschweig, 1973.
264. Speake T., Mersereau R. M. *Evaluation of two — dimensional discrete Fourier Transforms via generalized FFT algoritms.* În: ICASSP 81, Proc Atlanta GA 1981, vol. 1—3, N.Y. 1981, p. 1006—1009.
265. Speake T., Mersereau R. M. *An interpolation technique for periodically sampled two-dimensional signales.* În: ICASSP 81, Proc. Atlanta, GA 1981, vol. 1—3, N.Y. 1981, p. 1010—1013.
266. Spilker J. J., *Digital communication by satellite.* New-Jersey, Prentice-Hall, Inc. 1977.
267. Stojanovic Z. D., Dukic M. L., Stojanovic I. S. *A New demodulation Method improving FM system interference immunity.* În: IEEE Trans. Commun, 1981, nr. 7, p. 1001—1011.
268. Steffen P., Schussler H. W., Mohringer P. *On optimum anti-aliasing filters.* În: AEU, 1981, 35, nr. 5, p. 185—191.

269. Sundal G. J. *Error rate of qpres evaluated in amplitude-phase space.* În: IEEE Trans Commun, 1979, 27, nr. 12, p. 1802—1805.
270. Szulakiewicz P. *Power spectrum of binary FM signal with additional* AM. IEEE Trans. Commun. 1979, 27, nr. 10, Part 2, p. 1609—1616.
271. Tamavaclis C. *Filtration of separable finite discrete signals.* IEEE. Proc. 1981, F 128, nr. 1, p. 1—8.
272. Titelbaum E. L. *Time-Frequency hop signals,* Part. 1, *Coding based upon the Theory of linear congruences.* În: IEEE Trans. Aerosp. and electron. Syst., 1981, 17, nr. 4, p. 490—493.
273. Titelbaum E. L., Sibul L. H. *Time-Frequency hop Signals,* Part. 2, *Coding Based upon Quadratic congruences.* În: IEEE Trans. Aerosp. andelectron syst. 1981, 17, nr. 4, 494—500.
274. Tretter S. A. *Introduction to discrete time Signal Processing,* New-York, John Wiley & Sons, 1976.
275. Trifonov A. P. *Priem razryvnogo radiosignala na fone belogo suma.* În: Radiotehn. i Electron., 1979, 24, nr. 11, p. 2226—2234.
276. Trifonov A. P. *Priem slucajnogo signala s beizvestnoj castotoj.* În: Radiotehn. i Electron., 1980, 25, nr. 4, p. 749—757.
277. Trifonov A. P., Butejko V. K. *Vybor cisla kanalov pri ocenke parametra signals na fone pomeh.* În: Radiotehn., 1981, 36, nr. 4, p. 56—58.
278. Tsividis J. P., *Method for signal processing with transfer function coefficients dependent only on timing.* În: Electron. Lett., 1980, 16, nr. 21, p. 796—798.
279. Tugnait J. K., Haddad A. H., *Adaptive estimation in linear systems with unknown markovian noise statistics.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1980, 26, nr. 1, p. 66—78.
280. Usher E. S., Catchrole R. J., Beasley M., *Analysis of crosstalk data for maximizing PCM system application.* În: IEEE Trans. Commun, 1979, 27, nr. 11, p. 1737—1745.
281. Vanelli J. C., Shehaden N. M. *Signal parameter optimization for the impulsive noise channel.* În: IEEE Trans Commun, 1980, 28, nr. 3, p. 379—385.
282. Varakin L. E., Sal'nikov J. K. *Optimizacija sistem svjazi s sumopodo bhyni signalami i korrektirujučimi kodami.* În: Radiotehn., 1980, 35, nr. 5, p. 17—22.
283. Varakin L. E., Matveeva O. V. *Issledovanie ob'emov bol'sih sistem diskretnyh castotnyh signalov.* În: Teorija pered. informacii po kanalan svjazi Leningrad, 1981, p. 53—60.
284. Vasil'ev K. K., Komissarov G. F., *Obnaruzenie nekogerehtnyh radiosignalov na fone markovskoy pomeni s neizvestnymi parametrami.* În: Radiotehn. 1980, 35, nr. 7, p. 57—59.
285. Vezzosi G., Picinbono B. *Detection d'un signal certain dans un bruit spheriquement invariant. Structures et caracteristiques des recepteurs.* În: Annales des Telecom, munications, 27, nr. 3—4, 1972, p. 95—110.
286. Wagner H. *Zusatzliche Ubertragung von digital codierten Informationen im Fernsehsignal.* În: Ferhmeldetechnik, 1981, 21, nr. 1, p. 34—36.
287. Weng Lih Jyh. *Soft and hard decoding performance comparisons for BCH codes.* În: ICC979. INT. Conf. Commun., Boston, Mass, 1979, Conf. Rec. vol. 1—4, New-York, N.Y. 1979, 25.5/1—25.5/5.
288. Witsenhausen H. S., Wyner A. D. *Source coding for multiple descriptions a binary source.* În: Bell syst. Techn. J., 1981, 60, nr. 10, p. 2281—2292.
289. Whalen A. D. *Detection of signals in noise.* Academic Press, 1971, New-York.
290. Wolfenson M., DA Rocha U. C. *Soft decision decoding with unknown source distribution.* În: Electron. Lett, 1980, 16, nr. 25—26, p. 949—950.
291. Wyner A. D. *An analog scrambling scheme which does not expand Bandwidth,* Part. II. *Continuous time.* În: IEEE Trans. Inform. Theory, 1979, 25, nr. 4, p. 415—425.
292. Yazdahi R., Feher K., Steenaart W., *Constant envelope bandlimited BPSK signal.* În: IEEE Trans. Commun, 1980, 28, nr. 6, p. 889—897.

INDEX ALFABETIC

A

Adaptare statistică 33
Alarmă falsă 255
Alfabet 21

B

Banda de bază 283
Banda echivalentă de zgomot 179
Barker (secvența) 106
Bayes (criteriul lui —) 238
Bayes (regula lui —) 238
Bayes (riscul lui —) 241
Bit 20
Bose-Chaudhuri-Hocquenghem (cod B.C.H) 103
Bruiaj 320, 366
Buclă cu calare de fază (P.L.L.) 354
Butterworth (spectru —) 281

C

Canal 14
Canal continuu 26
Canal continuu în timp 26
Canal discret 26
Canal discret în timp 26
Canal dispersiv 283
Canal simetric 34
Canal staționar 26
Capacitatea canalului 32, 34, 38
Capacitatea codului 47
Cheie aleatoare 113
Cheie pseudoaleatoare 113, 114
Chirp (semnalul —) 182
Cifrare 21
Circuit secvențial (liniar) 86, 90
Clase alăturate 60, 410
Clase de resturi 85, 409
Cod 43
Codare 14
Cod absolut optimal 49
Cod bloc 57
Cod ciclic 58, 80
Cod convoluțional 57
Cod corector de erori 57
Cod detector de erori 57
Cod grup 58
Cod instantaneu 43
Cod ireductibil 44
Cod iterat 79
Cod perfect 77
Cod recurent 106
Cod separabil 43
Cod sistematic 70
Cod unic decodabil 43
Coeficient de corelație 153
Coerență 186
Compandare 304
Compresie de date 368
Convoluție circulară (periodică) 221
Convoluție liniară (aperiodică) 221
Corector 67
Corespondent 14
Cosinus ridicat 287
Criptare 113
Criteriu de decizie 237
Criteriu de fidelitate 15
Cuantă de semnal 301
Cuvînt 21
Cuvînt eroare 61, 64
Cuvînt cu sens (de cod) 59

D

Debit de informație 25
Debruiaj 320, 366
Decodare 14
Deconvoluție 188
Demodulare 14
Demodulare diferențială 363
Demodulare sincronă 367
Densitatea erorilor 67
Densitate de probabilitate 136
Densitate de probabilitate aposteriori maximă (M.A.P.) 259

Densitate spectrală de energie 158
Densitate spectrală de energie de interacțiune 158
Densitate spectrală de putere 154
Densitate spectrală de putere de interacțiune 158
Destinatar 14
Detecție secvențială 254
Diafonie 190
Diagrama ochiului 292
Discriminator liniar 349
Dispersie 137
Distorsiuni 190
Duobinar 291

E

Echivocație 29
Eficiența canalului 33
Eficiența codului 47
Entropie 24
Entropie condiționată 28
Eroare medie 29
Eroare pătratică medie 15, 259
Erori individuale 65
Erori multiple 101
Estimare liniară 260, 263
Estimare neliniară 260, 263
Estimat consistent 228
Estimat maximum aposteriori 260
Estimat maximum plauzibil 262
Estimat nedeplasat 228, 263
Eșantionarea (semnalelor aleatoare) 207
Eșantionul unitate 216
Eveniment 391
Eveniment elementar 391
Eveniment singur 391
Extrapolare 214, 269

F

Factor de vîrf 303
Factor de zgomot 197
Fereastră 229
Fereastră rectangulară 230
Filtrare optimală 270
Filtru adaptat 181
Filtru de reconstrucție 215
Filtru numeric 232
Filtru scalar 273
Filtru trece bandă ideal 175
Filtru trece jos ideal 173
Fredholm (ecuația integrală —) 164
Frecvență generalizată 130
Funcție caracteristică 397
Funcție de autocorelație 121, 137
Funcție de coerență 186
Funcție de corelație (mutuală) 137
Funcție de cost 45, 257
Funcție de distribuție 144
Funcție de netezire 362
Funcție de plauzibilitate 262
Funcție de pondere 177, 178
Funcție de repartiție 136

G

Galois (cîmp —) 93
Gibbs (fenomenul —) 229
Golay (codul —) 105
Grad de modulație 326
Gramatică 390

H

Hamming (cod —) 76, 97
Hamming (distanța —) 62
Hamming (fereastra —) 230
Hanning (fereastra —) 230
Histogramă 229

I

Ideal 80, 408
Impulsul digital 216
Indice de modulație 345
Informație 13
Informație mutuală 19
Informație proprie 19
Interferență între simboluri 284
Interpolare 212, 213
Ipoteza compusă 251
Ipoteza ergodică 142
Irelevanță 242

Î

Întrețesere 112

K

Kalman-Bucy (filtre —) 275, 281
Karhunen-Loève (dezvoltare —) 163
Kepstru 187

L

Lagrange (formula de interpolare a lui —) 214
Limbă 21

Linie de regresie 153
Literă 21
Logică majoritară 109
Lungimea ciclului 92

M

Markov (proces —) 141
Matrice de corecție (control) 68
Matrice de covariație 227
Matrice de selecție 115, 278
Matrice de zgomot 34
Matrice generatoare 74, 83
Măsura informației 17
Mc Millan (inegalitatea lui —) 49
Mesaj 13
Metoda celor mai mici pătrate 385
Metrică euclidiană 116
Modulare 14
Modulație completă 327

N

Normat (spațiu vectorial) 118
Normă 118
Nyquist (teorema lui —) 284

O

Observator 14
Observator ideal 63
Ordonare diadică (Paley) 131
Ordonare naturală (Hadamard) 131
Ordonare pe bază de secvență (Walsh) 131

P

Pachet de erori 66
Parseval (teorema lui —) 225
Perioada matricei caracteristice 92
Perioada unui polinom 417
Periodograma 229
Perturbație 13, 188
Perturbații coerente 191
Polinom caracteristic 92, 441
Polinom generator 82
Polinom primitiv 92
Polinomul simbolurilor de control 82
Polinomul simbolurilor de informație 82
Polivalentă (modulație) 360
Ponderea cuvîntului de cod 72
Pragul testului 240
Predicție 269
Probabilitate maximă 63
Proces aleator 135
Proces aleator discret 199
Proces ergodic 142
Propagarea erorilor 311

R

Raport de plauzibilitate 240
Raport semnal/perturbație 16
Rata distorsiunii (funcția) 370
Rayleigh (distribuția —) 147
Recepție coerentă 321, 360
Recunoaștere parametrică 380
Redundanța canalului 33
Redundanța codului 47
Redundanța relativă 26, 33
Redundanța sursei 26
Regiuni de decizie 63
Reguli de decizie 237

S

Schwartz (inegalitatea lui —) 120, 185
Secvență 130
Secvență de date 216, 226
Secvență pseudoaleatoare 205
Semnal 13
Semnal aleator 135
Semnal aleator pur 141
Semnal binar pseudoaleator 204
Semnal bipolar 308
Semnal condiționat determinist 135, 234
Semnal de televiziune 170
Semnal ergodic 142
Semnal N.R.Z. 307
Semnal polar 307
Semnal R.Z. 307
Semnal staționar 138
Semnal telefonic 169
Serie aleatoare 135, 136
Shannon (prima teoremă a lui —) 50
Shannon (teorema lui — pentru canale cu perturbații) 58
Shannon — Fano (codare —) 51
Simbol 21
Simboluri de control 57, 69
Simboluri de informație 57, 69
Sincronizare de bit 317
Sincronizare de grup 318
Sindrom 67
Sistem de transmisiune a informației 14
Spațiul Banach 119

Spațiul deciziilor 235
Spațiul eșantioanelor 17, 391
Spațiul Hilbert 119
Spațiul metric 116, 117
Spațiul mesajelor 235
Spațiul observațiilor 235
Spațiul primar 123
Spațiul secundar 125
Spațiul semnalului 110
Spațiul vectorial (liniar) 118
Statistică suficientă 241
Sursă (de informație) 14
Sursă cu debit controlabil 22
Sursă discretă 20
Sursă discretă cu memorie 22
Sursă discretă cu constrîngeri fixe 23
Sursă discretă cu constrîngeri probabilistice 23
Sursă discretă fără constrîngeri 22
Sursă discretă fără memorie 21
Supramodulație 327

Ș

Șir tipic 22

T

Teorema eșantionării 206
Testul secvențial 254
Transformata Fourier discretă (T.F.D) 127, 128
Transformata Hilbert 329
Transformata Walsh-Hadamard discretă (T.W.H.D.) 129, 131
Transformata Z 220
Transformări ortogonale 124
Transinformația 32
Trăsături 379
Trăsături sintactice 389

U

Utilizare 14

V

Valoare de vîrf (a semnalelor aleatoare) 168
Valoare medie 137, 138
Valoare pătratică medie 137, 138
Valori medii statistice 137
Valori medii temporale 138
Variabilă aleatoare 395
Viteză de informare 25
Viteză de semnalizare 284

W

Walsh (funcții —) 129
Wiener (filtrare optimală —) 271
Wiener-Hincin (teorema —) 155
Wiener-Hopf (ecuația —) 270

Z

Zgomot 189
Zgomot alb 168, 189
Zgomot colorat 189
Zgomot de agitație termică 195
Zgomot de cuantizare 301
Zgomot de fluctuații 191
Zgomot de impulsuri 191
Zgomot de neurmărire 313
Zgomot ergodic 189
Zgomot gaussian 189
Zgomot granular 314
Zgomot neergodic 190
Zgomot negaussian 189